El estudio de los modernos sistemas para transmitir señales en las emisiones de radio y televisión, telefonía, comunicaciones por satélite, telemetría y diversos servomecanismos constituye una introducción natural a la teoría de la comunicación. Este es el enfoque que utiliza el autor de la presente obra, la cual abarca un curso fundamental de sistemas de comunicación y, a la vez, proporciona los principios generales de dicha teoría.

El libro se destaca tanto por su novedoso enfoque como por sus cualidades didácticas. Ya que se trata de un curso introductorio, se hace más énfasis en la teoría que en las aplicaciones y los temas "difíciles" se abordan de modo que el alumno los capte intuitivamente. Por ejemplo, los conceptos principales de la teoría de comunicaciones no se presentan como axiomas, sino que se desarrollan heurísticamente. Asimismo, el concepto de espectro de densidad de potencia se explica por primera vez en relación con las señales no aleatorias y aunque se utiliza posteriormente en el estudio de los procesos aleatorios, no se lo demuestra de manera formal.

Otra característica notable de este texto es la flexibilidad de su organización temática, la cual permite usarlo no sólo en cursos regulares sobre la materia, sino también en seminarios de actualización impartidos a nivel de licenciatura en las carreras de Ingeniero Electricista e Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica.

ÁREA: ING. ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
ISBN 968-18-0555-0
9 789681 805555

e-mail: limusa@noriega.com.mx
www.noriega.com.mx

introducción a la teoría y SISTEMAS DE COMUNICACIÓN

LATHI

LIMUSA
NORIEGA EDITORES

Temas que trata la obra:

- Análisis de señales
- Transmisión de señales y espectros de densidad de potencia
- Sistemas de comunicación de amplitud modulada
- Sistemas de comunicación con modulación angular
- Sistemas de comunicación de modulación por pulsos
- Ruido
- Comportamiento de los sistemas de comunicación
- Introducción a la transmisión de información
- Elementos de comunicación digital

INTRODUCCION A LA TEORIA Y SISTEMAS DE COMUNICACION

INTRODUCCION A LA TEORIA Y SISTEMAS DE COMUNICACION

B. P. LATHI
Profesor de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Bradley

LIMUSA
NORIEGA EDITORES
MÉXICO • España • Venezuela • Colombia

LC	DEWEY	CUTTER
TK5101	621.38415	L 37i

VERSIÓN AUTORIZADA EN ESPAÑOL DE LA OBRA PUBLICADA EN INGLÉS CONEL TÍTULO:
COMMUNICATION SYSTEMS
© JOHN WILEY & SONS, INC.

COLABORADOR EN LA TRADUCCIÓN:
ENRIQUE HERRERA PÉREZ
INGENIERO EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA. CATEDRÁTICO DE COMUNICACIONES Y JEFE DEL LABORATORIO DE TELEFONÍA EN LA ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, MÉXICO.

REVISIÓN:
MANUEL GUTIÉRREZ GÓMEZ
INGENIERO EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA. MAESTRÍA EN CIENCIAS POR LA UNIVERSIDAD DE ASTON EN BIRMINGHAM, INGLATERRA. COORDINADOR DE LA DIVISIÓN DE COMUNICACIONES, DE LA CARRERA DE INGENIERÍA EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA Y DEL LABORATORIO DE MICROONDAS EN LA ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, MÉXICO.

LA PRESENTACIÓN Y DISPOSICIÓN EN CONJUNTO DE

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA Y SISTEMAS DE COMUNICACIÓN

SON PROPIEDAD DEL EDITOR. NINGUNA PARTE DE ESTA OBRA PUEDE SER REPRODUCIDA O TRANSMITIDA, MEDIANTE NINGÚN SISTEMA O MÉTODO, ELECTRÓNICO O MECÁNICO (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO, LA GRABACIÓN O CUALQUIER SISTEMA DE RECUPERACIÓN Y ALMACENAMIENTO DE INFORMACIÓN), SIN CONSENTIMIENTO POR ESCRITO DEL EDITOR.

DERECHOS RESERVADOS:

© 2003, EDITORIAL LIMUSA, S.A. DE C.V.
GRUPO NORIEGA EDITORES
BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C.P. 06040
8503 8050
01(800) 706 9100
5512 2903
limusa@noriega.com.mx
www.noriega.com.mx

CANIEM NÚM. 121

VIGESIMOPRIMERA REIMPRESIÓN

HECHO EN MÉXICO
ISBN 968-18-0555-0

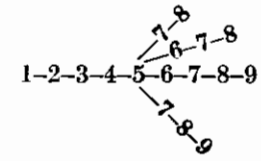
Prólogo

Este libro lo escribí con un doble propósito: enseñarle al estudiante los fundamentos de los sistemas de comunicación y poner a su alcance, desde los primeros años de la carrera, los principios generales de la moderna teoría de la comunicación. La primera parte de la obra se dedica al estudio de sistemas de comunicación específicos y en forma gradual se muestra la importancia que tienen la relación señal a ruido y el ancho de banda, como factores limitativos en la transmisión de la información.

Ya que el libro se preparó para usarlo en un curso introductorio, hubo que omitir muchos detalles sobre los aspectos de densidad de potencia en procesos aleatorios. Se explica el concepto de espectro de densidad de potencia de señales no aleatorias y, posteriormente, se lo emplea en el estudio de señales aleatorias; pero el concepto no se desarrolla de manera formal, ya que el tratamiento riguroso de los procesos aleatorios en un curso introductorio como éste, sería contraproducente, pues sólo distraería al alumno del tema principal. Una vez que él haya terminado este curso, podrá emprender estudios más rigurosos sobre la teoría de la comunicación, empleando conceptos de estadística.

A lo largo de la obra se hace énfasis en los principios físicos, en vez de los cálculos matemáticos. En este sentido, la exposición sigue muy de cerca el método empleado en mi libro anterior, *Signals, Systems and Communication*. Siempre que es posible, los conceptos y resultados se interpretan en tal forma que el alumno los capte intuitivamente. Los conceptos básicos de la teoría de la información no se presentan como axiomas sino que se desarrollan heurísticamente.

Si se hace una selección adecuada de los temas, el libro puede usarse como texto para cursos tanto semestrales como trimestrales. Cualquiera de las cuatro combinaciones de capítulos mostradas a continuación, constituirían un primer curso bien balanceado sobre sistemas de comunicación.



Por supuesto, también pueden hacerse otras combinaciones adecuadas para ciertos casos. El capítulo 1 (Análisis de señales) constituye, esen-

cialmente, un repaso. Las series de Fourier se utilizan para representar una señal en el espacio de señales ortogonales, debido a la importancia que se da actualmente a la representación geométrica de señales en la teoría de la comunicación. Sin embargo, este aspecto no es esencial para comprender el material presentado en los capítulos posteriores; es decir, el alumno puede prescindir del estudio de las secciones de 1.1 a 1.3.

El libro es autosuficiente y no se necesita que el alumno tenga conocimientos previos en la materia. Tampoco se requiere que haya cursado los fundamentos de la teoría de la probabilidad, ya que todos los conceptos necesarios para estudiar el capítulo 9 (sobre comunicación digital) se proporcionan en el mismo.

Deseo agradecer al señor Ivar Larson la ayuda que me brindó en la corrección de pruebas de imprenta; a los profesores J. L. Jones y R. B. Marxheimer por sus valiosas sugerencias, y al profesor Philip Weinberg Jefe del Departamento, por proporcionarme el tiempo necesario para escribir este libro. Asimismo, me complace agradecerle a la señora Evelyn Kahrs la transcripción mecanográfica del manuscrito.

B. P. LATHI

Peoria, Illinois

Contenido

CAPITULO 1 ANALISIS DE SEÑALES **13**

1.1 Analogía entre señales y vectores, 14
1.2 Algunos ejemplos de funciones ortogonales, 32
1.3 Representación de una función periódica mediante la serie de Fourier en todo el intervalo $(-\infty < t < \infty)$, 39
1.4 El espectro complejo de Fourier, 41
1.5 Representación de una función cualquiera en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$: la transformada de Fourier, 46
1.6 Algunas observaciones acerca de la función de espectro continuo, 49
1.7 Representación de una señal en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia, 51
1.8 Existencia de la transformada de Fourier, 52
1.9 Transformadas de Fourier de algunas funciones útiles, 52
1.10 Funciones singulares, 54
1.11 Transformadas de Fourier que contienen funciones impulso, 60
1.12 Algunas propiedades de la transformada de Fourier, 71
1.13 Algunas relaciones de la convolución, 89
1.14 Interpretación gráfica de la convolución, 90
1.15 Convolución de una función con la función impulso unitario, 92
1.16 El teorema de muestreo, 94

CAPITULO 2 TRANSMISION DE SEÑALES Y ESPECTROS DE DENSIDAD DE POTENCIA **117**

2.1 Transmisión de señales a través de sistemas lineales, 117
2.2 Características de filtro de los sistemas lineales, 119
2.3 Transmisión sin distorsión, 120
2.4 Filtros ideales, 123
2.5 Causalidad y posibilidad de realización física: Criterio de Paley-Wiener, 125

2.6 Relación entre el ancho de banda y el tiempo de subida, 127
2.7 Espectro de densidad de energía, 130
2.8 Espectro de densidad de potencia, 135

CAPITULO 3 SISTEMAS DE COMUNICACION: MODULACION EN AMPLITUD 153

3.1 Multicanalización por división de frecuencia y de tiempo, 153
3.2 Modulación en amplitud: Sistemas de portadora suprimida (AM-PS), 155
3.3 Modulación en amplitud con portadora de alta potencia (AM), 169
3.4 Transmisión de banda lateral única, 179
3.5 Efectos de los errores de frecuencia y fase en la detección síncrona, 187
3.6 Técnicas de reinserción de portadora para la detección de señales con portadora suprimida, 192
3.7 Comparación de diversos sistemas de AM, 195
3.8 Transmisión de banda lateral residual, 196
3.9 Multicanalización por división de frecuencia, 200

CAPITULO 4 SISTEMAS DE COMUNICACION: MODULACION ANGULAR 209

4.1 FM de banda angosta, 212
4.2 FM de banda ancha, 214
4.3 Modulación de multiplicidad de frecuencia, 220
4.4 Modulación con onda rectangular, 223
4.5 Modulación lineal y no lineal, 225
4.6 Algunos comentarios sobre la modulación en fase, 226
4.7 Contenido de potencia de la portadora y las bandas laterales en portadoras moduladas en ángulo, 227
4.8 Características de reducción de ruido de la modulación angular, 228
4.9 Generación de señales de FM, 228
4.10 Demodulación de señales de FM, 232

CAPITULO 5 SISTEMAS DE COMUNICACION: MODULACION POR PULSOS 237

5.1 Modulación por amplitud de pulsos, 237
5.2 Otras técnicas de modulación por pulsos, 246

5.3 Multicanalización por división de tiempo, 248
5.4 Requisitos de ancho de banda para la transmisión de señales de MAP, 250
5.5 Comparación entre sistemas de multicanalización por división de frecuencia y por división de tiempo, 252

CAPITULO 6 RUIDO 257

6.1 Ruido de disparo, 258
6.2 Ruido térmico, 267
6.3 Cálculos de ruido: Fuente de ruido única, 271
6.4 Fuentes múltiples de ruido: Superposición de espectros de potencia, 273
6.5 Ancho de banda de ruido equivalente, 278
6.6 Factor de ruido de un amplificador, 278
6.7 Determinación experimental del factor de ruido, 288
6.8 Densidad de potencia y densidad de potencia máxima, 289
6.9 Temperatura efectiva de ruido, 292
6.10 Factor de ruido en términos de la ganancia máxima, 293
6.11 Etapas en serie, 295
6.12 Amplificador Cascode, 299

APENDICE: Demostración del teorema generalizado de Nyquist, 300

CAPITULO 7 COMPORTAMIENTO DE LOS SISTEMAS DE COMUNICACION 307

7.1 Representación del ruido paso-banda, 307
7.2 Cálculos de ruido en sistemas de comunicación, 314
7.3 Ruido en los sistemas de amplitud modulada, 315
7.4 Ruido en sistemas con modulación angular, 323
7.5 Ruido en sistemas de modulación por pulsos, 336
7.6 Comparación entre los sistemas codificados y no codificados, 348

APENDICE A: Aclaración acerca del cálculo de la potencia de señal y ruido por separado en FM, 349

APENDICE B: Relación señal a ruido en sistemas de multicanalización MAP por división de tiempo, 350

CAPITULO 8 INTRODUCCION A LA TRANSMISION DE INFORMACION **357**

8.1 Medición de información, 357
8.2 Capacidad de canal, 362
8.3 Transmisión de señales continuas, 364
8.4 Intercambio entre el ancho de banda y la razón señal a ruido, 366
8.5 Eficiencia de los sistemas MPC, 370

APENDICE: Contenido de información de mensajes no equiprobables, 372

CAPITULO 9 ELEMENTOS DE COMUNICACION DIGITAL **375**

9.1 Detección de señales binarias: El filtro óptimo, 376
9.2 Decisión de umbral en el filtro óptimo, 382
9.3 Modulación binaria en amplitud (MBA), 389
9.4 Modulación binaria en fase (MBF), 391
9.5 Modulación binaria en frecuencia (MBFr), 394
9.6 Algunos comentarios sobre detección por filtro óptimo, 398

APENDICE: La desigualdad de Schwartz, 400

BIBLIOGRAFIA **403**

INDICE **405**

INTRODUCCION A LA TEORIA Y SISTEMAS DE COMUNICACION

CAPITULO 1

Análisis de señales

Existen numerosas formas de comunicación. Dos personas pueden comunicarse entre sí por la voz, los ademanes o los símbolos gráficos. En el pasado se llevaba a cabo la comunicación a larga distancia con medios como sonidos de tambor, señales de humo, palomas mensajeras y señales luminosas. Hoy en día, estas formas de comunicación han quedado superadas por la comunicación eléctrica. Esto se debe a que se pueden transmitir las señales eléctricas a distancias mucho mayores (teóricamente a cualquier distancia en el universo) y con velocidad sumamente alta (3×10^8 metros por segundo aproximadamente). En este libro nos dedicaremos exclusivamente a la segunda forma de comunicación mencionada, o sea, la comunicación mediante señales eléctricas.

El ingeniero está primordialmente interesado en la comunicación eficiente. Esto implica el problema de la transmisión de mensajes lo más rápidamente posible y con un mínimo de errores. Estudiaremos dichos aspectos en forma cuantitativa en el transcurso del libro. Sin embargo resulta muy ilustrativo analizar cualitativamente los factores que limitan la rapidez de transmisión de información. Por conveniencia, consideraremos la transmisión de símbolos (tales como los símbolos alfanuméricos del idioma inglés) utilizando ciertas formas de ondas eléctricas. En el proceso de su transmisión, estas señales se contaminan con señales de ruido presentes en todas partes y generadas por numerosos fenómenos naturales o provocados por el hombre. Estos últimos, como interruptores de contactos defectuosos, el apagado y el encendido de equipo eléctrico, radiación por ignición y lámparas fluorescentes, emiten constantemente señales de ruido aleatorias. Los fenómenos naturales como las tormentas y descargas eléctricas, la radiación solar y la radiación intergaláctica se consideran como fuentes de ruido. Otro productor importante de ruido en todos los sistemas eléctricos es el ruido de fluctuación como el ruido térmico en resistores y el ruido de disparo en dispositivos activos. Cuando las señales que transportan el mensaje se transmiten en un canal, sufren alteración debido a las señales de ruido aleatorias y, por consiguiente, son difíciles de identificar en el receptor. Para superar esta dificultad, es

necesario incrementar la potencia de las formas de onda portadoras del mensaje. También se debe mantener una determinada relación de la potencia de señal a la potencia de ruido. Esta relación, S/N, constituye un parámetro importante en la evaluación del comportamiento de un sistema.

Consideraremos a continuación el incremento de la velocidad de transmisión mediante la compresión, en la escala del tiempo, de las formas de onda con el objeto de transmitir más mensajes en un cierto intervalo de tiempo. Cuando se comprimen las señales sus variaciones son más rápidas. Esto incrementa naturalmente sus frecuencias. Por lo tanto la compresión de una señal plantea el problema de transmitir señales de frecuencias más elevadas. Esto, a su vez, requiere un incremento en el ancho de banda del canal por el que se transmiten los mensajes. En esta forma puede incrementarse la rapidez de comunicación al aumentar el ancho de banda del canal. Por lo tanto, para que la comunicación sea más rápida y de mejor calidad, conviene incrementar la relación de potencias de señal a ruido y el ancho de banda.

Estas conclusiones que resultan evidentes se basan en un razonamiento cualitativo; sin embargo, lo interesante del caso es que el ancho de banda y la relación señal a ruido sean intercambiables. Más adelante demostraremos que, para mantener una rapidez dada de comunicación que tenga una calidad específica, podemos intercambiar la relación S/N y el ancho de banda y viceversa. Se puede reducir el ancho de banda con el fin de incrementar la relación S/N. Por otra parte, se puede considerar adecuada una relación S/N pequeña si se incrementa en forma correspondiente el ancho de banda del canal. Esto se expresa por medio de la ley de Shannon-Hartley,

$$C = B \log \left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

en donde C es la capacidad del canal o la rapidez de transmisión del mensaje (que se examinará posteriormente) y B es el ancho de banda del sistema (en Hz). Con una C dada, podemos incrementar B y reducir S/N y viceversa.

Para estudiar los sistemas de comunicación debemos familiarizarnos con las diferentes formas de representar las señales. Nos dedicaremos en este capítulo al análisis de señales.

1.1 ANALOGIA ENTRE SEÑALES Y VECTORES

Se entiende o se recuerda mejor un problema si se lo asocia con algún fenómeno conocido. Por eso, siempre tratamos de buscar analogías al estudiar un nuevo problema. En el estudio de problemas abstractos, las semejanzas resultan muy útiles, particularmente si el problema es análogo a algún fenómeno concreto. Entonces es fácil obtener alguna idea del problema nuevo a partir del conocimiento del fenómeno correspondiente. Afortunadamente existe una analogía perfecta entre los vectores y las señales que permite un mejor entendimiento del análisis de señales. En seguida repasaremos brevemente las propiedades de los vectores.

Vectores

Un vector se especifica mediante su magnitud y su dirección. Denotaremos todos los vectores con negritas y a sus magnitudes con cursivas; por ejemplo, $\mathbf{A}$ es determinado vector con magnitud A. Considérense dos vectores $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ como los de la figura 1.1. Sea $C_{12}V_2$ la componente de $\mathbf{V}_1$ sobre $\mathbf{V}_2$ ¿Cómo interpretamos físicamente la componente de un vector a lo largo de otro? Geométricamente, la componente del vector $\mathbf{V}_1$ a lo largo del vector $\mathbf{V}_2$ se obtiene al trazar una perpendicular desde el extremo de $\mathbf{V}_1$ hacia el vector $\mathbf{V}_2$, como vemos en la figura 1.1. El vector $\mathbf{V}_1$ se puede expresar ahora en términos del vector $\mathbf{V}_2$.

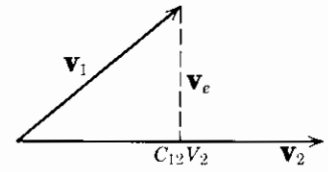


Figura 1.1

$$\mathbf{V}_1 = C_{12}\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_e \tag{1.1a}$$

Sin embargo ésta no es la única forma de expresar el vector $\mathbf{V}_1$ en términos del vector $\mathbf{V}_2$. La figura 1.2 nos muestra dos entre infinitas posibilidades. Así, en la figura 1.2a

$$\mathbf{V}_1 = C_1\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_{e_1} \tag{1.1b}$$

y en la figura 1.2b

$$\mathbf{V}_1 = C_2\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_{e_2} \tag{1.1c}$$

En cada representación, $\mathbf{V}_1$ queda expresado en términos de $\mathbf{V}_2$ más otro vector, que llamaremos vector error. Si se quiere aproximar el vector $\mathbf{V}_1$ mediante un vector en la dirección de $\mathbf{V}_2$, entonces $\mathbf{V}_e$ representa el error de la aproximación. Por ejemplo, si en la figura 1.1 aproximamos a $\mathbf{V}_1$ mediante $C_{12}\mathbf{V}_2$, entonces el error de la aproximación es $\mathbf{V}_e$. Si en la

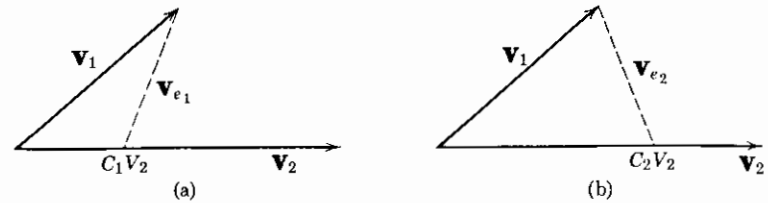


Figura 1.2

figura 1.2a, se aproxima $\mathbf{V}_1$ mediante $C_1\mathbf{V}_2$ entonces el error está dado por $\mathbf{V}_{e_1}$, y así sucesivamente. ¿Qué tiene de particular la representación de la figura 1.1? La geometría de estas figuras nos enseña claramente que el

vector error de la figura 1.1 es el menor. Ahora podemos formular una definición cuantitativa de la componente de un vector en la dirección de otro. La componente del vector $\mathbf{V}_1$ en la dirección del vector $\mathbf{V}_2$ está dada por $C_{12}\mathbf{V}_2$, en donde C_{12} se escoge de manera que el vector error sea mínimo.

Interpretemos físicamente la componente de un vector a lo largo de otro. Por supuesto que, cuanto mayor sea la componente de un vector en la dirección de otro vector, más se parecen las direcciones de ambos vectores y es más pequeño el vector error. Si la componente del vector $\mathbf{V}_1$ a lo largo de $\mathbf{V}_2$ es $C_{12}\mathbf{V}_2$, entonces la magnitud de C_{12} indica la similitud de los dos vectores. Si C_{12} es cero, entonces el vector no tiene componente en dirección del otro, y por lo tanto los dos vectores son perpendiculares entre sí. A estos vectores se les conoce como *vectores ortogonales.* Por lo tanto, los vectores ortogonales son vectores independientes. Si los vectores son ortogonales, entonces el parámetro C_{12} es cero.

Por conveniencia, definimos el producto escalar de los vectores **A** y **B** como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$$

en donde θ es el ángulo que forman los vectores **A** y **B**. Se tiene de la definición que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

De acuerdo con esta notación,

$$\text{la componente de } \mathbf{A} \text{ a lo largo de } \mathbf{B} = A \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{B}$$

y

$$\text{la componente de } \mathbf{B} \text{ a lo largo de } \mathbf{A} = B \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{A}$$

De igual manera,

$$\text{la componente de } \mathbf{V}_1 \text{ a lo largo de } \mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{V_2} = C_{12}V_2$$

Por lo tanto

$$C_{12} = \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{{V_2}^2} = \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2} \tag{1.2}$$

Nótese que si $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ son ortogonales, entonces

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = 0 \tag{1.3}$$

y

$$C_{12} = 0$$

Señales

El concepto de comparación y ortogonalidad de vectores se puede extender a las señales.* Consideraremos dos señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$. Supóngase que se desea aproximar $f_1(t)$ en términos de $f_2(t)$ en un cierto intervalo $(t_1 < t < t_2)$ de la manera siguiente:

$$f_1(t) \simeq C_{12}f_2(t) \qquad \text{en} \quad (t_1 < t < t_2) \tag{1.4}$$

¿Cómo seleccionaremos C_{12} para obtener la mejor aproximación? Obviamente, debemos encontrar un valor para C_{12} tal que el error entre la función real y la aproximada sea mínimo en el intervalo $(t_1 < t < t_2)$. Definamos una *función de error* $f_e(t)$:

$$f_e(t) = f_1(t) - C_{12}f_2(t) \tag{1.5}$$

Uno de los criterios para reducir al mínimo el error $f_e(t)$ en el intervalo t_1 a t_2 es el de reducir el valor promedio de $f_e(t)$ en este intervalo; es decir reducir al mínimo la expresión

$$\frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12}f_2(t)]\, dt$$

Sin embargo, el criterio resulta inadecuado, pues tal vez, existan errores positivos y negativos grandes que se cancelen entre sí durante el proceso de promediar, de donde se tendrá una indicación falsa de que el error es cero. Por ejemplo, si aproximamos la función sen t con una función nula $f(t) = 0$ en el intervalo de 0 a 2π, el error promedio será cero; eso indica incorrectamente que sen t se puede aproximar a cero en el intervalo de 0 a 2π sin error alguno. Esta situación se puede corregir si reducimos al mínimo al promedio (o valor medio) del cuadrado del error, en lugar de hacerlo con el promedio del error mismo. Designemos al promedio de ${f_e}^2(t)$ por ϵ.

$$\varepsilon = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} {f_e}^2(t)\, dt = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12}f_2(t)]^2\, dt \tag{1.6}$$

Para encontrar el valor de C_{12} que reduce ϵ al mínimo, debemos tener

$$\frac{d\varepsilon}{dC_{12}} = 0 \tag{1.7}$$

es decir,

$$\frac{d}{dC_{12}} \left\{ \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12}f_2(t)]^2\, dt \right\} = 0 \tag{1.8}$$

* A menudo los términos señal y función se emplean indistintamente. Una señal es una función del tiempo; sin embargo, existe una diferencia entre las señales y las funciones. Una función $f(t)$ puede ser función multivaluada de la variable t. Pero la señal física siempre es función univaluada de t. En consecuencia, siempre que se emplee el término función, se entenderá que es una función univaluada de la variable independiente.

Si cambiamos el orden de integración y diferenciación, obtenemos:

$$\frac{1}{(t_2 - t_1)}\left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dC_{12}} f_1^2(t)\,dt - 2\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)\,dt + 2C_{12}\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)\,dt\right] = 0 \quad (1.9)$$

Evidentemente, la primera integral es cero; por lo tanto, de la ecuación 1.9 se obtiene:

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)\,dt} \quad (1.10)$$

Obsérvese la similitud entre la ecuación 1.10 y la 1.2 que expresa C_{12} en términos de vectores.

Por analogía con los vectores, decimos que $f_1(t)$ tiene una componente de forma de onda $f_2(t)$ y que la componente tiene una magnitud C_{12}. Si se anula C_{12}, entonces la señal $f_1(t)$ no contiene componente de la señal $f_2(t)$ y decimos que las dos funciones son ortogonales en el intervalo (t_1, t_2). Se deduce, por lo tanto, que las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son *ortogonales* en el intervalo (t_1, t_2) si

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)\,dt = 0 \quad (1.11)$$

Obsérvese la similitud entre la ecuación 1.11 de funciones ortogonales y la ecuación 1.3 de vectores ortogonales.

Podemos demostrar fácilmente que las funciones sen $n\omega_0 t$ y sen $m\omega_0 t$ son ortogonales en cualquier intervalo $(t_0, t_0 + 2\pi/\omega_0)$ para valores enteros de n y m. Considérese la integral I:

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} \operatorname{sen} n\omega_0 t \operatorname{sen} m\omega_0 t\,dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} \tfrac{1}{2}[\cos(n-m)\omega_0 t - \cos(n+m)\omega_0 t]\,dt \\ &= \frac{1}{2\omega_0}\left[\frac{1}{(n-m)}\operatorname{sen}(n-m)\omega_0 t - \frac{1}{(n+m)}\operatorname{sen}(n+m)\omega_0 t\right]_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} \end{aligned}$$

Como n y m son enteros, $(n-m)$ y $(n+m)$ también lo son. En ese caso la integral I se vuelve cero. Por lo tanto las dos funciones son ortogonales. En la misma forma, se puede demostrar que sen $n\omega_0 t$ y cos $m\omega_0 t$ son funciones ortogonales y que cos $n\omega_0 t$, cos $m\omega_0 t$ también son ortogonales entre sí.

Ejemplo 1.1

Se define una función rectangular $f(t)$ como (figura 1.1):

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t < \pi) \\ -1 & (\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

Aproxímese esta función mediante la forma de onda sen t en el intervalo $(0, 2\pi)$, de modo que el error cuadrático medio sea mínimo.

Solución. Aproximaremos a la función $f(t)$ en el intervalo $(0, 2\pi)$, por medio de

$$f(t) \simeq C_{12} \operatorname{sen} t$$

Encontraremos el valor óptimo de C_{12} con el que se reduce al mínimo el error cuadrático medio de la aproximación. De acuerdo con la ecuación 1.10, para reducir al mínimo el error cuadrático medio:

$$\begin{aligned} C_{12} &= \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} t\,dt}{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\,dt} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} -\operatorname{sen} t\,dt\right] \\ &= \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$f(t) \simeq \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} t$$

representa la mejor aproximación de $f(t)$ mediante una función sen t que reduce al mínimo el error cuadrático medio.

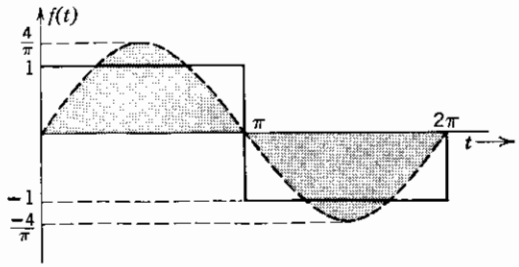


Figura 1.3

Por analogía con los vectores, podemos decir que la función rectangular $f(t)$ de la figura 1.3 tiene una componente de función sen t y que la magnitud de esta componente es $4/\pi$.

¿Cuál es el significado de la ortogonalidad de dos funciones? En el caso de vectores, la ortogonalidad implica que un vector no tiene componente en la dirección del otro. De igual manera, una función no contiene componente alguna de la forma de la función que es ortogonal a ella. Si intentamos aproximar una función mediante su función ortogonal, el error será más grande que la función original misma, de modo que será mejor aproximar a una función con una función nula $f(t) = 0$ en lugar de una función ortogonal a ella. Por consiguiente el valor óptimo de C_{12} es 0 en ese caso.

Determinación gráfica de la componente de una función en otra.

Es posible determinar la componente de una función en otra por medio de procedimientos gráficos con la ecuación 1.10. Supóngase que se conocen gráficamente las dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ y que se desea determinar la componente de la forma de onda $f_2(t)$ contenida en la señal $f_1(t)$ en un período $(0,T)$. Sabemos que la componente está dada por $C_{12}f_2(t)$; es decir,

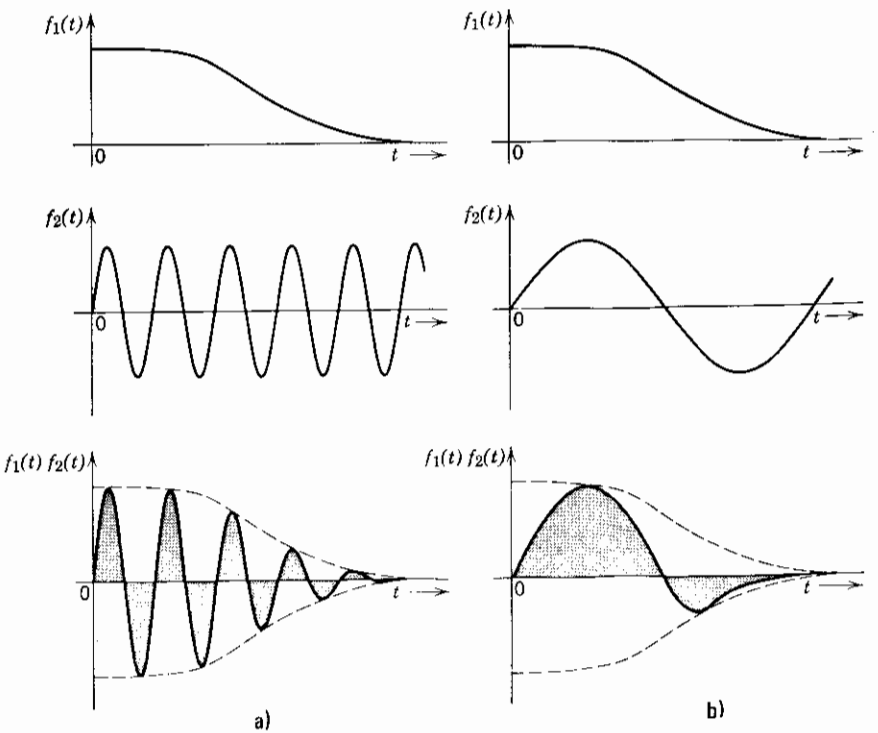


Figura 1.4 Determinación gráfica de la componente de la forma de onda $f_2(t)$ en una señal $f_1(t)$.

$f_1(t)$ contiene la componente de la función $f_2(t)$ de magnitud C_{12}, dada por:

$$C_{12} = \frac{\int_0^T f_1(t)f_2(t)\,dt}{\int_0^T f_2^2(t)\,dt}$$

Se encuentra la integral del numerador de esta ecuación al multiplicar las dos funciones y evaluar el área bajo la curva producto, como se muestra en la figura 1.4. La integral del denominador se obtiene al encontrar el área bajo la función $[f_2(t)]^2$ de una manera similar.

Es evidente que si $f_1(t)$ varía mucho más lentamente que $f_2(t)$, el área bajo la curva $f_1(t)f_2(t)$ será muy pequeña, pues, las áreas positivas y negativas serán aproximadamente iguales y tenderán a cancelarse entre sí como vemos en la figura 1.4a. En consecuencia, $f_1(t)$ contiene una pequeña componente de $f_2(t)$. No obstante, si $f_1(t)$ varía aproximadamente con la misma rapidez que $f_2(t)$, entonces el área bajo la curva producto $f_1(t)f_2(t)$ será mucho mayor, como se muestra en la figura 1.4b y, por lo tanto $f_1(t)$ contendrá una componente grande de la función $f_2(t)$. Este resultado también es intuitivamente obvio, ya que si dos funciones varían con rapidez aproximadamente igual, deben ser bastante parecidas y, por consiguiente, $f_1(t)$ contendrá una componente grande de la función $f_2(t)$

Espacio ortogonal de vectores

Se puede llevar aún más lejos la analogía entre vectores y señales. Consideremos un espacio vectorial de tres dimensiones, descrito mediante coordenadas rectangulares, como en la figura 1.5. Designaremos un vector de longitud unitaria en el eje x como $\mathbf{a}_x$. De la misma manera, se designarán

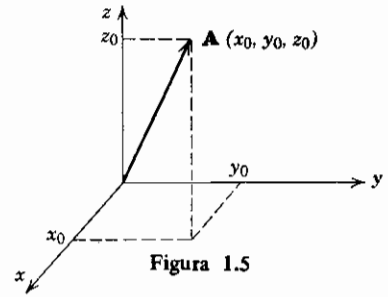


Figura 1.5

como $\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{a}_z$ a los vectores unitarios sobre los ejes y y z, respectivamente. Ya que la magnitud de los vectores $\mathbf{a}_x$ y $\mathbf{a}_z$ es la unidad, se infiere que, en general, para cualquier vector **A**:

La componente de **A** en la dirección del eje $x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x$
La componente de **A** en la dirección del eje $y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_y$
La componente de **A** en la dirección del eje $z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z$

Un vector **A** desde el origen hasta un punto (x_0, y_0, z_0) del espacio tiene como componentes a x_0, y_0 y z_0 en la dirección de los ejes x, y y z, respectivamente. Podemos expresar este vector **A** en términos de sus componentes a lo largo de los tres ejes perpendiculares entre sí:

$$\mathbf{A} = x_0\mathbf{a}_x + y_0\mathbf{a}_y + z_0\mathbf{a}_z$$

Se puede expresar cualquier vector del espacio en términos de los vectores $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{a}_z$.

Puesto que los tres vectores son mutuamente perpendiculares, se deduce que

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0$$

y (1.12)

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{1}$$

Las propiedades de los tres vectores, como nos dice la ecuación 1.12, se pueden expresar en forma resumida como

$$\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{a}_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \tag{1.13}$$

en donde m y n pueden tener cualquier valor x, y y z.

A continuación haremos una observación importante. Si el sistema de coordenadas cuenta solamente con dos ejes, x y y, entonces el sistema resulta inadecuado para expresar cualquier vector **A** en términos de las componentes en estos ejes. En este sistema sólo se expresan dos de las componentes del vector **A**. Por lo tanto, se necesita de un sistema de coordenadas completo para poder expresar a cualquier vector **A** en términos de sus componentes. En este caso deben existir tres ejes de coordenadas.

Una línea recta representa un espacio de una dimensión; un plano representa un espacio de dos dimensiones y nuestro universo, en general, es un espacio de tres dimensiones. Los conceptos desarrollados aquí son aplicables a un espacio de n dimensiones. Por supuesto que tal espacio físico no existe en la naturaleza; no obstante, existen muchos problemas análogos que conviene considerar como problemas de n dimensiones. Por ejemplo, una ecuación lineal con n variables independientes puede considerarse como vector expresado en términos de sus componentes con respecto a n coordenadas perpendiculares entre sí.

Si a los vectores unitarios a lo largo de estas n coordenadas mutuamente perpendiculares se les designa por $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ y si un vector **A** del espacio de n dimensiones tiene por componentes a $C_1, C_2 \ldots, C_n$, respectivamente, a lo largo de estas n coordenadas, entonces

$$\mathbf{A} = C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2 + C_3\mathbf{x}_3 + \cdots + C_n\mathbf{x}_n \tag{1.14}$$

Los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son todos ortogonales entre sí y el conjunto debe ser completo para que cualquier vector quede representado mediante la ecuación 1.14. La condición de ortogonalidad implica que el producto escalar de cualesquiera dos vectores $\mathbf{x}_n$ y $\mathbf{n}_m$ sea cero y que el producto escalar de cualquier vector consigo mismo sea la unidad. Esto constituye una consecuencia directa de la ecuación 1.13 y se puede expresar como

$$\mathbf{x}_m \cdot \mathbf{x}_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \tag{1.15}$$

Las constantes $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ de la ecuación 1.14 representan, respectivamente, las magnitudes de las componentes de **A** sobre los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_n$. Se deduce que

$$C_r = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_r \tag{1.16}$$

Se obtiene el mismo resultado al tomar el producto escalar en ambos miembros de la ecuación 1.14, con el vector $\mathbf{x}_r$. Obtenemos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_r = C_1\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_r + C_2\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_r + \cdots + C_r\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r + \cdots + C_n\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{x}_r \tag{1.17}$$

De la ecuación 1.15 se infiere que todos los términos de la forma $C_j\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_r$ $(j \neq r)$ del segundo miembro de la ecuación 1.17 son cero. Por lo tanto

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_r = C_r\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r = C_r \tag{1.18}$$

El conjunto de vectores $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n)$ se llama *espacio ortogonal de vectores* En general, el producto $\mathbf{x}_m \cdot \mathbf{x}_n$ puede ser igual a cualquier constante k_m diferente de la unidad. Cuando k_m es la unidad, el conjunto recibe el nombre de conjunto ortogonal normalizado, o espacio vectorial ortonormal. Por lo tanto, en general, para un espacio vectorial ortogonal $\{\mathbf{x}_r\} \cdot \cdot \cdot (r = 1, 2, \ldots, n)$ tenemos:

$$\mathbf{x}_m \cdot \mathbf{x}_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ k_m & m = n \end{cases} \tag{1.19}$$

En el caso de un espacio vectorial ortogonal, la ecuación 1.18 se transforma en:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_r = C_r\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r = C_r k_r$$

y

$$C_r = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_r}{k_r}$$

En resumen para un espacio vectorial ortogonal $\{\mathbf{x}_r\} \cdot \cdot \cdot (r = 1, 2 \ldots)$,

$$\mathbf{x}_m \cdot \mathbf{x}_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ k_m & m = n \end{cases} \tag{1.20}$$

Si este espacio vectorial es completo, entonces se puede expresar cualquier vector **F** como

$$\mathbf{F} = C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2 + \cdots + C_r\mathbf{x}_r + \cdots \tag{1.21}$$

en donde

$$C_r = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_r}{k_r} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_r}{\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r} \tag{1.22}$$

Espacio ortogonal de señales

A continuación, con el objeto de formarnos una idea intuitiva del análisis de señales, aplicaremos algunos conceptos del espacio vectorial. Se ha visto que cualquier vector puede expresarse como una suma de sus componentes contenidas en n vectores mutuamente ortogonales, siempre y cuando los vectores formen un sistema completo de coordenadas. Por consiguiente, es de esperarse que podamos expresar cualquier función $f(t)$ como suma de sus componentes a lo largo de un grupo o conjunto de funciones ortogonales entre sí, si forman un conjunto completo. A continuación se mostrará que éste es el caso.

Aproximación de una función mediante un grupo de funciones ortogonales entre sí

Consideremos un grupo o conjunto de n funciones $g_1(t)$, $g_2(t), \ldots,$ $g_n(t)$ ortogonales entre sí en el intervalo de t_1 a t_2; es decir

$$\int_{t_1}^{t_2} g_j(t) g_k(t)\, dt = 0 \qquad j \neq k \tag{1.23a}$$

y sea

$$\int_{t}^{t_2} g_j^2(t)\, dt = K_j \tag{1.23b}$$

Considérese ahora que la función arbitraria $f(t)$ se aproxima en el intervalo (t_1, t_2) mediante una combinación lineal de las n funciones mutuamente ortogonales.

$$f(t) \simeq C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \cdots + C_k g_k(t) + \cdots + C_n g_n(t)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_r g_r(t)$$

Para obtener la mejor aproximación, debemos encontrar los valores adecuados de las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que ϵ el valor cuadrático medio de $f_e(t)$ sea mínimo.

Por definición,

$$f_e(t) = f(t) - \sum_{r=1}^{n} C_r g_r(t)$$

y

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^{n} C_r g_r(t) \right]^2 dt \tag{1.24}$$

Por la ecuación 1.24, es evidente que ϵ es función de $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Para reducir al mínimo ϵ, debemos tener que

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_1} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_2} = \cdots = \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_j} = \cdots = \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_n} = 0$$

Consideremos la ecuación:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_j} = 0 \tag{1.25}$$

Ya que $(t_2 - t_1)$ es constante, se puede expresar la ecuación 1.25 como

$$\frac{\partial}{\partial C_j} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^{n} C_r g_r(t) \right]^2 dt \right\} = 0 \tag{1.26}$$

Al desarrollar el integrando, vemos que todos los términos que proceden del producto vectorial de las funciones ortogonales valen cero, en virtud de la ortogonalidad; es decir, todos los términos de la forma $\int g_j(t) g_k(t) dt$ son cero, como se expresa en la ecuación 1.23. De la misma manera, la derivada con respecto a C_j, de todos los términos que no contienen a C_j, vale cero, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial C_j} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\, dt = \frac{\partial}{\partial C_j} \int_{t_1}^{t_2} C_r^2 g_r^2(t)\, dt = \frac{\partial}{\partial C_j} \int_{t_1}^{t_2} C_r f(t) g_r(t)\, dt = 0$$

Esto nos deja con solamente dos términos en la ecuación 1.26:

$$\frac{\partial}{\partial C_j} \int_{t_1}^{t_2} [-2 C_j f(t) g_j(t) + C_j^2 g_j^2(t)]\, dt = 0 \tag{1.27}$$

Si cambiamos el orden de diferenciación e integración en la ecuación 1.27, obtenemos

$$2 \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_j(t)\, dt = 2 C_j \int_{t_1}^{t_2} g_j^2(t)\, dt$$

por lo tanto,

$$C_j = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_j(t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_j^2(t)\, dt} \tag{1.28a}$$

$$= \frac{1}{K_j} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_j(t)\, dt \tag{1.28b}$$

En resumen, dado un grupo de n funciones $g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)$ mutuamente ortogonales en el intervalo (t_1, t_2), nos podemos aproximar a una

función arbitraria $f(t)$ en dicho intervalo mediante una combinación lineal de las n funciones.

$$f(t) \simeq C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \cdots + C_n g_n(t)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_r g_r(t) \tag{1.29}$$

Para tener la mejor aproximación, con la cual se reduce al mínimo el valor cuadrático medio del error en el intervalo, debemos calcular los coeficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, etc., dados por la ecuación 1.28

Determinación del error cuadrático medio

Ahora, se encontrará el valor de ϵ cuando se escogen valores óptimos de $C_1, C_2, \ldots, C_n$, de acuerdo con la ecuación 1.28. Por definición,

$$\varepsilon = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^{n} C_r g_r(t) \right]^2 dt$$

$$= \frac{1}{(t_2 - t_1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\, dt + \sum_{r=1}^{n} C_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)\, dt - 2 \sum_{r=1}^{n} C_r \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t)\, dt \right] \tag{1.30}$$

Pero de las ecuaciones 1.28a y 1.28b se deduce que

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t)\, dt = C_r \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)\, dt = C_r K_r \tag{1.31}$$

Al substituir la ecuación 1.31 en la ecuación 1.30, obtenemos

$$\varepsilon = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\, dt + \sum_{r=1}^{n} C_r^2 K_r - 2 \sum_{r=1}^{n} C_r^2 K_r \right]$$

$$= \frac{1}{(t_2 - t_1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\, dt - \sum_{r=1}^{n} C_r^2 K_r \right] \tag{1.32}$$

$$= \frac{1}{(t_2 - t_1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\, dt - (C_1^2 K_1 + C_2^2 K_2 + \cdots + C_n^2 K_n) \right] \tag{1.33}$$

Se puede por lo tanto, determinar el error cuadrático medio por medio de la ecuación 1.33.

Representación de una función mediante un grupo completo o cerrado de funciones ortogonales entre sí

Es evidente, por la ecuación 1.33, que si n se incrementa es decir, si nos aproximamos a $f(t)$ mediante un número mayor de funciones ortogonales, el error habrá de disminuir. Por la manera en que se ha definido, ϵ es una cantidad positiva; por lo tanto, en el límite, cuando el número de términos se vuelve infinito, la suma $\sum_{r=1}^{\infty} C_r^2 K_r$ converge a la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\, dt$$

y entonces ϵ se anula. Así,

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\, dt = \sum_{r=1}^{\infty} C_r^2 K_r \tag{1.34}$$

En esas condiciones, $f(t)$ queda representada por la serie infinita:

$$f(t) = C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \cdots + C_r g_r(t) + \cdots$$

La serie infinita del segundo miembro de la ecuación 1.34 converge a $f(t)$ de manera que el valor medio del cuadrado del error es cero. Se dice que la serie *converge al valor medio.* Nótese que, aquí, la representación de $f(t)$ es exacta.

Se dice que un conjunto de funciones $g_1(t), g_2(t), \ldots, g_r(t)$ mutuamente ortogonales en el intervalo (t_1, t_2) es completo o cerrado cuanto no existe una función $x(t)$ para la cual se cumpla que:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_k(t)\, dt = 0 \qquad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Si se puede encontrar una función $x(t)$ tal que la integral anterior se anule, entonces, evidentemente, $x(t)$ es ortogonal a cada uno de los miembros del conjunto $\{g_r(t)\}$ y, en consecuencia, forma parte del conjunto. Es obvio que el conjunto no es completo si $x(t)$ no pertenece a él.

Ahora conviene resumir los resultados. Para un conjunto $\{g_r(t)\}$, $(r = 1,2, \ldots)$ mutuamente ortogonal en el intervalo (t_1, t_2),

$$\int_{t_1}^{t_2} g_m(t) g_n(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ K_m & \text{si} \quad m = n \end{cases} \tag{1.35}$$

Si este conjunto de funciones es completo, entonces se puede expresar cualquier función $f(t)$ como

$$f(t) = C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \cdots + C_r g_r(t) + \cdots \tag{1.36}$$

en donde

$$C_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t)\, dt}{K_r} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)\, dt} \tag{1.37}$$

Al comparar las ecuaciones de la 1.35 a la 1.37 con las ecuaciones de la 1.20 a la 1.22 se manifiesta la analogía entre vectores y señales. Cualquier

vector se puede expresar como la suma de sus componentes a lo largo de n vectores ortogonales unos a otros siempre y cuando formen un conjunto completo. Además, se puede expresar cualquier función $f(t)$ como una suma de sus componentes a lo largo de funciones mutuamente ortogonales, siempre y cuando formen un conjunto completo o cerrado.

En la comparación de vectores y señales, el producto escalar de dos vectores es análogo a la integral del producto de dos señales, es decir

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \sim \int_{t_1}^{t_2} f_A(t) f_B(t)\, dt$$

De eso se desprende que el cuadrado de la magnitud A de un vector $\mathbf{A}$ es análogo a la integral del cuadrado de una función, es decir,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 \sim \int_{t_1}^{t_2} f_A{}^2(t)\, dt$$

Si se expresa un vector en términos de sus componentes mutuamente ortogonales, el cuadrado de la magnitud está dado por la suma de los cuadrados de las magnitudes de los vectores componentes. Para las señales, también se tiene un resultado análogo, que se expresa con precisión en la ecuación 1.34 (teorema de Parseval). Puesto que las funciones componentes no son ortonormales, el segundo miembro es $\Sigma\, C_r{}^2 K_r{}^2$ en lugar de $\Sigma\, C_r{}^2$. En un conjunto ortonormal, $K_r = 1$. Así la ecuación 1.34 es análoga al caso en que se expresa un vector en términos de sus componentes a lo largo de vectores mutuamente ortogonales cuyas magnitudes cuadradas son K_1, $K_2, \ldots, K_r, \ldots$, etc.

La ecuación 1.36 nos muestra que $f(t)$ contiene una componente de señal $g_r(t)$ con magnitud C_r. La representación de $f(t)$ mediante un conjunto infinito de funciones mutuamente ortogonales se conoce como *representación generalizada de f(t) en serie de Fourier.*

Ejemplo 1.2

Consideraremos de nuevo la función rectangular del ejemplo 1.1 que se muestra en la figura 1.3. Se hizo una aproximación a esta función mediante una sola función sen t. Aquí veremos que se obtiene una aproximación mejor cuando se emplea un gran número de funciones mutuamente ortogonales. Vimos antes que las funciones sen $n\omega_0 t$ y sen $\omega_0 t$ son mutuamente ortogonales en el intervalo $(t_0,\ t_0 + 2\pi/\omega_0)$ para todos los valores enteros de n y m. Por lo tanto, se deduce que un conjunto de funciones sen t, sen $2t$, sen $3t$, etc., es mutuamente ortogonal en el intervalo $(0, 2\pi)$. A continuación se hará una aproximación a la función rectangular de la figura 1.3 mediante una serie finita de funciones sinusoidales

$$f(t) \simeq C_1 \text{ sen } t + C_2 \text{ sen } 2t + \cdots + C_n \text{ sen } nt$$

Se pueden determinar las constantes C_r mediante la ecuación 1.28.

$$C_r = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \text{ sen } rt\, dt}{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2\, rt\, dt}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \text{sen } rt\, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } rt\, dt\right)$$

$$= \frac{4}{\pi r} \qquad \text{si } r \text{ es impar}$$

$$= 0 \qquad \text{si } r \text{ es par}$$

Así, $f(t)$ queda aproximada por

$$f(t) = \frac{4}{\pi}(\text{sen } t + \tfrac{1}{3} \text{ sen } 3t + \tfrac{1}{5} \text{ sen } 5t + \tfrac{1}{7} \text{ sen } 7t + \cdots) \qquad (1.38)$$

La figura 1.6 nos muestra la función real y la función aproximada cuando se hace la aproximación con uno, dos, tres y cuatro términos, respectivamente, en la ecuación 1.38. Para el número dado en términos de la forma sen rt, se tiene que constituyen las aproximaciones óptimas que reducen al mínimo al error cuadrático medio. A medida que se incrementa el número de términos, la aproximación es mejor y disminuye el error cuadrático medio. Para un número infinito de términos el error cuadrático medio es cero.*

Determinemos ahora el error ϵ en estas aproximaciones. De la ecuación 1.33,

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_2}^{t_2} f^2(t)\, dt - C_1{}^2 K_1 - C_2{}^2 K_2 - \cdots\right]$$

En este caso

$$(t_2 - t_1) = 2\pi$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t < \pi) \\ -1, & (\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)\, dt = 2\pi$$

Además,

$$C_r = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi r} & \text{si } r \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$$

y

$$K_r = \int_0^{2\pi} \text{sen}^2\, rt\, dt = \pi$$

* La serie de Fourier no converge en los puntos de discontinuidad y por lo tanto, aunque el número de términos aumente, la función aproximada tiene muchas ondulaciones en los puntos de discontinuidad. Esto se conoce como *fenómeno de Gibbs.*

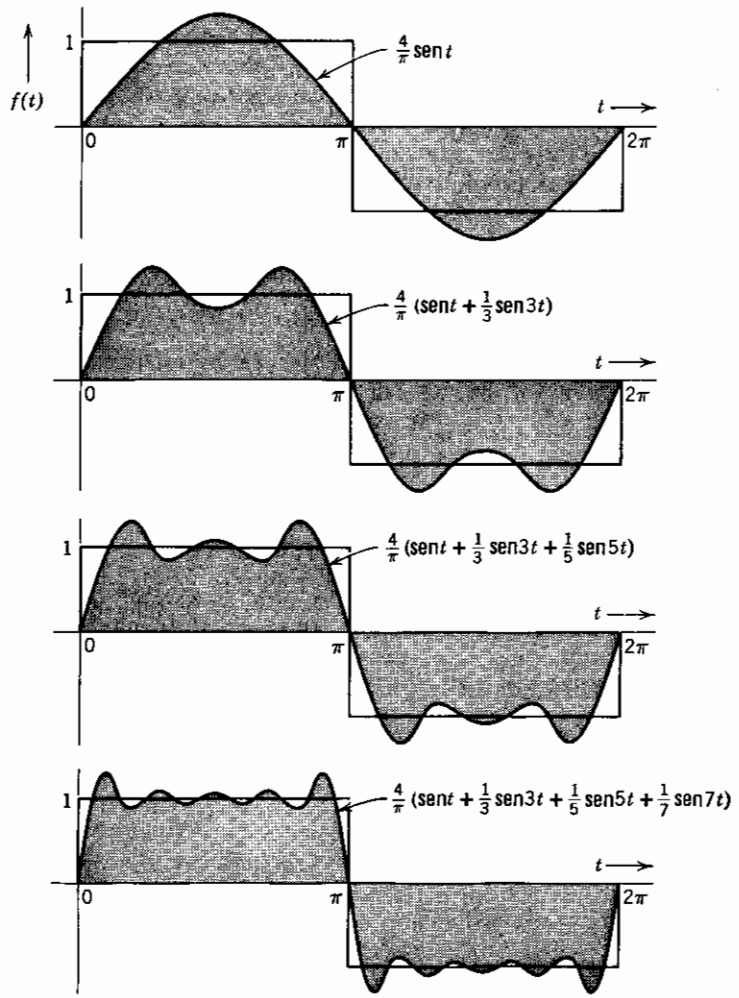


Figura 1.6 Aproximación a una función rectangular mediante funciones ortogonales.

Por lo tanto, en la aproximación de un término,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \pi\right] = 0.19$$

En la aproximación de dos términos

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \pi - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \pi\right] = 0.1$$

En la aproximación de tres términos,

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \pi - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \pi - \left(\frac{4}{5\pi}\right)^2 \pi\right] = 0.0675$$

y

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \pi - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \pi - \left(\frac{4}{5\pi}\right)^2 \pi - \left(\frac{4}{7\pi}\right)^2 \pi\right] = 0.051$$

y así sucesivamente.

Se ve fácilmente que, en este caso, el error cuadrático medio disminuye rápidamente a medida que aumenta el número de términos.

La ortogonalidad en funciones complejas

En la discusión anterior, solamente consideramos funciones reales de variables reales. Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones complejas de variable real t, entonces se puede demostrar que $f_1(t)$ queda aproximada mediante $C_{12}f_2(t)$ en el intervalo (t_1, t_2).

$$f_1(t) \simeq C_{12}f_2(t)$$

El valor óptimo de C_{12} que reduce al mínimo la magnitud del error cuadrático medio está dado por†

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)f_2^*(t)\,dt} \tag{1.39}$$

cuando $f_2^*(t)$ es el complejo conjugado de $f_2(t)$

En la ecuación 1.39, es evidente que dos funciones complejas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ serán ortogonales en el intervalo (t_1, t_2) si

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t)f_2(t)\,dt = 0 \tag{1.40}$$

Para un conjunto de funciones complejas $\{g_r(t)\}$, $(r = 1, 2, \ldots)$ mutuamente ortogonales en el intervalo (t_1, t_2):

$$\int_{t_1}^{t_2} g_m(t)g_n^*(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ K_m & \text{si } m = n \end{cases} \tag{1.41}$$

Si este grupo de funciones es completo, entonces cualquier función $f(t)$ se puede expresar como

$$f(t) = C_1g_1(t) + C_2g_2(t) + \cdots + C_rg_r(t) + \cdots \tag{1.42}$$

en donde

$$C_r = \frac{1}{K_r}\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_r^*(t)\,dt \tag{1.43}$$

† Véase, por ejemplo, S. Mason y H. Zimmerman, *Electronic Circuits*, Signals and Systems, pp. 199-200, John Wiley and Sons, New York, 1960.

Si el conjunto de funciones es real, entonces $g_r^*(t) = g_r(t)$ y todos los resultados para las funciones complejas se reducen a los que se obtuvieron para funciones reales en las ecuaciones de la 1.35 a la 1.37.

1.2 ALGUNOS EJEMPLOS DE FUNCIONES ORTOGONALES

A la representación de una función en un determinado intervalo mediante una combinación lineal de funciones mutuamente ortogonales se le llama representación de una función en serie de Fourier. Existe, sin embargo, un gran número de conjuntos de funciones ortogonales y, por consiguiente, se puede representar una función dada en términos de diferentes conjuntos de funciones ortogonales. En un espacio vectorial, esto es análogo a la representación de un vector dado en diferentes conjuntos de sistemas de coordenadas. Cada conjunto de funciones ortogonales corresponde a un sistema de coordenadas. Algunos de los ejemplos de conjuntos de funciones ortogonales son las funciones trigonométricas, las funciones exponenciales, los polinomios de Legendre y los polinomios de Jacobi. Las funciones Bessel también constituyen un tipo especial de funciones ortogonales.†

La serie de Legendre Fourier

Un grupo de polinomios de Legendre $P_n(x)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ forma un conjunto completo de funciones mutuamente ortogonales en el intervalo $(-1 < t < 1)$. Se pueden definir estos polinomios por medio de la fórmula de Rodrigues:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Se deduce de esta ecuación que

$$P_0(t) = 1 \qquad P_1(t) = t$$
$$P_2(t) = (\tfrac{3}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}) \qquad P_3(t) = (\tfrac{5}{2}t^3 - \tfrac{3}{2}t)$$

y así sucesivamente

Podemos verificar la ortogonalidad de estos polinomios si demostramos que

$$\int_{-1}^{1} P_m(t) P_n(t)\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2m+1} & m = n \end{cases} \qquad (1.44)$$

† Las funciones de Bessel son ortogonales con respecto a la función de ponderación. Véase, por ejemplo, W. Kaplan, *Advanced Calculus,* Addison Wesley, Reading, Mass., 1953.

Expresamos una función $f(t)$ en términos de un polinomio de Legendre en el intervalo $(-1 < t < 1)$ como

$$f(t) = C_0 P_0(t) + C_1 P_1(t) + \cdots + \cdots$$

en donde

$$C_r = \frac{\int_{-1}^{1} f(t) P_r(t)\, dt}{\int_{-1}^{1} P_r^2(t)\, dt} = \frac{2r+1}{2} \int_{-1}^{1} f(t) P_r(t)\, dt \qquad (1.45)$$

Nótese que, aunque la representación en serie es válida en la región de -1 a 1, se le puede extender a cualquier región mediante el cambio adecuado de variable.

Ejemplo 1.3

Consideremos la función rectangular de la figura 1.7. Esta función se puede representar mediante la serie de Legendre Fourier:

$$f(t) = C_0 P_0(t) + C_1 P_1(t) + \cdots + C_r P_r(t) + \cdots$$

Los coeficientes C_0, C_1, $C_2, \ldots$, C_r etc., se pueden encontrar a partir de la ecuación 1.45. Tenemos que

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (-1 < t < 0) \\ -1 & (0 < t < 1) \end{cases}$$

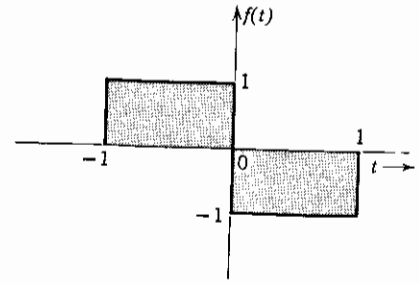


Figura 1.7

y

$$C_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(t)\, dt = 0$$

$$C_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} t f(t)\, dt$$

$$= \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{0} t\,dt - \int_{1}^{0} t\,dt\right)$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$$C_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)dt$$

$$= \frac{5}{2}\left[\int_{-1}^{0} \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\,dt + \int_{0}^{1} -\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)dt\right]$$

$$= 0$$

En general, se puede demostrar que para valores pares de r,

$$C_r = 0$$

es decir,

$$C_0 = C_2 = C_4 = C_6 = \cdots = 0$$

$$C_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right)dt$$

$$= \frac{7}{2}\left[\int_{-1}^{0} \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\,dt + \int_{0}^{1} -\left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right)\right]dt$$

$$= \frac{7}{8}$$

De igual manera se pueden determinar los coeficientes C_5, C_7, . . . , etc., Tenemos aquí que

$$f(t) = -\tfrac{3}{2}t + \tfrac{7}{8}(\tfrac{5}{2}t^3 - \tfrac{3}{2}t) + \cdots$$

La serie trigonométrica de Fourier

Ya hemos demostrado que las funciones sen $\omega_0 t$, sen $2\omega_0 t$, etc., forman un conjunto ortogonal en cualquier intervalo $(t_0,\ t_0 + 2\pi/\omega_0)$. Este conjunto, sin embargo, no es completo. Esto lo evidencia el hecho de que una función cos $n\omega_0 t$ es ortogonal a sen $m\omega_0 t$ en el mismo intervalo. Consecuentemente para completar el conjunto, debemos agregar funciones coseno así como funciones seno. Se puede demostrar que el conjunto de funciones que consta de un grupo cos $n\omega_0 t$ y otro sen $n\omega_0 t$ $(n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ forma un conjunto ortogonal completo. Nótese que, para $n = 0$, sen $n\omega_0 t$ es cero, pero cos $n\omega_0 t = 1$. Es así como tenemos un conjunto ortogonal completo, representado por las funciones 1, cos $\omega_0 t$, cos $2\omega_0 t$, . . . , cos $n\omega_0 t$ . . . ; sen $\omega_0 t$, sen $2\omega_0 t$, . . . , sen $n\omega_0 t$, . . . , etc. Se deduce que cualquier función $f(t)$ puede representarse en términos de estas funciones en cualquier intervalo $(t_0,\ t_0 + 2\pi/\omega_0)$. Así,

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \cdots + a_n \cos n\omega_0 t + \cdots$$
$$+ b_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega_0 t + \cdots + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t + \cdots$$
$$(t_0 < t < t_0 + 2\pi/\omega_0)$$

Denotaremos, por conveniencia, $2\pi/\omega_0$ por T. La ecuación anterior queda entonces como

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \qquad (t_0 < t < t_0 + T) \tag{1.46}$$

La ecuación 1.46 es la representación de $f(t)$ por medio de la serie trigonométrica de Fourier en el intervalo $(t_0,\ t_0 + T)$. Las constantes a_n y b_n están dadas por

$$a_n = \frac{\int_{t_0}^{(t_0+T)} f(t) \cos n\omega_0 t\,dt}{\int_{t_0}^{(t_0+T)} \cos^2 n\omega_0 t\,dt} \tag{1.47a}$$

y

$$b_n = \frac{\int_{t_0}^{(t_0+T)} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt}{\int_{t_0}^{(t_0+T)} \operatorname{sen}^2 n\omega_0 t\,dt} \tag{1.47b}$$

Si ponemos $n = 0$ en la ecuación 1.47a, obtenemos

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{(t_0+T)} f(t)\,dt \tag{1.48a}$$

También tenemos que

$$\int_{t_0}^{(t_0+T)} \cos^2 n\omega_0 t\,dt = \int_{t_0}^{(t_0+T)} \operatorname{sen}^2 n\omega_0 t\,dt = \frac{T}{2}$$

Por consiguiente,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{(t_0+T)} f(t) \cos n\omega_0 t\,dt \tag{1.48b}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{(t_0+T)} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt \tag{1.48c}$$

El término constante a_0 en la serie está dado por la ecuación 1.48a. Es evidente que a_0 es el valor promedio de $f(t)$ en el intervalo $(t_0,\ t_0 + T)$. Así, a_0 es la componente de corriente directa de $f(t)$ en este intervalo.

La serie trigonométrica (ecuación 1.46) tiene la siguiente representación compacta:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos (n\omega_0 t + \varphi_n) \tag{1.49}$$

en donde

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{1.50}$$

y $\quad \varphi_n = -\tan^{-1} (b_n/a_n).$

Ejemplo 1.4

Vamos a desarrollar la función $f(t)$ de la figura 1.8a mediante una serie trigonométrica de Fourier en el intervalo (0,1). Desde luego, $f(t) = At$ $(0 < t < 1)$, el intervalo $T = 1$, y $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi$. Debemos escoger $t_0 = 0$. Así

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos 2\pi t + a_2 \cos 4\pi t + \cdots + a_n \cos 2\pi nt + \cdots + b_1 \operatorname{sen} 2\pi t + b_2 \operatorname{sen} 4\pi t + \cdots + b_n \operatorname{sen} 2\pi nt + \cdots \quad (1.51)$$

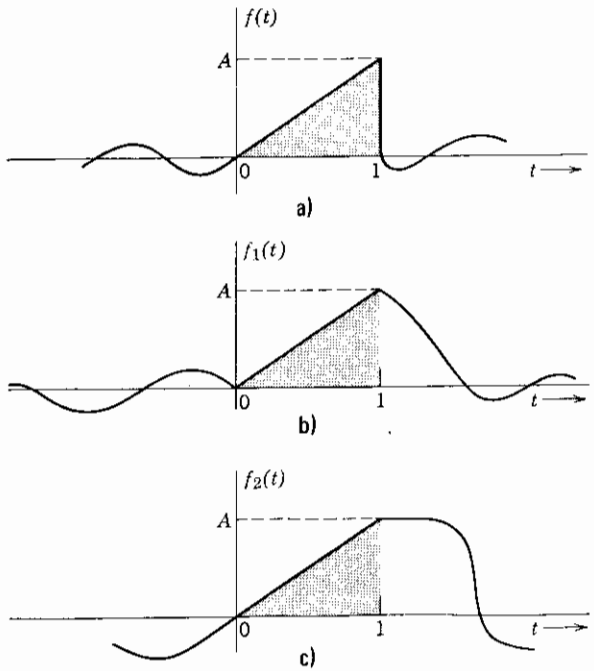


Figura 1.8

Se determinan los diversos coeficientes de la serie en la ecuación 1.51, empleando las ecuaciones de la 1.48a a la 1.48c.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = 1\int_0^1 At\,dt = \frac{A}{2} \quad (1.52a)$$

De la misma manera,

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 At \cos 2\pi nt\,dt$$

$$= \frac{A}{2\pi^2 n^2}\left[\cos 2\pi nt + 2\pi nt \operatorname{sen} 2\pi nt\right]_0^1 = 0 \quad (1.52b)$$

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 At \operatorname{sen} 2\pi nt\,dt$$

$$= \frac{A}{2\pi^2 n^2}\left[\operatorname{sen} 2\pi nt - 2\pi nt \cos 2\pi nt\right]_0^1 = \frac{-A}{\pi n} \quad (1.52c)$$

Como $a_n = 0$ para todos los valores de n, todos los términos coseno de la ecuación 1.51 son cero. Los coeficientes de los términos seno están dados por la ecuación 1.52c. La serie de la ecuación 1.51 queda expresada como

$$f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\operatorname{sen} 2\pi t - \frac{A}{2\pi}\operatorname{sen} 4\pi t - \frac{A}{3\pi}\operatorname{sen} 6\pi t - \cdots - \frac{A}{n\pi}\operatorname{sen} 2\pi nt - \cdots \quad (0 < t < 1)$$

$$= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} 2\pi nt}{n} \quad (0 < t < 1) \quad (1.53)$$

En esta forma, hemos expresado $f(t)$ en términos de sus componentes en el intervalo (0, 1). De la ecuación 1.53 se desprende que $f(t)$ tiene una componente de corriente directa de valor $A/2$. Además, $f(t)$ tiene componentes de funciones sinusoidales sen $2\pi t$, sen $4\pi t$, etc., con magnitudes $-A/\pi$, $-A/2\pi$, etc., respectivamente.

Conviene observar que la serie de la ecuación 1.51 representará también cualquier otra función que sea idéntica a $f(t)$ en el intervalo (0, 1). Es decir, las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ de las figuras 1.8b y 1.8c son idénticas a $f(t)$ en el intervalo (0, 1) y, por consiguiente, se pueden representar ambas funciones en el intervalo (0, 1) mediante la serie de la ecuación 1.53.

Serie exponencial de Fourier

Se puede demostrar fácilmente que el conjunto de funciones exponenciales $\{e^{jn\omega_0 t}\}$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ es ortogonal en el intervalo $(t_0, t_0 + 2\pi/\omega_0)$ para cualquier valor de t_0. Nótese que éste es un conjunto de funciones complejas. Podemos demostrar su ortogonalidad, considerando la integral

$$I = \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} (e^{jn\omega_0 t})(e^{jm\omega_0 t})^*\,dt = \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} e^{jn\omega_0 t}e^{-jm\omega_0 t}\,dt$$

si $n = m$, la integral I está dada por

$$I = \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} dt = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

si $n \neq m$, la integral I está dada por

$$I = \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t}\Big|_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0}$$

$$= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_0}\left[e^{j2\pi(n-m)} - 1\right]$$

Puesto que m y n son enteros, $e^{j2\pi(n-m)}$ es igual a la unidad y, en consecuencia, la integral vale cero:

$$I = 0$$

Así,

$$\int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} e^{jn\omega_0 t}(e^{jn\omega_0 t})^* \, dt = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\omega_0} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \tag{1.54}$$

Como antes, sea

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = T$$

De la ecuación 1.54, es evidente que el conjunto de funciones

$$\{e^{jn\omega_0 t}\} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

es ortogonal en el intervalo $(t_0, t_0 + T)$, en donde $T = 2\pi/\omega_0$. Además, se puede demostrar que éste es un conjunto completo. Por lo tanto, es posible representar cualquier función $f(t)$ mediante una combinación lineal de funciones exponenciales en el intervalo $(t_0, t_0 + T)$:

$$f(t) = F_0 + F_1 e^{j\omega_0 t} + F_2 e^{j2\omega_0 t} + \cdots + F_n e^{jn\omega_0 t} + \cdots + F_{-1} e^{-j\omega_0 t} + F_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + \cdots + F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \cdots$$

para

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (t_0 < t < t_0 + T) \tag{1.55}$$

en donde $\omega_0 = 2\pi/T$ y la suma en la ecuación 1.55 es para valores enteros de n desde $-\infty$ hasta ∞, sin excluir el cero. A la representación de $f(t)$ mediante la serie exponencial, como se muestra en la ecuación 1.55, se le conoce como representación de $f(t)$ mediante la serie exponencial de Fourier en el intervalo $(t_0, t_0 + T)$. Los diferentes coeficientes de la serie se determinan con la ecuación 1.43

$$F_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)(e^{jn\omega_0 t})^* \, dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jn\omega_0 t}(e^{jn\omega_0 t})^* \, dt}$$

$$= \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega t_0} \, dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jn\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t} \, dt}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t} \, dt \tag{1.56}$$

También se pudo haber obtenido directamente el resultado al multiplicar ambos miembros de la ecuación 1.55 por $e^{-jn\omega_0 t}$ e integrar con respecto a t en el intervalo $(t_0, t_0 + T)$. En virtud de la ortogonalidad, se anulan todos los términos del segundo miembro con la salvedad de uno, y se obtiene la expresión de F_n de la ecuación 1.56

Resumamos los resultados: Se puede expresar cualquier función $f(t)$ dada como suma discreta de funciones exponenciales $\{e^{jn\omega_0 t}\}$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ en el intervalo $t_0 < t < t_0 + T$, $(\omega_0 = 2\pi/T)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (t_0 < t < t_0 + T) \tag{1.57}$$

en donde

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t} \, dt \tag{1.58}$$

Obsérvese que las series exponencial y trigonométrica de Fourier no son dos tipos diferentes de series, sino dos formas distintas de expresar la misma serie. Se pueden obtener los coeficientes de una de las series a partir de los de la otra. Esto se demuestra por medio de las ecuaciones 1.48 y 1.58. De estas ecuaciones se deduce que

$$\begin{aligned} a_0 &= F_0 \\ a_n &= F_n + F_{-n} \\ b_n &= j(F_n - F_{-n}) \end{aligned} \tag{1.59}$$

y

$$F_n = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

Para ilustrar esto considérese la función $f(t)$ del ejemplo 1.4. Se ha representado esta función por medio de una serie trigonométrica de Fourier (ecuación 1.53). También se le puede representar como serie exponencial de Fourier empleando las ecuaciones 1.57 y 1.58. También podemos utilizar la ecuación 1.59 para obtener los coeficientes de la serie exponencial a partir de los de la serie trigonométrica. Si substituimos las ecuaciones 1.52 en la ecuación 1.59, obtenemos

$$F_0 = \frac{A}{2} \qquad \text{y} \qquad F_n = \frac{jA}{2\pi n} \tag{1.60a}$$

en consecuencia

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{jA}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{jn2\pi t} \tag{1.60b}$$

1.3 REPRESENTACION DE UNA FUNCION PERIODICA MEDIANTE LA SERIE DE FOURIER EN TODO EL INTERVALO $(-\infty < t < \infty)$

Hasta aquí, hemos representado una función $f(t)$ como serie de Fourier en un intervalo finito $(t_0, t_0 + T)$. Fuera del intervalo, la función $f(t)$ y la

serie de Fourier correspondiente no son necesariamente iguales. Sin embargo, si la función $f(t)$ es periódica, se puede demostrar que su representación en serie se aplica a todo el intervalo $(-\infty, \infty)$. Esto se demuestra fácilmente si se toma una función $f(t)$ y su representación en serie exponencial de Fourier en el intervalo $(t_0, t_0 + T)$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \tag{1.61}$$

La igualdad es válida en el intervalo $(t_0, t_0 + T)$. Los dos miembros de la ecuación 1.61 no son necesariamente iguales fuera del intervalo. Es fácil ver, sin embargo, que el segundo miembro de la ecuación 1.61 es periódico (con período $T = 2\pi/\omega_0$). Esto se deduce de que

$$e^{jn\omega_0 t} = e^{jn\omega_0(t+T)} \qquad \text{para} \quad T = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Por lo tanto, es obvio que, si $f(t)$ es periódica con período T, entonces la igualdad de la ecuación 1.61 es válida en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$. Así, para una función periódica $f(t)$,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

en donde

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

Nótese que la elección de t_0 es indiferente.

Ejemplo 1.5

Considérese la onda seno rectificada de la figura 1.9. En esta función,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \begin{cases} \omega_0 = 2\pi \\ T = 1 \end{cases}$$

$$F_n = A\int_0^1 \operatorname{sen} \pi t e^{-j2\pi nt}\,dt$$

$$= \frac{-2A}{\pi(4n^2 - 1)}$$

Por lo tanto,

$$f(t) = \frac{-2A}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{j2\pi nt} \tag{1.62}$$

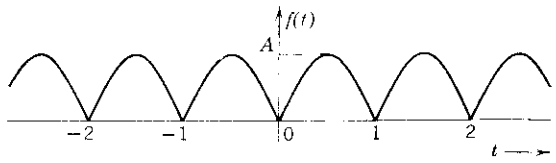


Figura 1.9 Onda seno rectificada.

1.4 EL ESPECTRO COMPLEJO DE FOURIER

El desarrollo en serie de Fourier de una función periódica equivale realmente a la transformación de la función en términos de sus componentes de diferentes frecuencias. Una función periódica con período T tiene componentes de frecuencias angulares ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0, \ldots$, $n\omega_0$, etc., en donde $\omega_0 = 2\pi/T$. Si se especifica $f(t)$, se puede encontrar su espectro. Inversamente, si se conoce el espectro, se puede encontrar la función periódica $f(t)$ correspondiente. Por lo tanto, tenemos dos maneras de especificar a la función $f(t)$: la representación en el dominio del tiempo, con la cual $f(t)$ se expresa como función del tiempo, y la representación en el dominio de la frecuencia, con la cual se especifica el espectro (es decir, las amplitudes de las diferentes componentes de frecuencia). Nótese que el espectro existe únicamente en $\omega = \omega_0$, $2\omega_0$, $3\omega_0, \ldots$, etc. Así, el espectro no es una curva continua, sino que existe solamente en algunos valores discretos de ω. Por consiguiente es un *espectro discreto* y a veces se le llama *espectro de líneas.* Se puede representar gráficamente al espectro al trazar líneas verticales en $\omega = \omega_0$, $2\omega_0, \ldots$, etc., con alturas proporcionales a la amplitud de la componente correspondiente de frecuencia. Así, en una gráfica, el espectro de frecuencias discreto aparece como una serie de líneas verticales igualmente espaciadas, con alturas proporcionales a la amplitud de la componente correspondiente de frecuencia.

Se puede utilizar cualquiera de las dos series, la trigonométrica o la exponencial, para representar el espectro. Sin embargo, para nuestros fines, resulta más útil la forma exponencial. En esta serie la función periódica se expresa como suma de funciones exponenciales de frecuencia $0, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \ldots$, etc. No es difícil entender el significado de las frecuencias negativas. Las dos señales $e^{j\omega t}$ y $e^{-j\omega t}$ oscilan a la frecuencia ω. Sin embargo, se les puede ver como dos fasores que giran en direcciones opuestas y que, cuando se suman, producen una función real del tiempo. Así,

$$e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2\cos \omega t$$

En una función periódica de período T, la serie exponencial está dada por

$$f(t) = F_0 + F_1 e^{j\omega_0 t} + F_2 {}^{j2\omega_0 t} + \cdots + F_n e^{jn\omega_0 t} + \cdots$$
$$+ F_{-1} e^{-j\omega_0 t} + F_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + \cdots + F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \cdots$$

Por consiguiente, tenemos las frecuencias 0, ω_0, $-\omega_0$, $2\omega_0$, $-2\omega_0, \ldots$, $n\omega_0$, $-n\omega_0, \ldots$, etc., y las amplitudes de las componentes son respectivamente $F_0, F_1, F_{-1}, F_2, F_{-2}, \ldots, F_n, F_{-n}, \ldots$, etc.

Las amplitudes F_n suelen ser complejas y, por lo tanto, se les describe por su magnitud y fase. Por consiguiente, en general, se requiere de dos espectros para la representación de una función periódica en el dominio de la frecuencia: el *espectro de magnitud* y el *espectro de fase;* sin embargo, en la mayoría de los casos, las amplitudes de las componentes de frecuencia son o bien reales o imaginarias, de modo que se puede describir la función mediante un solo espectro.

Considérese la función periódica del ejemplo 1.5 (figura 1.9). Se encontró que la serie exponencial de Fourier para esta onda seno rectificada es (ecuación 1.62):

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{2A}{3\pi}e^{j2\pi t} - \frac{2A}{15\pi}e^{j4\pi t} - \frac{2A}{35\pi}e^{j6\pi t} - \cdots$$
$$- \frac{2A}{3\pi}e^{-j2\pi t} - \frac{2A}{15\pi}e^{-j4\pi t} - \frac{2A}{35\pi}e^{-j6\pi t} - \cdots$$

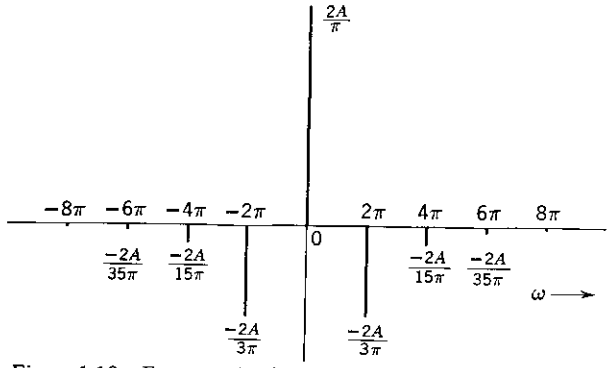


Figura 1.10 Espectro de línea de una onda seno rectificada.

El espectro existe en $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$, etc., y las magnitudes correspondientes son $2A/\pi$, $-2A/3\pi$, $-2A/15\pi$, $-2A/35\pi, \ldots$, etc. Nótese que todas las amplitudes son reales y, por eso, sólo es necesario dibujar un espectro. Este espectro se muestra en la figura 1.10. Se ve en esta figura que el espectro es evidentemente simétrico con respecto al eje vertical que pasa por el origen. A continuación se demuestra que el espectro de magnitud de cualquier función periódica es simétrico con respecto al eje vertical que pasa por el origen. El coeficiente F_n está dado por

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

y

$$F_{-n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{jn\omega_0 t}\,dt$$

Estas ecuaciones nos indican claramente que los coeficientes F_n y F_{-n} son complejos conjugados, es decir, que

$$F_{-n} = F_n^* \text{ en consecuencia, } |F_n| = |F_{-n}|$$

Se infiere, por lo tanto, que el espectro de magnitud es simétrico con respecto al eje vertical que pasa por el origen y, por consiguiente, es función par de ω.

Si F_n es real, entonces F_{-n} también lo es y F_n es igual a F_{-n}. Si F_n es complejo, sea

$$F_n = |F_n|\,e^{j\theta_n} \tag{1.63a}$$

entonces

$$F_{-n} = |F_n|\,e^{-j\theta_n} \tag{1.63b}$$

La fase de F_n es θ_n; sin embargo, la fase de F_{-n} es $-\theta_n$. Por lo tanto, es obvio que el espectro de fase es asimétrico (función impar) y el espectro de magnitud es simétrico (función par) con respecto al eje vertical que pasa por el origen.

Ejemplo 1.6

Desarróllese la función rectangular periódica de la figura 1.11 como serie exponencial de Fourier y dibújese el espectro de frecuencia.

Solución. La función rectangular tiene duración δ y se repite cada T segundos. Podemos describir analíticamente la función en un período de la manera siguiente:

$$f(t) = \begin{cases} A & (-\delta/2 < t < \delta/2) \\ 0 & (\delta/2 < t < T - \delta/2) \end{cases}$$

Por conveniencia, escogeremos $-\delta/2$ y $(T - \delta/2)$ como límites de integración.

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T}\int_{-\delta/2}^{T-\delta/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\delta/2}^{\delta/2} Ae^{-jn\omega_0 t}\,dt \\ &= \frac{-A}{jn\omega_0 T}\,e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{-\delta/2}^{\delta/2} \\ &= \frac{2A}{n\omega_0 T}\,\frac{(e^{jn\omega_0\delta/2} - e^{-jn\omega_0\delta/2})}{2j} \\ &= \frac{2A}{n\omega_0 T}\,\text{sen}\,(n\omega_0\delta/2) \\ &= \frac{A\delta}{T}\left[\frac{\text{sen}\,(n\omega_0\delta/2)}{n\omega_0\delta/2}\right] \end{aligned} \tag{1.64}$$

La función entre paréntesis es de la forma $(sen\ x)/x$. Esta función desempeña un papel muy importante en la teoría de la comunicación y se le conoce como *función de muestreo*, abreviado $Sa(x)$.

$$Sa(x) = \frac{\text{sen}\,x}{x} \tag{1.65}$$

Véase la función de muestreo en la figura 1.12. Puede notarse que la función oscila con período 2π, con amplitud decreciente en ambas direcciones de x, y que tiene ceros en $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, etc. De la ecuación 1.64, tenemos

$$F_n = \frac{A\delta}{T}\,Sa(n\omega_0\delta/2)$$

Pero

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{y} \qquad \frac{n\omega_0\delta}{2} = \frac{n\pi\delta}{T}$$

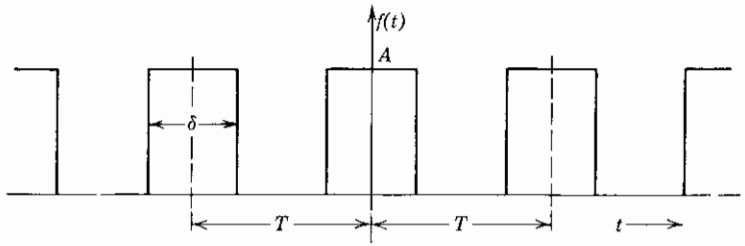


Figura 1.11 Función rectangular periódica.

Por lo tanto,

$$F_n = \frac{A\delta}{T} Sa\left(\frac{n\pi\delta}{T}\right) \tag{1.66a}$$

y

$$f(t) = \frac{A\delta}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\pi\delta}{T}\right) e^{jn\omega_0 t} \tag{1.66b}$$

Es evidente de la ecuación 1.66 que F_n es real y, en consecuencia, sólo necesitamos un espectro para la representación en el dominio de la frecuencia. Además, como $Sa(x)$ es una función par, de la ecuación 1.66 se desprende que $F_n = F_{-n}$.

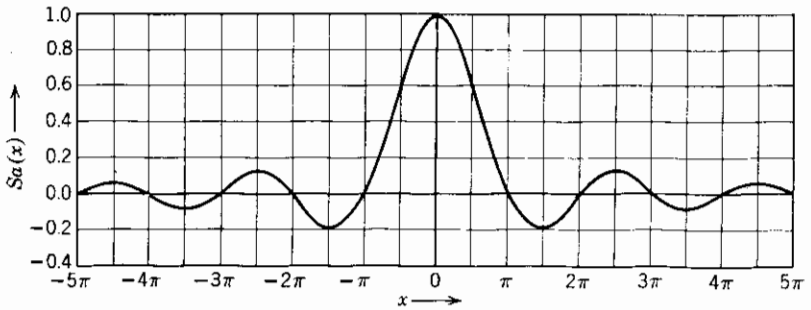


Figura 1.12 Función de muestreo $Sa(x)$.

La frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$. El espectro de frecuencia es función discreta y existe solamente en $\omega = 0, \pm 2\pi/T, \pm 4\pi/T, \pm 6\pi/T, \ldots$ etc., con amplitudes $A\delta/T$, $(A\delta/T)Sa(\pi\delta/T)$, $(A\delta/T)Aa(2\pi\delta/T), \ldots$, etc., respectivamente. Consideraremos el espectro para algunos valores específicos de δ y T. Tomaremos como duración del pulso δ 1/20 de segundo y el período T como de 1/4 de segundo, 1/2 segundo, y 1 segundo, sucesivamente.

Para $\delta = 1/20$ y $T = 1/4$ segundo, la ecuación 1.66 está dada por

$$F_n = \frac{A}{5} Sa\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$

La frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T = 8$. Así pues, el espectro existe en $\omega = 0, \pm 8\pi, \pm 16\pi, \ldots$, etc., como se ve en la figura 1.13a.

Si $\delta = 1/20$, $T = 1/2$ segundo

$$F_n = \frac{A}{10} Sa\left(\frac{n\pi}{10}\right)$$

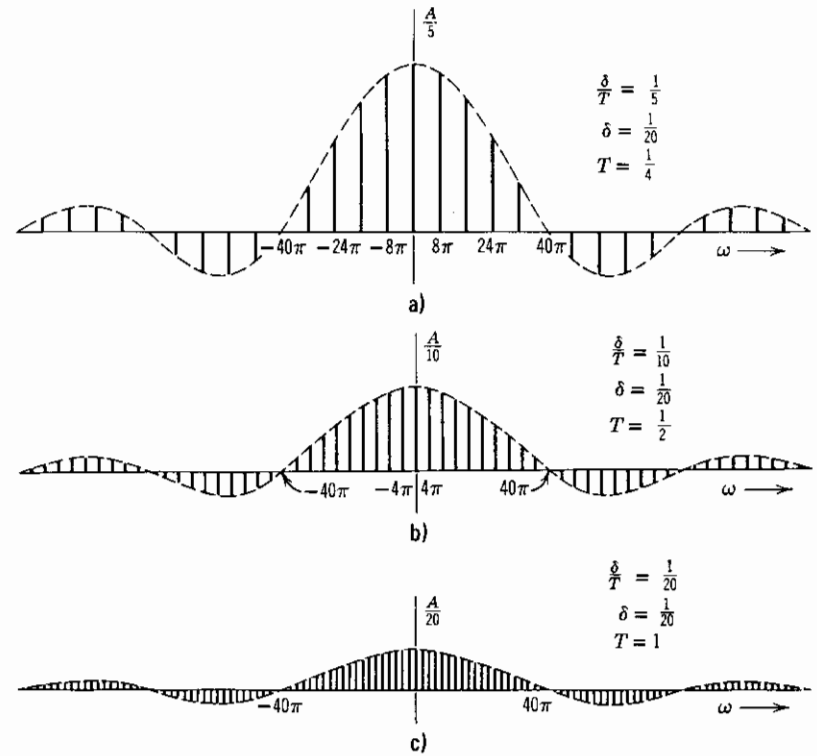


Figura 1.13

El espectro se muestra en la figura 1.13b y existe en $\omega = 0, \pm 4\pi, \pm 8\pi, \ldots$, etc.

Si $\delta = 1/20$, $T = 1$ segundo

$$F_n = \frac{A}{20} Sa\left(\frac{n\pi}{20}\right)$$

El espectro existe en $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, etc., y se le muestra en la figura 1.13c.

Se ve claramente que, a medida que crece el período T, la frecuencia fundamental $2\pi/T$ se vuelve más pequeña y, en consecuencia, aparecen más componentes de frecuencia dentro del rango dado de frecuencia. Por lo tanto, el espectro se vuelve más denso cuando el período T aumenta; sin embargo, las amplitudes de los componentes de frecuencia disminuyen a medida que T se incrementa. En el límite, cuando T tiende a infinito, tenemos un solo pulso rectangular de duración δ y la frecuencia fundamental tiende a cero. El espectro se vuelve continuo y existe en todas las frecuencias; obsérvese, sin embargo, que la forma del espectro de frecuencia no cambia con el período T. De esta manera, la envolvente del espectro no depende del período T de la función, sino únicamente de la forma del pulso. En el límite, cuando T tiende a infinito la función $f(t)$ sólo está formada por un pulso que no se repite, por lo que el espectro representa a una función no periódica en el intervalo $(-\infty < t < \infty)$. Es así como se ha extendido la representación de una función periódica mediante, una suma de funciones exponenciales a la de una función no periódica. En la sección 1.5 se estudiará detalladamente este tópico.

1.5 REPRESENTACION DE UNA FUNCION CUALQUIERA EN TODO EL INTERVALO $(-\infty, \infty)$: LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Hemos aprendido a representar cualquier función en términos de una serie exponencial (o trigonométrica) en un intervalo finito. En el caso especial de una función periódica, se puede extender la representación a todo el intervalo $(-\infty, \infty)$. Sin embargo, conviene representar cualquier función, periódica o no, en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$ en términos de señales exponenciales. Veremos que una señal no periódica se puede expresar generalmente como suma (integral) continua de señales exponenciales, en contraste con las señales periódicas, que se pueden representar mediante una suma discreta de señales exponenciales.

Este problema puede tratarse en dos formas. Podemos expresar $f(t)$ en términos de funciones exponenciales en un intervalo finito $(-T/2 < t < T/2)$ y suponer que T tiende a infinito. También podemos construir una función periódica con período T de modo que $f(t)$ represente el primer ciclo de la onda periódica. En el límite, el período T tiende a infinito y, entonces, la función periódica solamente tendrá un ciclo en el intervalo $(-\infty < t < \infty)$ representado por $f(t)$. De hecho no existe diferencia alguna entre estas dos formas, pero la segunda es más conveniente, porque nos permite visualizar el proceso de límites sin alterar la forma del espectro de frecuencia. Ya hemos analizado en cierto grado el proceso para el caso de la función rectangular del ejemplo 1.6 (figura 1.11). Se observó que, cuando el período T aumenta, la frecuencia fundamental disminuye y el espectro de frecuencia se vuelve más denso, es decir, existen más componentes dentro del rango dado de frecuencias y las amplitudes se vuelven más pequeñas; sin embargo, no se altera la forma del espectro de frecuencia. Esto se puede ver fácilmente en la figura 1.13 en donde se consideran tres valores de T ($T = 1/4$, $1/2$, y 1 segundo)

Consideremos la función $f(t)$ que se ilustra en la figura 1.14. Se requiere representar a esa función como suma de funciones exponenciales en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$. Con ese fin construiremos una nueva función periódica $f_T(t)$ con período T en la que la función $f(t)$ se repite cada T segundos

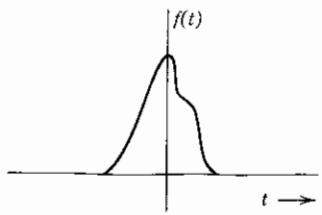


Figura 1.14

como nos indica la figura 1.15. El período T se hace lo suficientemente grande para que no se traslapen los pulsos de la forma de $f(t)$. La nueva función $f_T(t)$ es periódica y se le puede representar por una serie exponencial de Fourier. En el límite, si suponemos que T tiende a infinito, entonces los pulsos de la función periódica se repiten después de un intervalo infinito. Por lo tanto, en el límite $T \to \infty$, $f_T(t)$ y $f(t)$ son idénticas. Es decir,

$$\lim_{T\to\infty} f_T(t) = f(t)$$

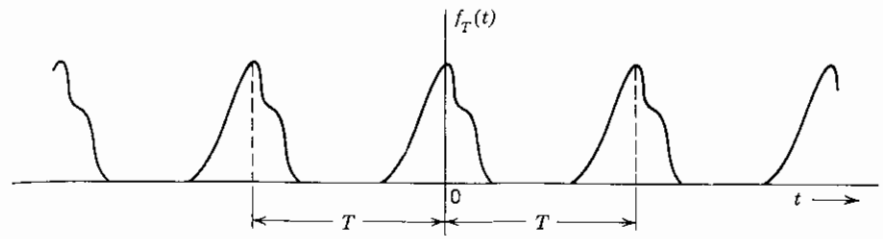


Figura 1.15

Así, la serie de Fourier que representa a $f_T(t)$ en todo el intervalo también representará a $f(t)$ en todo el intervalo si hacemos $T = \infty$ en la serie.

Podemos expresar la serie exponencial de Fourier de $f_T(t)$ como

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

en donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

y

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt \qquad (1.67)$$

El término F_n representa la amplitud de la componente de frecuencia $n\omega_0$. A continuación supongamos que T aumente. A medida que T aumenta, ω_0 (la frecuencia fundamental) disminuye y el espectro se vuelve más denso. Como se ve de la ecuación 1.67, también se reduce la amplitud de cada componente. La forma del espectro de frecuencia, sin embargo, no cambia (ya hemos observado este comportamiento en el caso de una función rectangular como la de la figura 1.13). En el límite, cuando $T = \infty$, la magnitud de cada componente se vuelve infinitesimalmente pequeña, pero también existe un número infinito de componentes espectrales. El espectro existe en cualquier valor de ω y ya no es un espectro discreto sino función continua de ω. Para aclarar esta cuestión haremos un cambio de notación. Sea

$$n\omega_0 = \omega_n \qquad (1.68)$$

Entonces, F_n es función de ω_n y denotaremos F_n mediante $F_n(\omega_n)$. Además, sea

$$TF_n(\omega_n) = F(\omega_n) \qquad (1.69)$$

Entonces

$$f_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n)e^{j\omega_n t} \tag{1.70}$$

y, a partir de las ecuaciones 1.67 y 1.69, obtenemos

$$F(\omega_n) = TF_n = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)e^{-j\omega_n t}\,dt \tag{1.71}$$

Si substituimos el valor de $T = 2\pi/\omega_0$ en la ecuación 1.70, ootenemos

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n)e^{j\omega_n t}\omega_0 \tag{1.72}$$

La ecuación 1.72 nos enseña que se puede expresar $f_T(t)$ como suma de señales exponenciales de frecuencias ω_1, ω_2, ω_3, ... ω_n, ..., etc. La amplitud de la componente de frecuencia ω_n es $F(\omega_n)\omega_0/2\pi$ (esto es igual a F_n). Obsérvese, por lo tanto, que la amplitud de dicha componente no es igual sino proporcional a $F(\omega_n)$.

Interpretaremos ahora gráficamente la ecuación 1.72, que representa una suma discreta de componentes de frecuencia o, dicho de otra manera, una suma de componentes discretas de frecuencia. En general, la cantidad $F(\omega_n)e^{j\omega_n t}$ es compleja y por lo tanto, en su representación gráfica estricta se necesitan dos diagramas (uno real y otro imaginario o sea diagramas de magnitud y de fase). Sin embargo, supondremos que la cantidad $F(\omega_n)e^{j\omega_n t}$ es real. Eso es suficiente para indicar nuestra manera de razonar. La figura 1.16 ilustra el diagrama de esta cantidad como función de ω. La función existe solamente en valores discretos de ω, es decir, en $\omega = \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, etc., en donde $\omega_n = n\omega_0$.

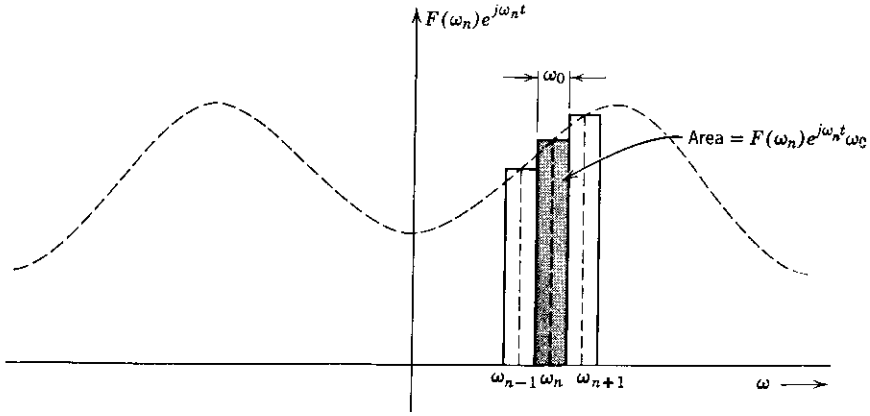


Figura 1.16

La distancia que separa cada componente de frecuencia es ω_0. Por lo tanto, el área del rectángulo sombreado de la figura 1.16 es $F(\omega_n)e^{jn\omega_n t}\omega_0$. La ecuación 1.72 representa la suma de las áreas bajo todos los rectángulos que corresponden a valores de n desde $n = -\infty$ hasta ∞. La suma de las áreas rectangulares representa aproximadamente el área bajo la curva punteada. La aproximación se mejora cuando disminuye el valor de ω_0. En el límite, cuando $T \to \infty$, ω_0 se vuelve infinitesimalmente pequeña de modo que se le puede representar por $d\omega$. La suma discreta de la ecuación 1.72 se transforma en la integral o el área bajo la curva. La curva es una función continua de ω y está dada por $F(\omega)e^{j\omega t}$. Además, cuando $T \to \infty$, la función $f_T(t) \to f(t)$ y las ecuaciones 1.70 y 1.71 se transforman en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \tag{1.73}$$

en donde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{1.74}$$

En esta forma se ha logrado representar una función no periódica $f(t)$ en términos de funciones exponenciales en todo el intervalo $(-\infty < t < \infty)$. La ecuación 1.73 representa $f(t)$ como suma continua de funciones exponenciales con frecuencias comprendidas en el intervalo $(-\infty < \omega < \infty)$. La amplitud de cualquier componente es proporcional a $F(\omega)$. Por lo tanto $F(\omega)$ representa el espectro de frecuencia de $f(t)$ y se le llama *función de densidad espectral*. Nótese, sin embargo, que aquí el espectro de frecuencia es continuo y existe en cualquier valor de ω. La ecuación 1.74 nos permite determinar la función de densidad espectral $F(\omega)$.

En general las ecuaciones 1.73 y 1.74 se conocen como par de transformadas de Fourier. Se dice que la ecuación 1.74 es la transformada directa de Fourier de $f(t)$, y la ecuación 1.73 la transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$. En forma simbólica dichas transformadas se denotan como

$$F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)] \qquad \text{y} \qquad f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] \tag{1.75}$$

Así, $F(\omega)$ es la transformada directa de Fourier de $f(t)$ y $f(t)$ es la transformada inversa de $F(\omega)$, o sea

$$\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

1.6 ALGUNAS OBSERVACIONES ACERCA DE LA FUNCION DE ESPECTRO CONTINUO

Se ha obtenido la expresión de una función no periódica $f(t)$ como suma continua de funciones exponenciales de frecuencias en el intervalo de $-\infty$ a ∞. La amplitud de la componente de cualquier frecuencia es infinitesimal, pero proporcional a $F(\omega)$, en donde $F(\omega)$ es la densidad espectral.

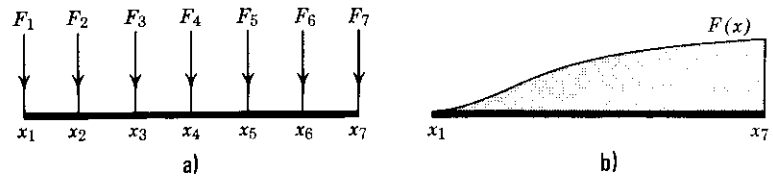


Figura 1.17 a) Viga cargada en puntos discretos. *b*) Viga cargada continuamente.

A veces el concepto de espectro continuo resulta confuso, debido a que generalmente nos imaginamos el espectro formado por frecuencias discretas y con amplitudes finitas como en el caso de una función periódica. El concepto es más comprensible cuando se considera un fenómeno análogo. Un ejemplo común de distribución continua es el de la carga de una viga. Considérese una viga cargada con pesos de $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_7$ unidades en puntos uniformemente espaciados $x_1, x_2, \ldots, x_7$, como vemos en la figura 1.17a. La viga está cargada en 7 puntos discretos y el peso total sobre la viga está dado por la suma de las cargas.

$$W_T = \sum_{r=1}^{7} F_r$$

Consideremos a continuación el caso de una viga cargada en forma continua como nos muestra la figura 1.17b. Sea $F(x)$ kilogramo/metro, la densidad de carga, que es función de x. El peso total sobre la viga está dado, en este caso, por la suma continua de los pesos, es decir, por la integral de $F(x)$ en toda la longitud

$$W_T = \int_{x_1}^{x_7} F(x)\,dx \quad \text{kg}$$

En el caso de una carga discreta, el peso existe únicamente en puntos discretos sin que haya peso alguno en los demás puntos. Por otra parte, en el caso de la carga continuamente distribuida, hay peso en todos los puntos, pero en cada uno de ellos la carga es cero. Sin embargo, en una distancia pequeña dx la carga está dada por $F(x)\,dx$. Por lo tanto $F(x)$ representa la magnitud relativa de la carga en un punto x. En el caso de las señales y sus espectros de frecuencia, la situación es exactamente análoga. Podemos representar una señal periódica mediante una suma de exponenciales discretas con amplitudes finitas.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j\omega_n t} \qquad (\omega_n = n\omega_0)$$

En una función no periódica, la distribución de exponenciales se vuelve continua; es decir, la función espectral existe en todos los valores de ω. La amplitud de la componente en cualquier frecuencia ω es cero. La aportación total en un intervalo infinitesimal $d\omega$ está dada por $(1/2\pi)F(\omega)d\omega$, y la función $f(t)$ queda expresada en términos de la suma continua de esas componentes infinitesimales.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \tag{1.76}$$

Si integramos con respecto a la variable f, en lugar de ω, se elimina el factor 2π. Tenemos.

$$\omega = 2\pi f$$

y

$$d\omega = 2\pi\,df$$

La ecuación 1.76 se puede ahora expresar como

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(2\pi f)e^{j2\pi f t}\,df$$

1.7 REPRESENTACION DE UNA SEÑAL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN EL DE LA FRECUENCIA

La transformada de Fourier es un instrumento con el cual se expresa una señal dada en términos de sus componentes exponenciales. La función $F(\omega)$ es la transformada directa de Fourier de $f(t)$ y representa las amplitudes relativas de las diferentes componentes. Por lo tanto, $F(\omega)$ es la representación de $f(t)$ en el dominio de la frecuencia. La representación en el dominio del tiempo especifica la función en cada instante del tiempo, mientras que la representación en el dominio de la frecuencia especifica las amplitudes relativas de las componentes de frecuencia de la función. Ambas representaciones especifican en forma única la función. En general, la función $F(\omega)$ es compleja y se necesitan dos diagramas para su representación gráfica completa.

$$F(\omega) = |F(\omega)|\,e^{j\theta(\omega)}$$

Así, $F(\omega)$ se puede representar mediante un diagrama de magnitud $|F(\omega)|$ y un diagrama de fase $\theta(\omega)$. En muchos casos, $F(\omega)$ es sólo real o imaginaria y entonces sólo se requiere de un diagrama. Demostraremos a continuación que, cuando $f(t)$ es función real,

$$F^*(\omega) = F(-\omega)$$

Tenemos

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{1.77a}$$

De la misma manera,

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}\,dt \tag{1.77b}$$

De las ecuaciones 1.77a y 1.77b se infiere que, si $f(t)$ es función real de t, entonces

$$F^*(\omega) = F(-\omega)$$

Por lo tanto, si (1.78)

$$F(\omega) = |F(\omega)|\, e^{j\theta(\omega)}$$

entonces

$$F(-\omega) = |F(\omega)|\, e^{-j\theta(\omega)} \tag{1.79}$$

Es evidente a partir de estas ecuaciones que el espectro de magnitud $|F(\omega)|$ es función par de ω y el espectro de fase $\theta(\omega)$ es función impar de ω.

1.8 EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

De la ecuación 1.74, que define la transformada de Fourier, se desprende claramente que si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ es finita, entonces existe la transformada de Fourier. Pero, como la magnitud de $e^{-j\omega t}$ es la unidad, una condición suficiente para la existencia de la transformada de Fourier de $f(t)$ es que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$$

sea finita. Sin embargo, si se consideran funciones singulares (por ejemplo, funciones impulso), entonces esta condición de absoluta integrabilidad no es siempre necesaria. Veremos posteriormente que existen funciones que no son absolutamente integrables, aunque sí tienen transformadas. Es decir, la integrabilidad absoluta de $f(t)$ es condición suficiente pero no necesaria, para la existencia de la transformada de Fourier de $f(t)$.

Las funciones como sen ωt, cos ωt, $u(t)$, etc., no satisfacen la condición anterior y, en un sentido estricto, no poseen transformada de Fourier. Sin embargo, esas funciones sí tienen transformada de Fourier en el límite.

Se puede suponer que la función sen ωt existe únicamente en el intervalo $-T/2 < t < T/2$. En estas condiciones la función posee transformada de Fourier, siempre y cuando T sea finito. En el límite, T tiende a un valor muy grande pero finito. Se demostrará posteriormente que en el límite existe la transformada de Fourier de tales funciones.

1.9 TRANSFORMADAS DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES UTILES

1. Señal exponencial unilateral $e^{-at}u(t)$

$$f(t) = e^{-at}u(t)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt \tag{1.80}$$

$$= \frac{1}{a + j\omega} \tag{1.81}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}\, e^{-j\tan^{-1}(\omega/a)}$$

Aquí

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \qquad \text{y} \qquad \theta(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Se han representado el espectro de magnitud $|F(\omega)|$ y el espectro de fase $\theta(\omega)$ en la figura 1.18b.

Obsérvese que la integral de la ecuación 1.80 converge sólo en $a > 0$. Cuando $a < 0$, la transformada de Fourier no existe. Esto también se deduce al considerar que, cuando $a < 0$, $f(t)$ no es absolutamente integrable.

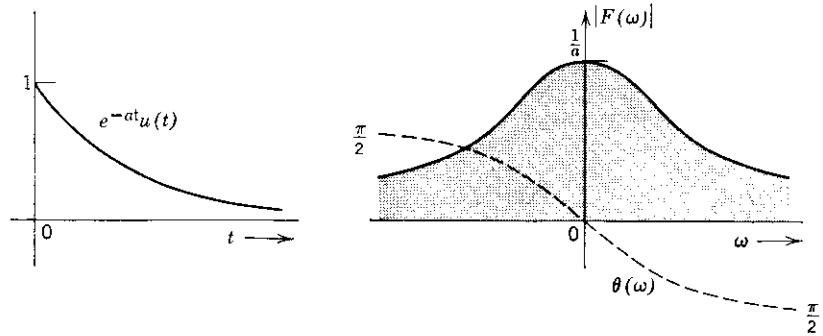


Figura 1.18 Representaciones de $e^{-at}u(t)$ en el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia.

2. Señal exponencial bilateral $e^{-a|t|}$

$$f(t) = e^{-a|t|}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}\, dt + \int_{\infty}^{0} e^{-(a+j\omega)t}\, dt$$

$$= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \tag{1.82}$$

Obsérvese que, en este caso, el espectro de fase $\theta(\omega) = 0$. El espectro de magnitud $2a/(a^2 + \omega^2)$ se ilustra en la figura 1.19.

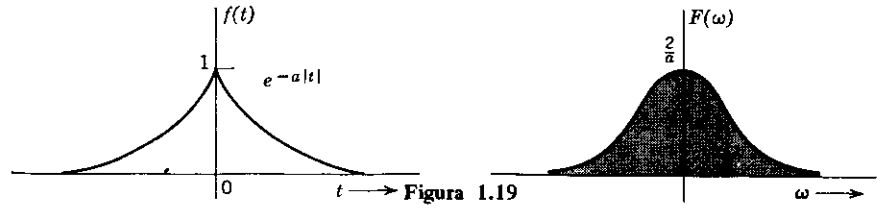


Figura 1.19

3. La función pulso rectangular

Se define la función pulso rectangular $G_\tau(t)$, que se muestra en la figura 1.20a, como

$$G_\tau(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

La transformada de Fourier de esta función está dada por

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j\omega t}\, dt \\ &= \frac{A}{j\omega}\left(e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}\right) \\ &= A\tau \frac{\text{sen}\,(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \\ &= A\tau Sa\frac{(\omega\tau)}{2} \end{aligned} \qquad (1.83)$$

Nótese que $F(\omega)$ es una función real y, en consecuencia, se le puede representar gráficamente por una sola curva (figura 1.20b)

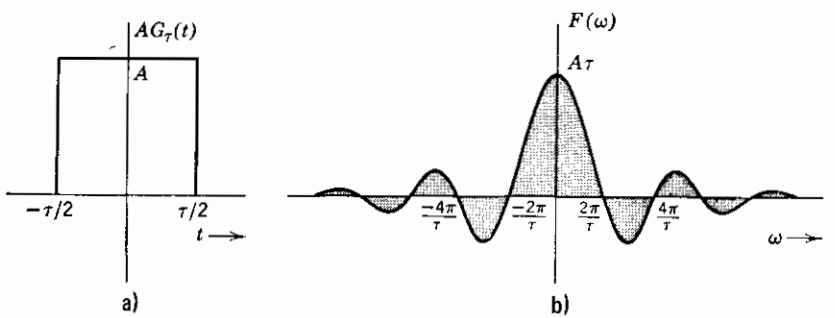


Figura 1.20 a) Función pulso rectangular. b) Transformada de la función pulso rectangular.

1.10 FUNCIONES SINGULARES

Considérese un voltaje escalón unitario aplicado a un capacitor, de la manera ilustrada en la figura 1.21a. La corriente i que pasa por el capacitor está dada por

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Es fácil ver que dv/dt es cero para todos los valores de t con la excepción de $t = 0$, en donde no está definida. La derivada en $t = 0$ no existe debido a que la función $u(t)$ es discontinua en ese punto. Nos encontramos con una dificultad matemática, planteada por la idealización de la fuente y el elemento del circuito. La solución existiría si o bien la fuente, o bien el capacitor, fuesen no ideales. Por ejemplo, si el voltaje de la fuente fuese como el de la figura 1.22a en lugar del de la figura 1.21a, la corriente en el capacitor sería un pulso como el de la figura 1.22b. En el caso de un voltaje escalón unitario ideal, la solución no existe, pero es posible obtenerla en el límite, si se supone una fuente no ideal como la de la figura 1.22a y a continuación se toma a como cero en el límite.

Designemos por $u_a(t)$ la función no ideal de voltaje. En el límite, cuando

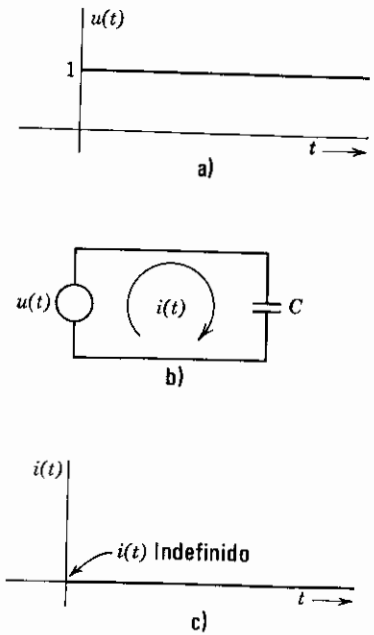


Figura 1.21

a tiende a cero, esta función de voltaje se transforma en una función escalón unitario. La derivada de la función $u_a(t)$ es un pulso rectangular de altura $1/a$ y de duración a. A medida que a varía, la forma del pulso varía, pero su área permanece constante. La figura 1.23a nos muestra la secuencia de esos pulsos cuando varía a. En el límite, cuando a es cero, la altura del pulso se vuelve infinita y la duración se hace cero; sin embargo, el área del pulso sigue siendo unitaria. Definamos la función impulso unitario como la derivada de una función escalón unitario. Puesto que la derivada de una función escalón unitario no existe, la función impulso unitario se define como el límite de la secuencia de las derivadas de una función no ideal $u_a(t)$ cuando a tiende a cero. La función impulso unitario se denota por $\delta(t)$. Por lo tanto tenemos

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} \frac{d}{dt} [u_a(t)]$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} [u(t) - u(t - a)]$$

En el límite, cuando $a \to 0$, la función $\delta(t)$ adopta la forma de un pulso de altura infinita y duración cero. El área bajo el pulso, sin embargo, sigue siendo unitaria. La función $\delta(t)$ es cero en cualquier punto con la excepción de $t = a$.

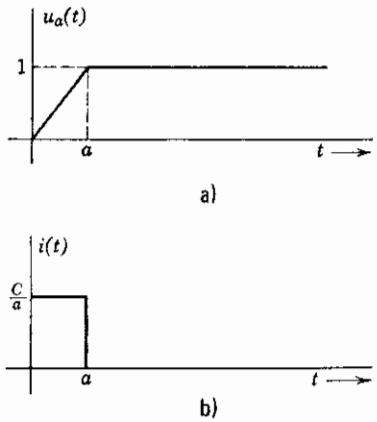


Figura 1.22 a) Representación de un voltaje no ideal. b) Pulso de corriente en el capacitor debido a la fuente no ideal de voltaje $u_a(t)$.

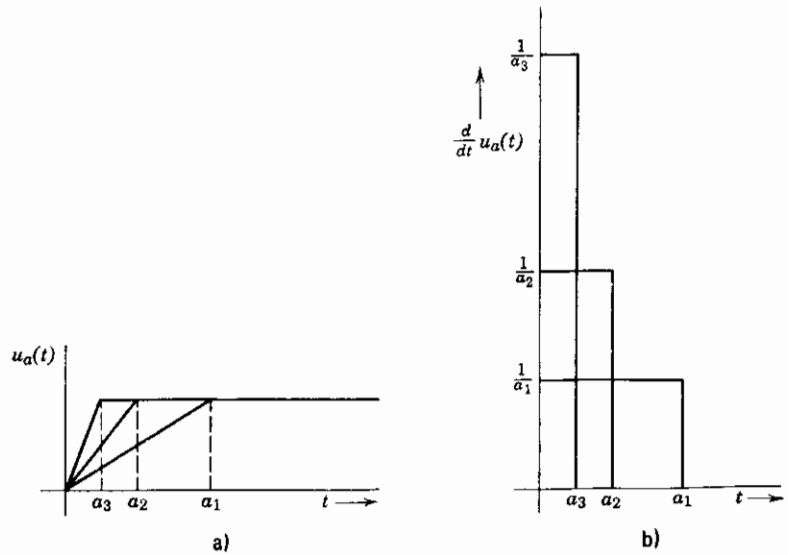


Figura 1.23

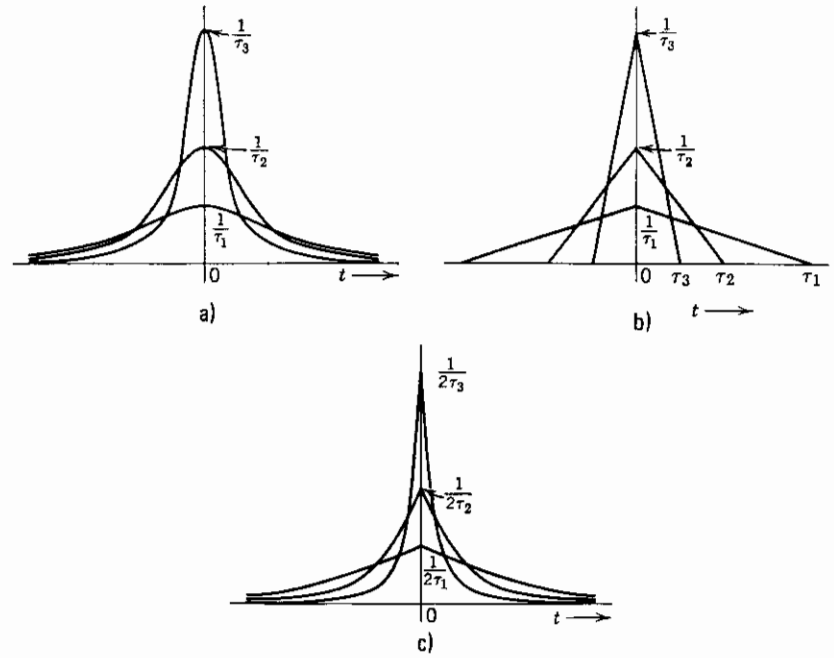


Figura 1.24 a) Secuencia de pulsos de Gauss. b) Secuencia de pulsos triangulares. c) Secuencia de pulsos exponenciales bilaterales.

Se puede expresar este hecho mediante la definición de la función impulso dada por P. A. M. Dirac:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \\ \text{y} \qquad &\\ &\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.84}$$

Es evidente, de acuerdo con su definición, ecuación 1.84, que la función impulso no es una verdadera función en el sentido matemático, en el que una función debe quedar definida para todos los valores de t. Sin embargo, se ha justificado rigurosamente la función impulso mediante la teoría de las distribuciones de Schwartz;* se debe a Temple una versión de esta teoría (funciones generalizadas). Desde ese punto de vista la función impulso queda definida como una secuencia de funciones regulares y todas las operaciones con la función impulso se consideran como operaciones con la secuencia. Por consiguiente, se define la función impulso mediante varias secuencias como vemos en la figura 1.24.

* M.J. Lighthill, *Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, 1959.

La figura 1.25 nos muestra la función impulso como límite de la secuencia de funciones de muestreo. Todas estas secuencias satisfacen la ecuación 1.84.

1. Pulso de Gauss

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} e^{-\pi t^2/\tau^2}$$

2. Pulso triangular

$$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\left[1 - \frac{|t|}{\tau}\right] & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$

3. Pulso exponencial

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{2\tau} e^{-|t|/\tau}$$

4. Función de muestreo. Se puede demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\pi} Sa(kt)\, dt = 1 \tag{1.85}$$

A medida que k aumenta, la amplitud de la función $(k/\pi)Sa(kt)$ también aumenta y la función oscila más rápidamente atenuándose en forma inversamente proporcional a t (figura 1.25). En el límite, cuando $k \to \infty$, la función se concentra en el origen y el área neta bajo la curva aún es la unidad, como puede verse en la ecuación 1.85. Por lo tanto,

$$\delta(t) = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{\pi} Sa(kt) \tag{1.86}$$

5. Función de muestreo cuadrática

$$\delta(t) = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{\pi} Sa^2(kt) \tag{1.87}$$

Esto se deduce de argumentaciones parecidas a las que se emplean con la función de muestreo y el hecho de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\pi} Sa^2(kx)\, dx = 1 \tag{1.88}$$

Volvamos a la función impulso $\delta(t)$. Observamos que el area está concentrada en el origen $t = 0$. Por lo tanto, podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1 \tag{1.89}$$

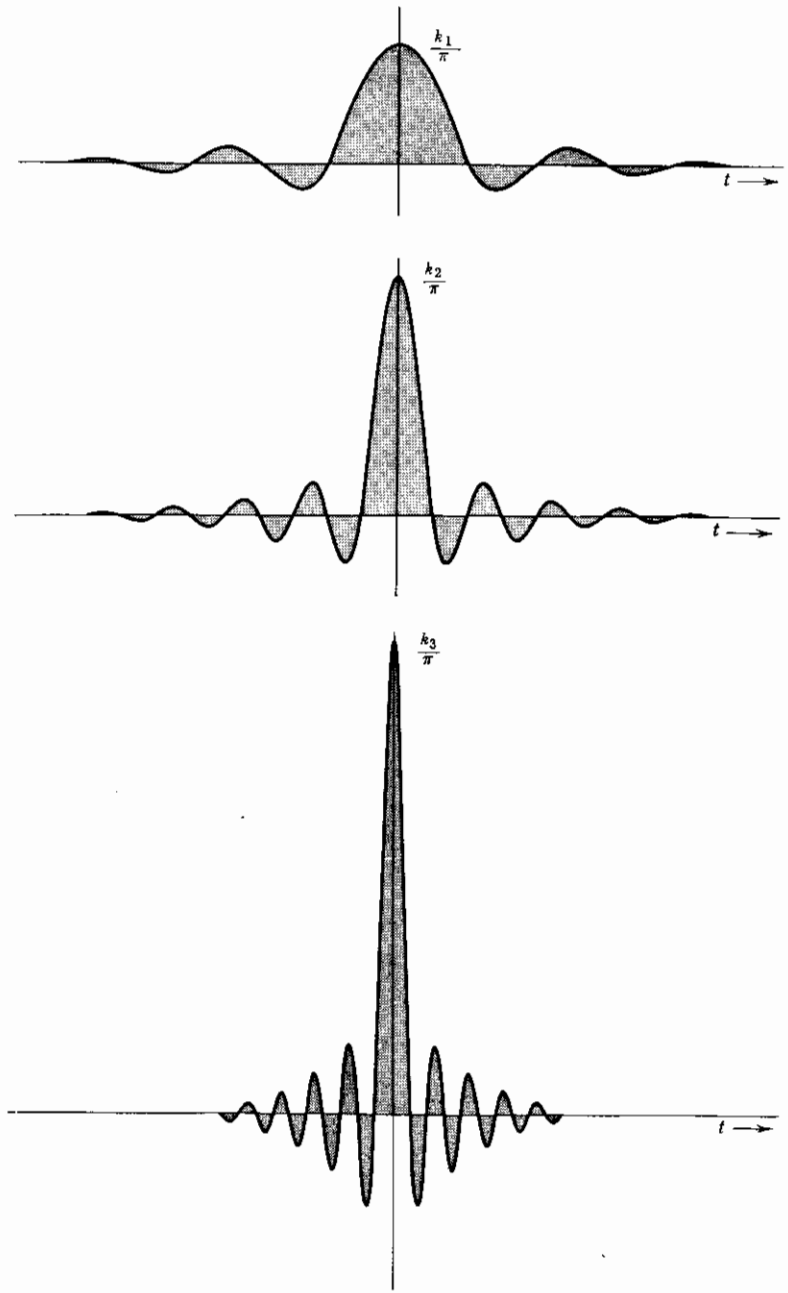


Figura 1.25 La función impulso como límite de una secuencia de funciones de muestreo.

en donde 0^+ y 0^- denotan valores de t arbitrariamente pequeños que se aproximan al origen por la derecha y por la izquierda, respectivamente. Además como $\delta(t) = 0$ en cualquier punto excepto en $t = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = f(0) \tag{1.90a}$$

Y también deducimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = f(t_0) \tag{1.90b}$$

Las ecuaciones 1.90 representan la propiedad de muestreo de la función impulso.*

Insistimos en que la función impulso no es una verdadera función en el sentido matemático habitual, donde se define una función para todos los valores de t. No obstante, su empleo formal conduce a resultados que se pueden interpretar físicamente. La utilización de la función impulso es muy común en las ciencias físicas y en la ingeniería para representar entidades como masas puntuales, cargas puntuales, fuentes puntuales, fuerzas concentradas, fuentes de línea y cargas superficiales. En realidad, esas distribuciones no existen en la práctica, pero la idealización simplifica la obtención de los resultados. Además, el equipo de medición que se emplea en la actualidad, debido a su resolución finita, no distingue entre las respuestas a la función impulso ideal y a un pulso de duración pequeña pero finita.

La función escalón $u(t)$, la función impulso $\delta(t)$ y sus derivadas se llaman funciones singulares. Este término se aplica a todas las funciones que son discontinuas o tienen derivadas discontinuas. Esas funciones sólo pueden tener derivadas continuas de orden finito. Por ejemplo, la función parabólica $f(t) = at^2u(t)$ solamente tiene derivada continua de primer orden, $f'(t) = 2atu(t)$. La segunda derivada es discontinua. Por lo tanto es función singular. De la misma manera, la función rampa y la función escalón unitario (así como la función impulso y sus derivadas) son funciones singulares. De hecho, cualquier función que se represente por un polinomio en t constituye una función singular.

1.11 TRANSFORMADAS DE FOURIER QUE CONTIENEN FUNCIONES IMPULSO

1. Transformada de Fourier de la función impulso

La transformada de Fourier de la función impulso unitario $\delta(t)$ está dada por

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{1.91}$$

* Se ha demostrado que las ecuaciones 1.90 se deducen de la definición de función impulso de la ecuación 1.84. Se define rigurosamente la función impulso mediante la ecuación 1.90. De esa manera, definimos la función impulso por sus propiedades como integral y no como función del tiempo definida para todo t. Se puede demostrar que la definición (1.84) no especifica una sola función. Véase, por ejemplo, A. Papoulis, *Fourier Integral and Its aplications*, McGraw-Hill, New York, 1962.

De la propiedad de muestreo de la función impulso expresada por la ecuación 1.90a, se deduce que la integral del segundo miembro de la ecuación 1.91 es la unidad. En consecuencia,

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \tag{1.92}$$

Así, la transformada de Fourier de la función impulso unitario es la unidad.

Por lo tanto, es evidente que la función impulso unitario tiene densidad espectral uniforme en todo el intervalo de frecuencias. En otras palabras, la función impulso contiene todas las componentes de frecuencia con amplitudes relativas iguales.

2. Transformada de Fourier de una constante

Encontremos a continuación la transformada de Fourier de la función siguiente:

$$f(t) = A$$

Esta función no satisface la condición de integrabilidad absoluta, pero en el límite, posee transformada de Fourier. Consideremos la transformada de Fourier de una función pulso rectangular de altura A y de duración τ segundos, como la que se ilustra en la figura 1.20a. En el límite, cuando

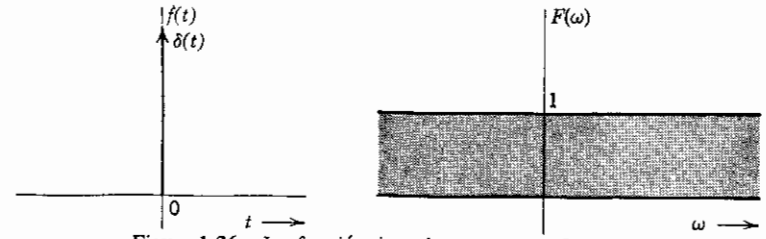


Figura 1.26 La función impulso y su transformada.

$\tau \to \infty$, la función pulso rectangular tiende a convertirse en una función constante A. En consecuencia la transformada de Fourier de una constante A es la transformada de Fourier de una función pulso rectangular $G_\tau(t)$ cuando $\tau \to \infty$. Vimos antes que la transformada de Fourier de $AG_\tau(t)$ es $A\tau Sa(\omega\tau/2)$. Entonces

$$\mathcal{F}[A] = \lim_{\tau\to\infty} A\tau Sa\,\frac{\omega\tau}{2}$$

$$= 2\pi A \lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau}{2\pi}\,Sa\,\frac{\omega\tau}{2}$$

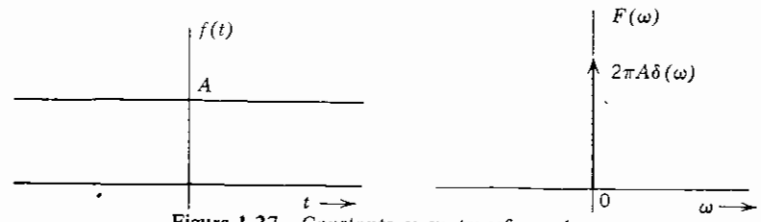


Figura 1.27 Constante y su transformada.

De la ecuación 1.86, se deduce que el límite de la función de muestreo anterior define una función impulso $\delta(\omega)$. Por lo tanto

$$\mathcal{F}[A] = 2\pi A\ \delta(\omega) \tag{1.93a}$$

y

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\ \delta(\omega) \tag{1.93b}$$

Así, cuando $f(t)$ es constante, contiene solamente una componente de frecuencia $\omega = 0$. Como es de esperarse una señal constante de corriente directa ($\omega = 0$), no contiene alguna otra componente de frecuencia.

3. Transformada de *sgn* (*t*)

Se define la función signum, que se abrevia sgn (t), como

$$\text{sgn}\ (t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \tag{1.94a}$$

Se ve fácilmente que,

$$\text{sgn}\ (t) = 2u(t) - 1 \tag{1.94b}$$

Se obtiene fácilmente la transformada de Fourier de sgn (t) al observar que

$$\text{sgn}\ (t) = \lim_{a \to 0}\ [e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$$

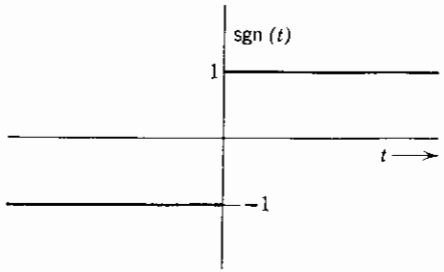


Figura 1.28

Entonces

$$\mathcal{F}[\text{sgn}\ (t)] = \lim_{a \to 0}\left[\int_0^\infty e^{-at}e^{-j\omega t}\,dt - \int_{-\infty}^0 e^{at}e^{-j\omega t}\,dt\right]$$

$$= \lim_{a \to 0}\left[\frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2}\right]$$

$$= \frac{2}{j\omega} \tag{1.95}$$

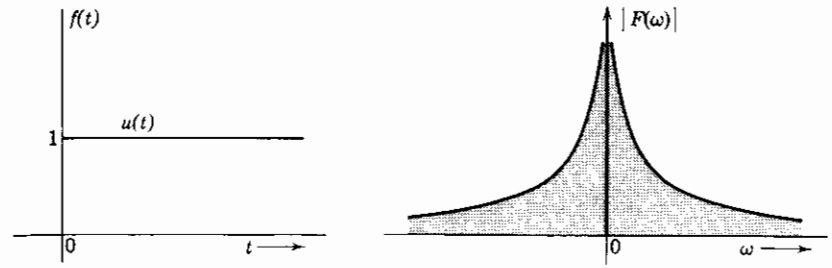


Figura 1.29 Función escalón unitario y su función de densidad espectral.

4. Transformada de la función escalón unitario *u*(*t*)

De la ecuación 1.94b se deduce que

$$u(t) = \tfrac{1}{2}[1 + \text{sgn}\ (t)]$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}[u(t)] = \tfrac{1}{2}\{\mathcal{F}[1] + \mathcal{F}[\text{sgn}\ (t)]\}$$

Al emplear las ecuaciones 1.93b y 1.95, obtenemos

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\ \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \tag{1.96}$$

La función de densidad espectral contiene un impulso en $\omega = 0$ (figura 1.29). Por consiguiente, la función $u(t)$ contiene, como era de esperarse, una gran componente de corriente directa y, además, otras componentes de frecuencia. La función $u(t)$ aparenta ser una señal pura de corriente directa, de modo que resulta raro que existan otras componentes de frecuencia diferentes de $\omega = 0$. Sin embargo, la función $u(t)$ no es una verdadera señal de corriente directa, ya que vale cero en $t < 0$ y tiene una discontinuidad pronunciada en $t = 0$ que da lugar a otras componentes de frecuencia. En una señal verdadera de corriente directa, $f(t)$ es constante en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$. Se ha visto (ecuación 1.93) que esa señal no contiene otras componentes de frecuencia diferentes a la de corriente directa ($\omega = 0$).

5. Señales sinusoidales perpetuas cos $\omega_0 t$ y sen $\omega_0 t$

Consideremos ahora las señales senoidales cos $\omega_0 t$ y sen $\omega_0 t$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Estas señales no satisfacen la condición de integrabilidad absoluta; no obstante, su transformada de Fourier existe y se le puede obtener mediante un proceso de límite similar al que empleamos con la función constante $f(t) = A$. Supondremos primero que dichas funciones existen únicamente en el intervalo de $-\tau/2$ a $\tau/2$, siendo cero fuera de él. En el límite, τ tenderá a infinito. Mostraremos en seguida el procedimiento.

$$\mathcal{F}(\cos \omega_0 t) = \lim_{\tau \to \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos \omega_0 t e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\text{sen } [(\omega - \omega_0)\tau/2]}{(\omega - \omega_0)\tau/2} + \frac{\text{sen } [(\omega + \omega_0)\tau/2]}{(\omega + \omega_0)\tau/2} \right\}$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} \left\{ \frac{\tau}{2} Sa\left[\frac{\tau(\omega - \omega_0)}{2}\right] + \frac{\tau}{2} Sa\left[\frac{\tau(\omega + \omega_0)}{2}\right] \right\} \quad (1.97)$$

Según la ecuación 1.86, en el límite, una función de muestreo se transforma en una función impulso y tenemos

$$\mathcal{F}(\cos \omega_0 t) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (1.98)$$

De igual manera, se puede demostrar que

$$\mathcal{F}(\text{sen } \omega_0 t) = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \quad (1.99)$$

Por lo tanto el espectro de Fourier de estas funciones consta de sendos impulsos en ω_0 y en $-\omega_0$. Es interesante observar el comportamiento del espectro en el proceso de límite cuando τ tiende a infinito. Si τ es finito, la función de densidad espectral está dada por la ecuación 1.97. La figura 1.32 nos muestra la gráfica de dicha función en el caso en que $\tau = 16\pi/\omega 0$. Es decir, la gráfica representa la función de densidad espectral de la señal $\cos \omega_0 t$ en un intervalo de 8 ciclos.

$$f(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t & |t| < \dfrac{16\pi}{\omega_0} \\ 0 & |t| > \dfrac{16\pi}{\omega_0} \end{cases}$$

Nótese que existe una gran concentración de energía en las frecuencias cercanas a $\pm \omega_0$. A medida que incrementamos el intervalo τ, la densidad espectral se concentra alrededor de las frecuencias $\pm \omega_0$. En el límite, cuando $\tau \to \infty$, la densidad espectral es cero en cualquier punto con la excepción de $\pm \omega_0$, en donde es infinita de tal manera que el área bajo la curva en cada una de estas frecuencias es π. Por lo tanto, en el límite, la distribución se convierte en dos impulsos de intensidad π unidades cada uno localizados en las frecuencias $\pm \omega_0$ como indica la figura 1.31. Evidentemente las funciones de densidad espectral de $\cos \omega_0 t$ y $\text{sen } \omega_0 t$ existen solamente en $\omega = \omega_0$. Eso es lógico, ya que las funciones no contienen componentes de alguna otra frecuencia. En cambio las funciones $\cos \omega_0 t\, u(t)$ y $\text{sen } \omega_0 t\, u(t)$ contienen componentes de frecuencia diferentes de ω_0. Se puede demostrar que (véase la ecuación 1.116):

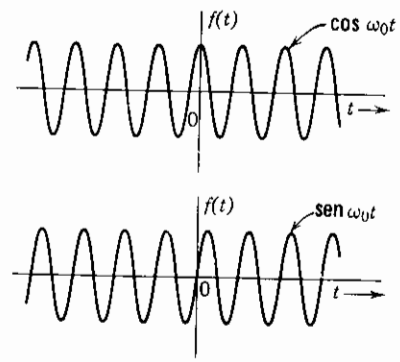


Figura 1.30

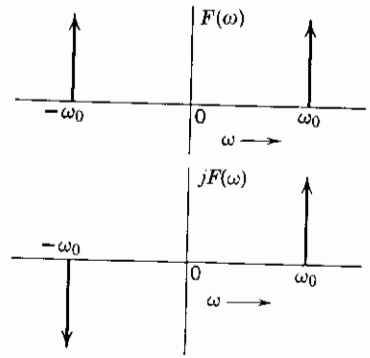


Figura 1.31

$$\mathcal{F}[(\cos \omega_0 t)u(t)] = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1.100a)$$

y

$$\mathcal{F}[(\text{sen } \omega_0 t)u(t)] = \frac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1.100b)$$

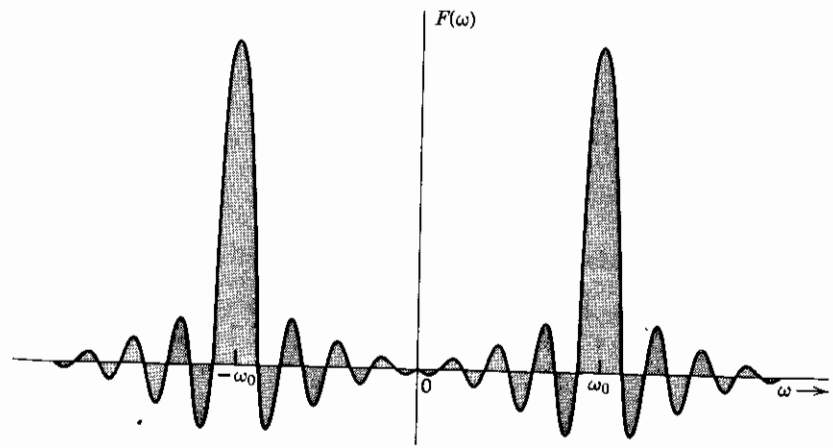


Figura 1.32 Función de densidad espectral del $\cos \omega_0 t$ (8 ciclos)

Es evidente que esas funciones contienen una gran componente de frecuencia ω_0, pero también contienen otras componentes.

Aparentemente las señales cos $\omega_0 t\,u(t)$ y sen $\omega_0 t\,u(t)$ son señales sinusoidales puras y tal vez nos parezca extraño que contengan componentes de frecuencias diferentes de ω_0. Debemos recordar, sin embargo, que estamos expresando una función en términos de funciones exponenciales perpetuas (o sinusoidales perpetuas) que existen desde $-\infty$ hasta ∞. Las funciones cos $\omega_0 t\,u(t)$ y sen $\omega_0 t\,u(t)$ no son señales sinusoidales perpetuas puesto que éstas valen cero en $t<0$ y existen solamente en valores positivos de t. Por lo tanto, también contienen otras componentes además de aquélla en ω_0. Todas estas componentes (figura 1.33) se suman de manera que producen un valor cero

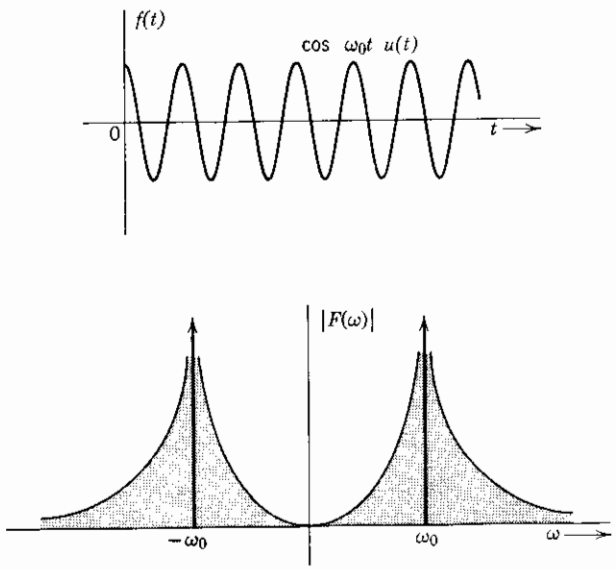


Figura 1.33 Función cos $\omega_0 t u(t)$ y la magnitud de su función de densidad espectral.

de $f(t)$ para $t<0$ y un valor cos $\omega_0 t$ (o sen $\omega_0 t$) para $t>0$. Si las señales sinusoidales son perpetuas (cos $\omega_0 t$ y sen $\omega_0 t$ en todo el intervalo $-\infty$ a ∞) entonces, como lo indican las ecuaciones 1.98 y 1.99, contienen efectivamente componentes de frecuencia en ω_0.

6. La transformada de una exponencial perpetua $e^{j\omega_0 t}$

Vamos a encontrar la transformada de Fourier de una señal exponencial perpetua $e^{j\omega_0 t}$ $(-\infty<t<\infty)$. Tenemos que

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j \operatorname{sen}\omega_0 t$$

De acuerdo con lo anterior,

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = \mathcal{F}[\cos\omega_0 t + j \operatorname{sen}\omega_0 t]$$

Al substituir las ecuaciones 1.98 y 1.99 en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{j\omega t}] &= \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]\\ &= 2\pi\delta(\omega-\omega_0)\end{aligned} \tag{1.101}$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de $e^{j\omega_0 t}$ es un solo impulso de intensidad 2π localizado en $\omega=\omega_0$. Obsérvese que la señal $e^{j\omega_0 t}$ no es función real del tiempo, por lo que tiene un espectro que existe solamente en $\omega=\omega_0$. Ya hemos demostrado anteriormente que, para cualquier función real de tiempo, la función de densidad espectral $F(\omega)$ satisface la condición siguiente (véase la ecuación 1.78):

$$F^*(\omega) = F(-\omega)$$

y

$$|F(\omega)| = |F(-\omega)|$$

De ahí que, para cualquier función real de tiempo, el espectro de magnitud sea una función par de ω; si existe un impulso en $\omega=\omega_0$, deberá existir otro impulso en $\omega=-\omega_0$. Eso es lo que sucede para las señales sen $\omega_0 t$ y cos $\omega_0 t$.

7. La transformada de Fourier de una función periódica

Se ha desarrollado la transformada de Fourier como caso límite de la serie de Fourier, al suponer que el período de una función periódica se vuelve infinito. Ahora se procederá en la dirección opuesta, para demostrar que la serie de Fourier sólo es un caso límite de la transformada de Fourier. Este punto de vista es muy útil, pues permite unificar el tratamiento de ambas funciones, las periódicas y las no periódicas.

En un sentido estricto, la transformada de Fourier de una función periódica no existe, ya que ésta no satisface la condición de integrabilidad absoluta. Para cualquier función periódica $f(t)$:

$$\int_{-\infty}^{-\infty} |f(t)|\,dt = \infty$$

No obstante, la transformada existe en el límite. Ya hemos encontrado las transformadas de Fourier de cos $\omega_0 t$ y sen $\omega_0 t$ en el límite. Usaremos el mismo procedimiento, al suponer que la función periódica existe solamente en el intervalo finito $(-\tau/2, \tau/2)$ y que τ se vuelve infinito en el límite.

También podemos expresar la función periódica mediante su serie de Fourier. La transformada de Fourier de una función periódica es, entonces, la suma de las transformadas de Fourier de sus componentes. Podemos expresar la función periódica $f(t)$ con período T como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

Si tomamos las transformadas de Fourier de ambos miembros, tenemos

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}(e^{jn\omega_0 t})$$

Al substituir la transformada de $e^{jn\omega_0 t}$ de la ecuación 1.101, obtenemos

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) \qquad (1.102)$$

Este es un resultado significativo. La relación de 1.102 establece que *la función de densidad espectral o la transformada de Fourier de una señal periódica está compuesta por impulsos localizados en las frecuencias armónicas de dicha señal siendo la intensidad de cada impulso igual a* 2π *multiplicado por el valor del coeficiente correspondiente de la serie exponencial de Fourier.* La secuencia de impulsos equidistantes no es más que la forma límite de una función de densidad continua. Este resultado no nos sorprende, pues, sabemos que una función periódica contiene solamente componentes de frecuencias armónicas discretas.

Ejemplo 1.7

Encuéntrese la transformada de Fourier de una función pulso rectangular periódica (pulso rectangular de duración τ segundos, que se repite cada T segundos). La transformada de Fourier de esta función está dada por (ecuación 1.66b)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

en donde

$$F_n = \frac{A\tau}{T} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$$

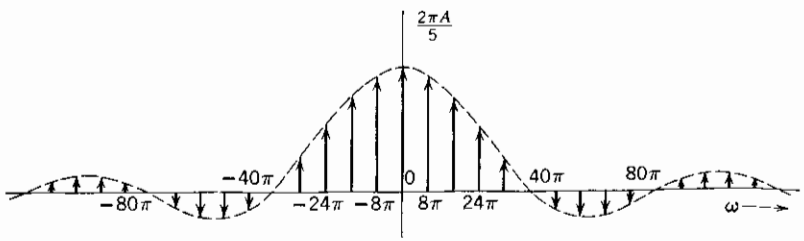


Figura 1.34 Función de densidad espectral del pulso rectangular periódico.

De la ecuación 1.102, se deduce que la transformada de Fourier de esta función es:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{2\pi A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \delta(\omega - n\omega_0) \qquad (1.103)$$

Así, la transformada de Fourier de $f(t)$ consta de impulsos localizados en $\omega = 0, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \ldots, \pm n\omega_0, \ldots$, etc. La magnitud o intensidad del impulso localizado en $\omega = n\omega_0$ está dada por $2\pi(A\pi/T)Sa(n\pi\tau/T)$.

En la figura 1.34 se representa el espectro en el caso $\tau = 1/20$ segundo y $T = 1/4$ segundo, donde $\omega_0 = 8\pi$.

Ejemplo 1.8

Se encontrará la transformada de Fourier de una secuencia o tren de impulsos equidistantes de intensidad unitaria a intervalos de T segundos como la que se ilustra

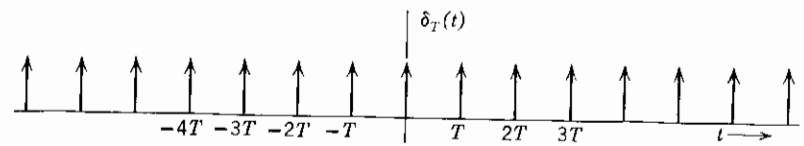


Figura 1.35 Secuencia de funciones impulso uniformes y equidistantes.

en la figura 1.35. Esta función tiene mucha importancia en la teoría de muestreo y por eso conviene denotarla con el símbolo especial $\delta_T(t)$. Así,

$$\delta_T(t) = \delta(t) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T) + \cdots + \delta(t - nT) + \cdots$$
$$+ \delta(t + T) + \delta(t + 2T) + \cdots + \delta(t + nT) + \cdots$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \qquad (1.104)$$

Esta es una función periódica cuyo período es T. Encontraremos primero su serie de Fourier.

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

en donde

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

La función $\delta_T(t)$ en el intervalo $(-T/2, T/2)$ es simplemente $\delta(t)$. Entonces

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Por la propiedad de muestreo de la función impulso (ecuación 1.90a) la ecuación anterior se reduce a

$$F_n = \frac{1}{T}$$

En consecuencia, F_n es constante. Se deduce, por lo tanto, que el tren de impulsos con período T contiene componentes de frecuencias $\omega = 0$, $\pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \ldots, \pm n\omega_0, \ldots$, etc., $(\omega_0 = 2\pi/T)$.

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0} \tag{1.105}$$

Para encontrar la transformada de Fourier de $\delta_T(t)$, recurrimos a la ecuación 1.102. Como en este caso $F_n = 1/T$, es evidente que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\delta_T(t)] &= 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\delta(\omega - n\omega_0)\\ &= \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0)\\ &= \omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0)\\ &= \omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)\end{aligned} \tag{1.106}$$

Esa relación es muy significativa. Establece que la transformada de Fourier de un tren de impulsos de intensidad unitaria con período T es otro tren de impulsos de intensidad ω_0 a intervalos de ω_0 rad/segundos $(\omega_0 = 2\pi/T)$. La secuencia de impulsos con períodos $T = 1/2$ y $T = 1$ segundos y sus respectivas transformadas se muestran en la figura 1.36. Evidentemente, a medida que aumenta el período del tren de impulsos, el espectro de frecuencias se vuelve más denso.

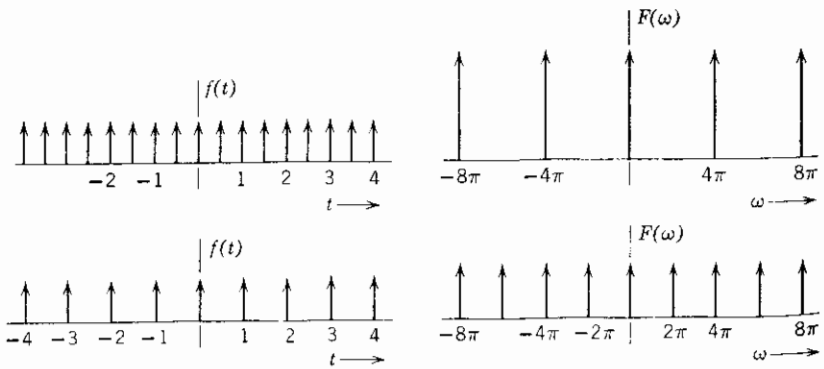


Figura 1.36 Funciones periódicas de impulsos y sus transformadas de Fourier.

En la tabla 1.1A se presentan diferentes funciones del tiempo y sus funciones de densidad espectral correspondientes. Obsérvese que en la mayoría de las señales de dicha tabla, $F(\omega)$ es real, por lo que sólo es necesario un diagrama. La tabla 1.1B es una lista de las transformadas de algunas funciones importantes

1.12 ALGUNAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformada de Fourier constituye un instrumento para expresar una señal en términos de sus componentes exponenciales de diferentes frecuencias. Ya se ha indicado que dicha transformada no es sino otra forma de describir una función. Por lo tanto, se tienen ya dos descripciones, la del dominio del tiempo y la del dominio de la frecuencia para representar la función. Es ilustrativo estudiar lo que ocurre en uno de los dominios al efectuar ciertas operaciones con la función en el otro; por ejemplo, ¿cómo se afecta el espectro de una función si ésta fuese derivada o desplazada en el dominio del tiempo? A continuación trataremos de evaluar los efectos que algunas operaciones importantes con la función en uno de los dominios tienen sobre el otro.

Es oportuno hacer notar que existe cierta simetría en las ecuaciones correspondientes a ambos dominios. Esto puede verse fácilmente de las ecuaciones que definen a la transformada de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

y (1.107)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

Por lo tanto es de esperarse que se refleje la misma simetría en las propiedades en cuestión. Por ejemplo, es de suponerse que el efecto en el dominio de la frecuencia, causado por una diferenciación en el dominio del tiempo, se parezca al efecto en el dominio del tiempo, causado por una diferenciación en el dominio de la frecuencia y veremos que así sucede.

Por conveniencia, denotaremos la correspondencia entre ambos dominios por una flecha bidireccional; es decir, la notación

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

significa que $F(\omega)$ es la transformada directa de Fourier de $f(t)$ y que $f(t)$ es la transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$ según la relación de la ecuación 1.107.

1. Propiedad de simetría

Si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

entonces

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \tag{1.108}$$

TABLA 1.1A

Algunas funciones del tiempo y las correspondientes funciones de densidad espectral

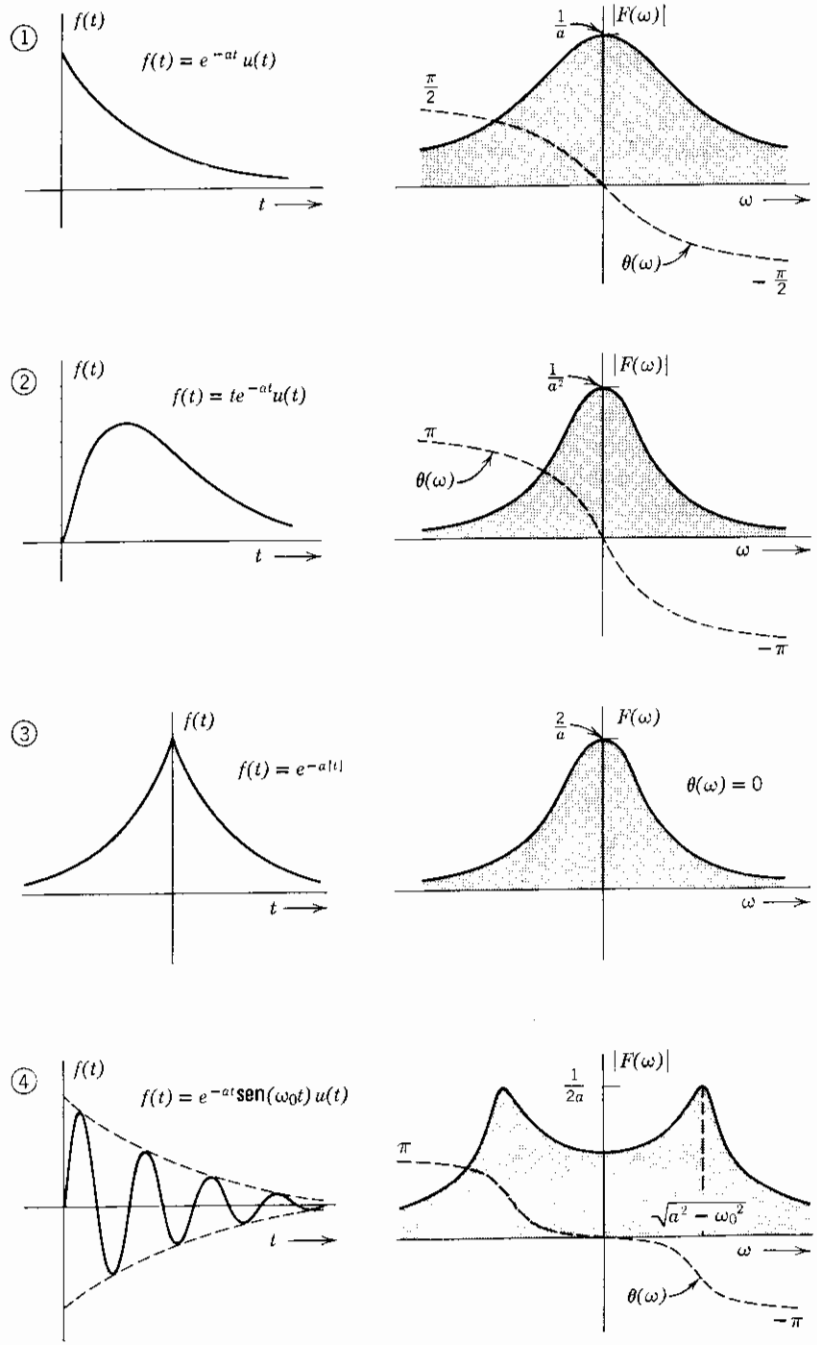


TABLA 1.1A (continuación)

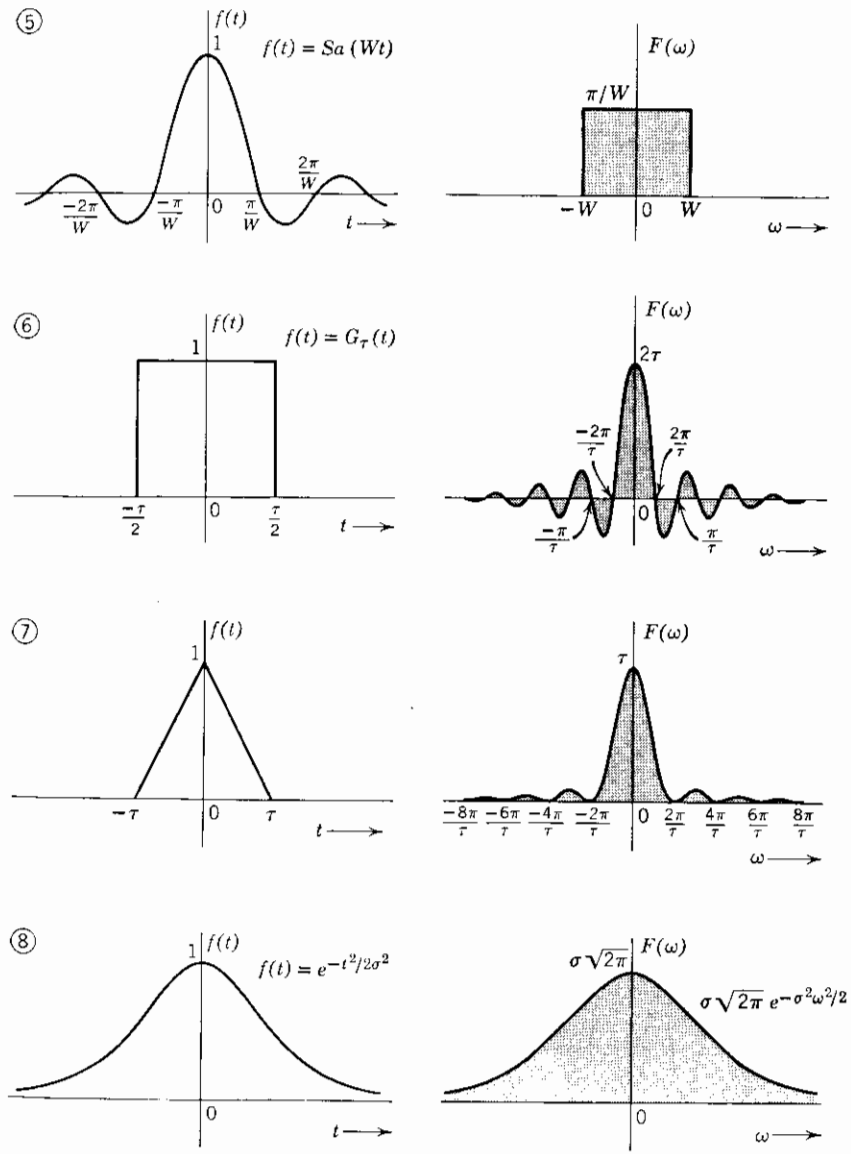
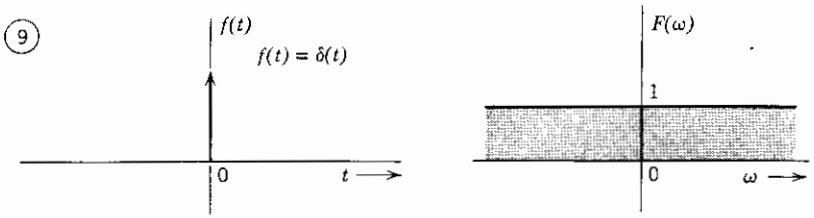
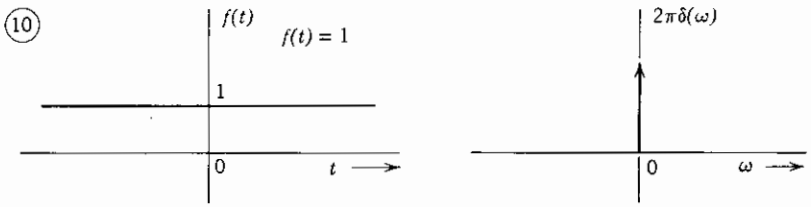


TABLA 1.1A (continuación)

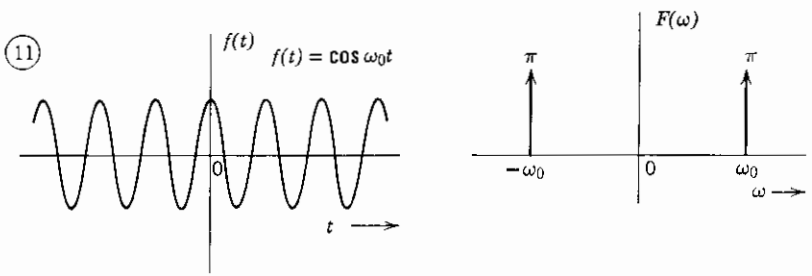
(9)



(10)



(11)



(12)

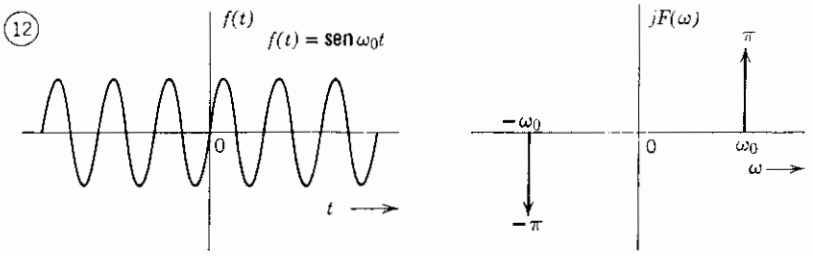
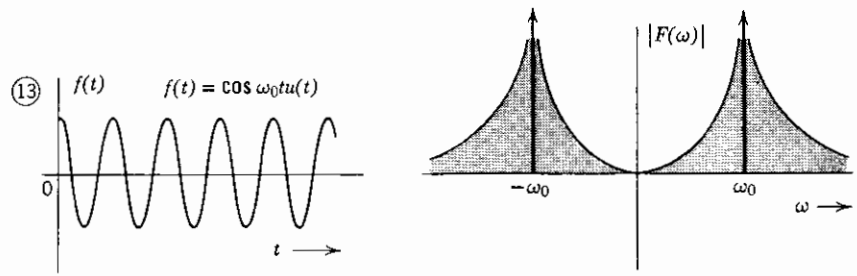
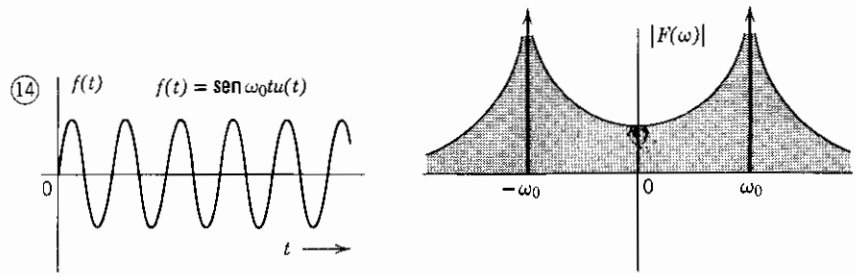


TABLA 1.1A (continuación)

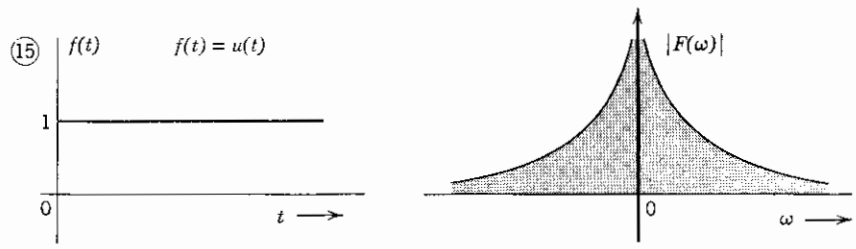
(13)



(14)



(15)



(16)

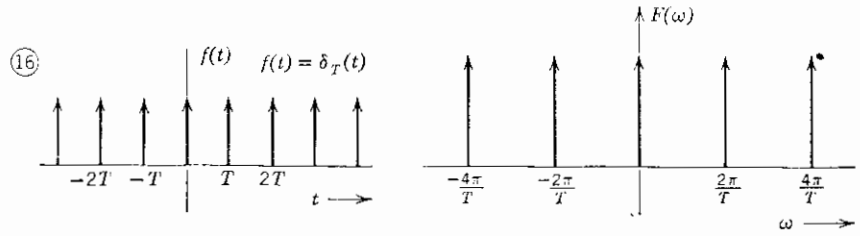


TABLA 1.1B
Transformadas de Fourier

$f(t)$	$F(\omega)$
1. $e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{a + j\omega}$
2. $te^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{(a + j\omega)^2}$
3. $\lvert t\rvert$	$\dfrac{-2}{\omega^2}$
4. $\delta(t)$	1
5. 1	$2\pi\,\delta(\omega)$
6. $u(t)$	$\pi\,\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$
7. $\cos\omega_0 t\,u(t)$	$\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \dfrac{j\omega}{{\omega_0}^2 - \omega^2}$
8. $\operatorname{sen}\omega_0 t\,u(t)$	$\dfrac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \dfrac{\omega_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2}$
9. $\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
10. $\operatorname{sen}\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
11. $e^{-at}\operatorname{sen}\omega_0 t\,u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + {\omega_0}^2}$
12. $\dfrac{W}{2\pi}Sa\dfrac{(Wt)}{2}$	$G_W(\omega)$
13. $G_\tau(t)$	$\tau Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$
14. $1 - \dfrac{\lvert t\rvert}{\tau} \cdots \lvert t\rvert < \tau$ $0 \quad \cdots \lvert t\rvert > \tau$	$\tau\left[Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)\right]^2$
15. $e^{-a\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$
16. $e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
17. $\delta_T(t)$	$\omega_0\,\delta_{\omega_0}(\omega) \qquad \left(\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}\right)$

Demostración. De la ecuación 1.107 se desprende que

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t}\,d\omega$$

Ya que en esta integral, ω es una variable simbólica la podemos substituir por cualquier otra variable x. Por lo tanto,

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-jxt}\,dx$$

entonces

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-jx\omega}\,dx$$

De la misma manera, substituyendo la variable simbólica x por otra variable t, obtenemos

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t}\,dt$$
$$= \mathscr{F}[F(t)]$$

así,

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \tag{1.109}$$

Se manifiesta claramente la propiedad de simetría cuando $f(t)$ es una función par. En ese caso, $f(-\omega) = f(\omega)$ y la ecuación 1.109 se reduce a

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$$

Se ha representado esa propiedad en la figura 1.37.

Puede verse fácilmente que la transformada de Fourier de una función pulso rectangular es una función de muestreo y que la transformada de Fourier de una función de muestreo es una función pulso rectangular. La propiedad de simetría se cumple en todas las funciones $f(t)$ pares. Si $f(t)$ no es función par, entonces la simetría no es perfecta y sólo existe en cierto grado, como se ve a partir de la ecuación 1.109

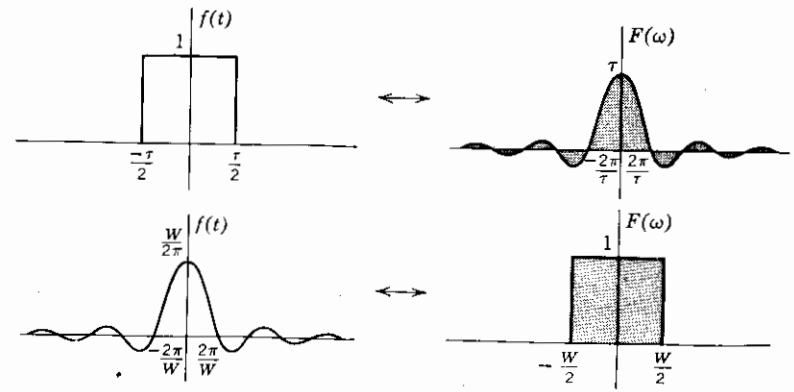


Figura 1.37 Propiedad de simetría de la transformada de Fourier.

2. Propiedad de linealidad

Si

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$$

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

entonces, para cualesquiera constantes arbitrarias a_1 y a_2,

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) \tag{1.110}$$

Esto resulta obvio. La propiedad de linealidad también es válida para las sumas finitas:

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \cdots + a_n f_n(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) + \cdots + a_n F_n(\omega)$$

3. Propiedad escalar

Si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

entonces, para una constante real a,

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{1.111}$$

Demostración. Si a es una constante real positiva,

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t}\, dt$$

Sea $x = at$. Entonces, para la constante positiva a,

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{(-j\omega/a)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Por lo tanto

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

De igual manera, se puede demostrar que, si $a < 0$,

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{-a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

En consecuencia,

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

El significado de la propiedad escalar. La función $f(at)$ representa $f(t)$ comprimida en la escala del tiempo por el factor a. En la misma forma, la función $F(\omega/a)$ representa la función $F(\omega)$ expandida en la escala de frecuencia por el mismo factor a. En consecuencia, la propiedad escalar establece que el comprimir una función en el dominio del tiempo equivale a una expansión en el dominio de la frecuencia y viceversa. Este resultado también es intuitivamente obvio, pues el comprimir en el dominio del tiempo en determinado factor significa que la función varía más rápidamente en ese mismo factor y, en consecuencia, las componentes de frecuencia se incrementan proporcionalmente. En igual forma si, en la escala del tiempo, expandimos una función, ésta varía más lentamente y sus componentes en el espectro disminuyen, o sea que el espectro se comprime. Como ejemplo considérese la señal cos $\omega_0 t$ que contiene componentes de frecuencia en $\pm\omega_0$. La señal cos $2\omega_0 t$ representa una compresión de cos $\omega_0 t$ en un factor de dos y sus componentes de frecuencia se encuentran en $\pm 2\omega_0$. Por lo tanto es evidente que se ha expandido el espectro de frecuencia en un factor de dos. El efecto de la propiedad escalar se ilustra en la figura 1.38.

En el caso especial en que $a = -1$, de la propiedad escalar se deduce que

$$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega) \tag{1.112}$$

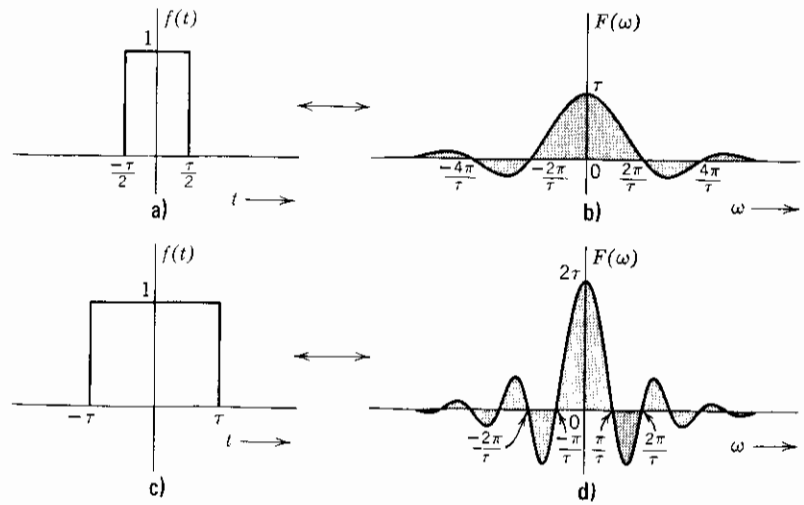


Figura 1.38 Comprimir en el dominio del tiempo equivale a una expansión en el dominio de la frecuencia.

Ejemplo 1.9

Encuéntrese la transformada inversa de Fourier de sgn (ω) y $u(\omega)$ mediante las propiedades de simetría y escalar. A partir de la ecuación 1.95, tenemos que

$$\text{sgn } (t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

Si aplicamos a esta ecuación la propiedad de simetría (ecuación 1.109), obtenemos

$$\frac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi \operatorname{sgn}(-\omega)$$

Pero sgn $(-\omega) = -$ sgn (ω). Por lo tanto,

$$\frac{j}{\pi t} \leftrightarrow \operatorname{sgn}(\omega) \tag{1.113}$$

y también

$$u(\omega) = \tfrac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn}(\omega)]$$

Entonces,

$$\mathscr{F}^{-1}[u(\omega)] = \tfrac{1}{2}\{\mathscr{F}^{-1}[1] + \mathscr{F}^{-1}[\operatorname{sgn}(\omega)]\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}$$

Por lo tanto,

$$\left[\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2\pi jt}\right] \leftrightarrow u(\omega) \tag{1.114}$$

4. Propiedad de desplazamiento en la frecuencia

Si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

entonces

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0) \tag{1.115}$$

Demostración.

$$\mathscr{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}\,dt$$

$$= F(\omega - \omega_0)$$

El teorema establece que un desplazamiento de ω_0 en el dominio de la frecuencia equivale a multiplicar por $e^{j\omega_0 t}$ en el dominio del tiempo. Es evidente que la multiplicación por el factor $e^{j\omega_0 t}$ traslada todo el espectro de frecuencia $F(\omega)$ en la cantidad ω_0. Por eso, a este teorema también se le llama *teorema de traslación de frecuencia.*

En los sistemas de comunicación, muy a menudo hay que trasladar el espectro de frecuencia. Esto se suele llevar a cabo multiplicando la señal $f(t)$ por una señal sinusoidal. El proceso se llama *modulación.* Puesto que se puede expresar una señal sinusoidal como suma de exponenciales, es claro que la multiplicación de la señal $f(t)$ por una señal sinusoidal (modulación) trasladará todo el espectro de frecuencias. Esto se demuestra fácilmente si se observa la identidad

$$f(t)\cos\omega_0 t = \tfrac{1}{2}[f(t)e^{j\omega_0 t} + f(t)e^{-j\omega_0 t}]$$

Por el teorema de traslación de frecuencia, se deduce que, si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

entonces

$$f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \tfrac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] \tag{1.116a}$$

De igual manera, se puede demostrar que

$$f(t)\operatorname{sen}\omega_0 t \leftrightarrow \frac{j}{2}[F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)] \tag{1.116b}$$

Es así como el proceso de la modulación traslada el espectro de frecuencias en la cantidad $\pm\omega_0$. Este resultado es muy útil en la teoría de la comunicación. En la figura 1.39, se muestra un ejemplo de traslación de frecuencia producida por la modulación. La ecuación 1.116 también se conoce con el nombre de *teorema de la modulación*

5. Propiedad de desplazamiento en el tiempo

Si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

entonces

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0} \tag{1.117}$$

Demostración.

$$\mathscr{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t}\,dt$$

Sea

$$t - t_0 = x$$

Entonces

$$\mathscr{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)}\,dx$$

$$= F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

El teorema establece que, si se desplaza una función en el dominio del tiempo en la cantidad de t_0 segundos, entonces no se altera su espectro de magnitud $|F(\omega)|$, pero el espectro de fase sufre un cambio de $-\omega t_0$. Este resultado es intuitivo, pues el desplazamiento de la función en el dominio del tiempo no afecta las componentes de frecuencia de la señal, a pesar de que cada componente se desplaza en la cantidad t_0. Resumiendo, un desplazamiento de t_0 en el dominio del tiempo es equivalente a una desviación de fase de $-\omega t_0$, es decir, a la multiplicación por $e^{-j\omega t_0}$ en el dominio de la frecuencia.

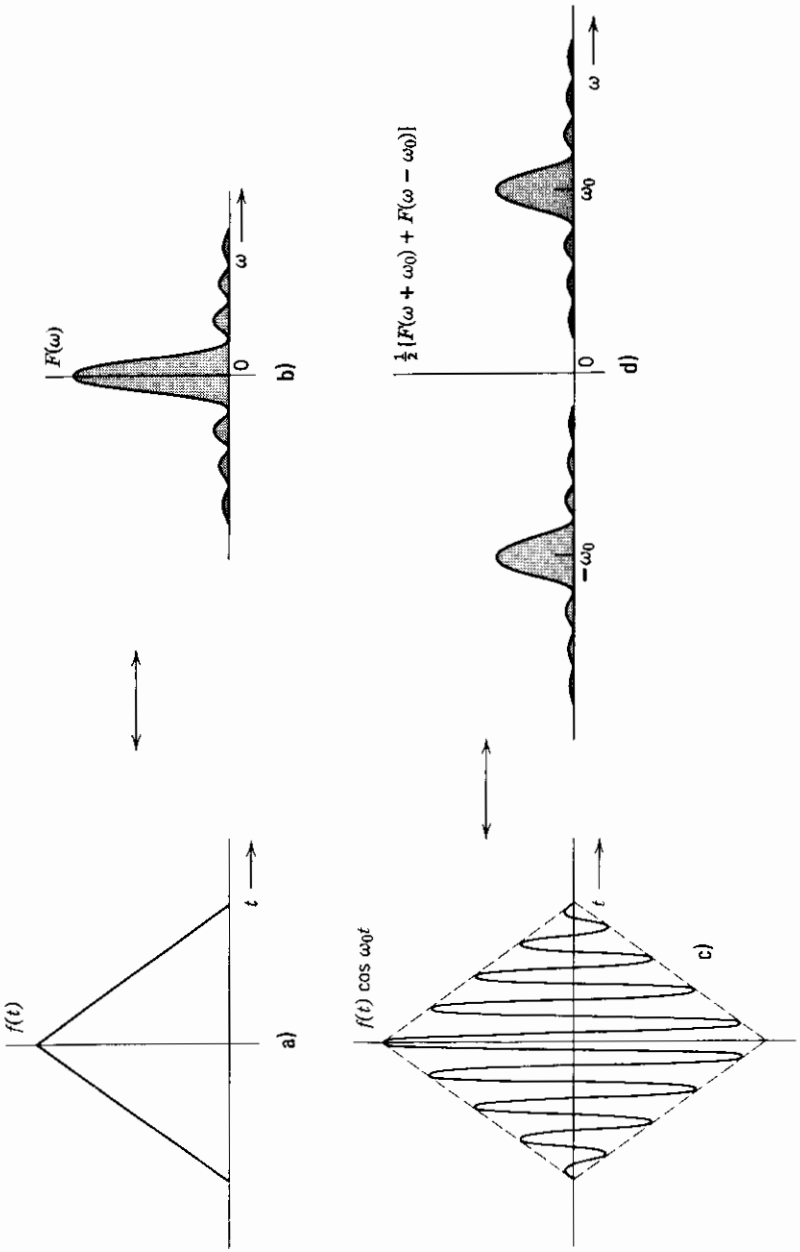


Figura 1.39 Efecto de la modulación en el espectro de frecuencias.

Ejemplo 1.10

Encontrar la transformada de Fourier del pulso rectangular que se muestra en la figura 1.40. Dicho pulso está representado por la función $G_\tau(t)$, desplazada en $\tau/2$ segundos. En consecuencia, se puede expresar como $G_\tau(t-\tau/2)$. De acuerdo con la tabla 1.1B y por la propiedad de desplazamiento en el tiempo, tenemos

$$G_\tau\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau/2}$$

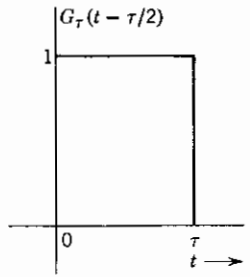


Figura 1.40

Obsérvese la dualidad entre las propiedades de desplazamiento en la frecuencia y en el tiempo. También hay una versión dual del teorema de la modulación. Su enunciado es:

$$\tfrac{1}{2}[f(t+T)+f(t-T)] \leftrightarrow F(\omega)\cos\omega T \tag{1.118}$$

La demostración de la ecuación 1.118 se deja como ejercicio para el lector.

6. Diferenciación en el tiempo y la frecuencia

Si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

entonces*

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow (j\omega)F(\omega) \tag{1.119a}$$

y

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(\omega) \tag{1.119b}$$

siempre y cuando† $F(\omega)/\omega$ esté limitada en $\omega = 0$. Esto equivale a decir que $F(0) = 0$ o que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 0$$

* La ecuación 1.119a no garantiza la existencia de la transformada de df/dt. Implica solamente que, si existe, está dada por $j\omega F(\omega)$.

† Si esta condición no se satisface, entonces se modifica la ecuación 1.119b. Véase el problema 42 al final del capítulo.

Demostración.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

Por lo tanto

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

Al cambiar el orden de diferenciación e integración, obtenemos

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

De esta ecuación se deduce evidentemente que

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

De la misma manera, se puede extender el resultado a la derivada de orden n.

$$\frac{d^n f}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega) \qquad (1.120)$$

Ahora, considérese la función

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$$

Entonces

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t)$$

Por lo tanto, si

$$\varphi(t) \leftrightarrow \Phi(\omega)$$

entonces

$$f(t) \leftrightarrow j\omega\Phi(\omega)$$

Es decir,

$$F(\omega) = j\omega\Phi(\omega)$$

En consecuencia,

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{j\omega}F(\omega)$$

y, así,

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(\omega)$$

Nótese que el resultado sólo es válido si existe $\Phi(\omega)$, es decir, si $\varphi(t)$ es absolutamente integrable. Esto sólo será posible si

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$$

Es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 0$$

Lo que equivale a la condición $F(0) = 0$, ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = F(\omega)\big|_{\omega=0}$$

Los resultados de los teoremas de diferenciación e integración en el tiempo, en la forma en que lo expresan las ecuaciones 1.118 y 1.119, son también obvios intuitivamente. La transformada de Fourier expresa una función $f(t)$ en términos de una suma continua de funciones exponenciales de la forma $e^{j\omega t}$. En consecuencia la derivada de $f(t)$ es igual a la suma continua de las derivadas de cada una de las componentes exponenciales. Puesto que la derivada de una función exponencial $e^{j\omega t}$ es igual a $j\omega e^{j\omega t}$, entonces el proceso de diferenciación de $f(t)$ equivale a multiplicar cada componente exponencial por $j\omega$. Por lo tanto,

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

Se hace una argumentación parecida en el caso de la integración.

Se concluye que diferenciar en el dominio del tiempo equivale a multiplicar por j^{ω} en el dominio de la frecuencia y que integrar en el dominio del tiempo equivale a dividir entre j^{ω} en el de la frecuencia. En el siguiente ejemplo, veremos la utilidad del teorema de diferenciación en el tiempo para obtener la transformada de Fourier en el caso de algunas funciones continuas por tramos.

Ejemplo 1.11

Determinar la transformada de Fourier de la función trapezoidal de la figura 1.41. Diferenciamos dos veces dicha función para obtener una secuencia de impulsos. Es fácil obtener la transformada de los impulsos. En la figura 1.41 vemos claramente que

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{A}{(b-a)}[\delta(t+b) - \delta(t+a) - \delta(t-a) + \delta(t-b)] \qquad (1.121)$$

La transformada de Fourier de un impulso unitario es 1. Por lo tanto, según el teorema de desplazamiento en el tiempo, obtenemos

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

Al emplear este resultado y el teorema de diferenciación en el tiempo, se puede escribir la transformada de la ecuación 1.121 como

$$(j\omega)^2 F(\omega) = \frac{A}{(b-a)}(e^{j\omega b} - e^{j\omega a} - e^{-j\omega a} + e^{-j\omega b})$$

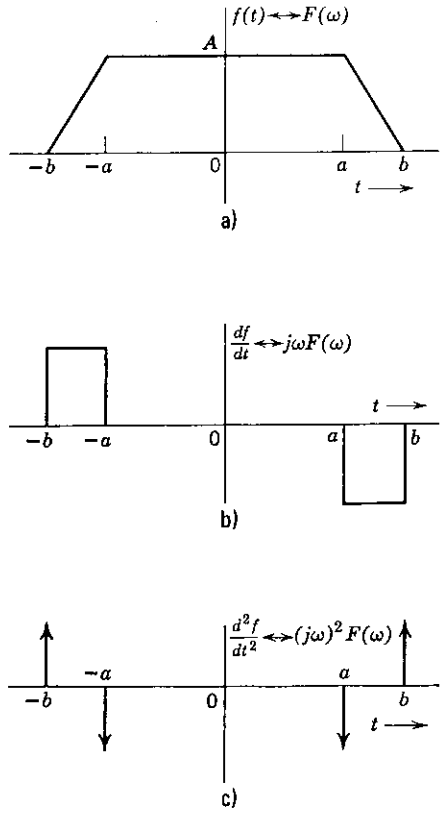


Figura 1.41

de donde obtenemos

$$F(\omega) = \frac{2A}{(b-a)}\left(\frac{\cos a\omega - \cos b\omega}{\omega^2}\right)$$

Este problema nos sugiere un método numérico para obtener la transformada de Fourier de una función $f(t)$. Se puede aproximar cualquier función $f(t)$ mediante segmentos de recta, como se muestra en la figura 1.42. Se obtiene una aproximación tan buena como se desee, con sólo incrementar el número de segmentos. La segunda derivada de la función aproximada produce un tren de impulsos cuya transformada encontramos rápidamente. La transformada $F(\omega)$ de la función que se busca es $1/(j\omega)^2$ multiplicada por la transformada de la segunda derivada.

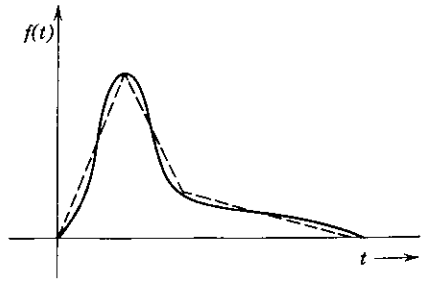


Figura 1.42 Aproximación a una función mediante segmentos de línea recta.

7. Diferenciación en la frecuencia

Si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

entonces

$$-jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF}{d\omega} \tag{1.122}$$

Demostración.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Por lo tanto,

$$\frac{dF}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Al cambiar el orden de diferenciación e integración, obtenemos

$$\frac{dF}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} -jtf(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

De la ecuación anterior se deduce que

$$-jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF}{d\omega}$$

Si extendemos el resultado a derivadas de orden superior:

$$(-jt)^n f(t) = \frac{d^nF}{d\omega^n}$$

Se concluye que una diferenciación en el dominio de la frecuencia equivale a una multiplicación por $-jt$ en el dominio del tiempo.

8. El teorema de la convolución

El teorema de la convolución es quizás uno de los instrumentos más eficaces en el análisis armónico; con su empleo, se obtienen con facilidad muchos resultados importantes. En este libro lo aplicaremos con frecuencia.

Dadas dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, podemos formar la integral siguiente:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau \tag{1.123}$$

Esta integral, llamada integral de convolución, define la convolución de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, y también se expresa simbólicamente como

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \tag{1.124}$$

Posteriormente se considerará el significado físico y la interpretación gráfica de la convolución. Por lo pronto, enunciaremos y demostraremos el teorema. También en este caso hay dos teoremas: de la convolución en el tiempo y de la convolución en la frecuencia.

Teorema de la convolución en el tiempo. Si

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$$

y

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau)\, d\tau \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) \tag{1.125a}$$

es decir

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) \tag{1.125b}$$

Demostración.

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau)\, d\tau \right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f_2(t - \tau)\, dt \right] d\tau$$

Por la propiedad de desplazamiento en el tiempo (ecuación 1.117), la integral entre paréntesis del segundo miembro es igual a $F_2(\omega)e^{-j\omega\tau}$, por lo que

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} F_2(\omega)\, d\tau$$

$$= F_1(\omega) F_2(\omega)$$

Teorema de la convolución en la frecuencia. Si

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$$

y

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

entonces

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u)\, du \tag{1.126a}$$

O sea

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)] \tag{1.126b}$$

Este teorema se demuestra en la misma forma que el anterior, debido a la simetría entre las transformadas directa e inversa de Fourier.

Concluimos que la convolución de dos funciones en el dominio del tiempo equivale a la multiplicación de sus espectros en el dominio de la frecuencia y que la multiplicación de las dos funciones en el dominio del tiempo equivale a la convolución de sus espectros en el dominio de la frecuencia.

La tabla 1.2 contiene algunas de las propiedades importantes de la transformada de Fourier. Nótense la simetría y la correspondencia entre los dominios del tiempo y la frecuencia.

TABLA 1.2

Operación	$f(t)$	$F(\omega)$
1. Escalar	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
2. Desplazamiento en el tiempo	$f(t - t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
3. Desplazamiento en la frecuencia	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
4. Diferenciación en el tiempo	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
5. Diferenciación en la frecuencia	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n F}{d\omega^n}$
6. Integración en el tiempo	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{(j\omega)} F(\omega)$
7. Convolución en el tiempo	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
8. Convolución en la frecuencia.	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}[F_1(\omega) * F_2(\omega)]$

1.13 ALGUNAS RELACIONES DE LA CONVOLUCION

A continuación se presentan algunas leyes del álgebra de la convolución que, como se verá, sigue lineamientos similares a los de la multiplicación ordinaria, operación sugerida por su representación simbólica.

1. Ley conmutativa

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \tag{1.127}$$

Se demuestra fácilmente esa relación:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau)\, d\tau$$

Al substituir la variable τ por $t - x$, obtenemos

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) f_1(t - x)\, dx$$

$$= f_2(t) * f_1(t)$$

2. Ley distributiva

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \qquad (1.128)$$

La demostración es obvia

3. Ley asociativa

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) \qquad (1.129)$$

La ley se deriva del teorema de la convolución y del hecho de que

$$F_1(\omega)[F_2(\omega)F_3(\omega)] = [F_1(\omega)F_2(\omega)]F_3(\omega)$$

1.14 INTERPRETACION GRAFICA DE LA CONVOLUCION

La interpretación gráfica de la convolución es muy útil en el análisis de sistemas así como en la teoría de la comunicación. Permite visualizar los resultados de muchas relaciones abstractas, sobre todo en la teoría de la comunicación. Si en los sistemas lineales sólo se conocen en forma gráfica $f(t)$ y $h(t)$ entonces la convolución gráfica resulta muy útil. Como ejemplo de esto, supongamos que $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son los pulsos rectangular y triangular de la figura 1.43a. Encontraremos gráficamente la convolución $f_1(t) * f_2(t)$. Por definición,

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau)\, d\tau \qquad (1.130)$$

En la integral de convolución, τ es la variable independiente (ecuación 1.130). En la figura 1.43b, se muestran las funciones $f_1(\tau)$ y $f_2(-\tau)$. Nótese que se obtiene $f_2(-\tau)$ al girar $f_2(\tau)$ alrededor del eje vertical que pasa por el origen. El término $f_2(t - \tau)$ representa la función $f_2(-\tau)$ desplazada t segundos a lo largo del eje τ. En la figura 1.43c, se ha indicado $f_2(t_1 - \tau)$. El valor de la integral de convolución en $t = t_1$ está dado por la integral de la ecuación 1.130, evaluada en $t = t_1$, y representa el área bajo la curva producto de $f_1(\tau)$ y $f_2(t_1 - \tau)$. Dicha área es la región sombreada de la figura 1.43d. El valor de $f_1(t) * f_2(t)$ en $t = t_1$, es igual a esa área sombreada y se le ha representado en la figura 1.43f.

Para encontrar los valores de la función $f_1(t) * f_2(t)$, se seleccionan diferentes valores de t, se desplaza la función $f_2(-\tau)$ según esos valores y se calcula el área bajo las curvas producto correspondientes.

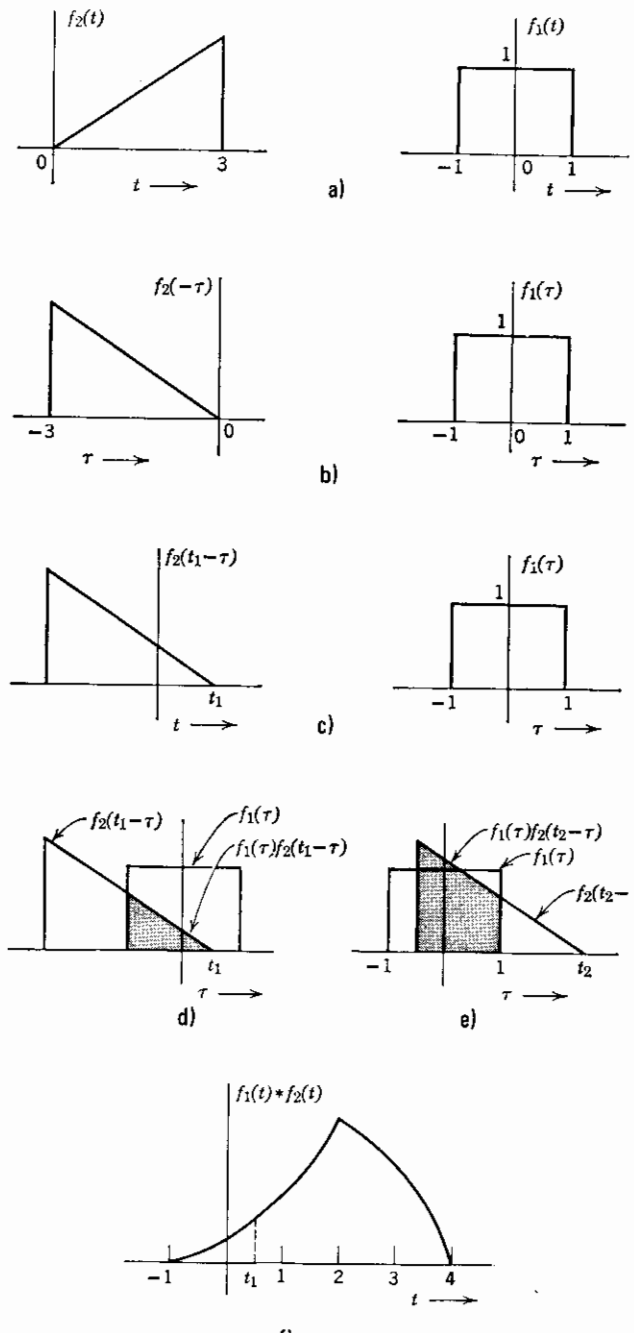


Figura 1.43

Estas áreas representan el valor de la función de convolución en los valores respectivos de t.
La gráfica del área bajo la curva producto expresada como función de t representa la función de convolución $f_1(t) * f_2(t)$ que se busca.

El mecanismo grafico de la convolución puede considerarse como si la función $f_2(-\tau)$ fuese un cuadro rígido que se desplaza en t_1 segundos por el eje τ. Esta función se multiplica por $f_1(\tau)$ y el área bajo la curva es el valor de la función de convolución en $t = t_1$. Por lo tanto, para encontrar el valor de $f_1(t) * f_2(t)$ en cualquier instante $t = t_0$, trasladamos en t_0 segundos por el eje τ al cuadro rígido que representa a $f_2(-\tau)$ y multiplicamos esta función por $f_1(\tau)$. El área bajo la curva producto es el valor que buscamos de $f_1(t) * f_2(t)$ en $t = t_0$. Para encontrar la función de convolución trasladamos sucesivamente el cuadro en diferentes cantidades y evaluamos las áreas bajo la curva producto en cada una de las posiciones. Es así como la gráfica del área expresada en función del desplazamiento del cuadro representa la función de convolución $f_1(t) * f_2(t)$. En resumen:

1. Gírese la función $f_2(\tau)$ alrededor del eje vertical que pasa por el origen para obtener la función $f_2(-\tau)$.
2. Considérese a la función girada como un cuadro rígido que se desplazará sobre el eje τ en una cantidad t_0. Este cuadro rígido representa aquí la función $f_2(t_0 - \tau)$.
3. La función, representada por el cuadro rígido desplazado, multiplicada por $f_1(\tau)$ es la función $f_1(\tau)f_2(t_0 - \tau)$ y el área bajo esta curva producto está dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t_0 - \tau)\, d\tau = [f_1(t) * f_2(t)]_{t=t_0}$$

4. Repítase este procedimiento para diferentes valores de t, desplazando sucesivamente el cuadro en diferentes cantidades, obteniendo los valores de la función de convolución $f_1(t) * f_2(t)$ para esos valores de t.

Nótese que, para encontrar la función de convolución $f_1(t) * f_2(t)$ para valores positivos de t, el cuadro se desplaza por la parte positiva del eje τ mientras que, para valores negativos de t, se desplaza por la parte negativa.

Según la ecuación 1.127 la convolución de $f_1(t)$ con $f_2(t)$ es igual a la convolución de $f_2(t)$ con $f_1(t)$. Es decir,

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

Por lo tanto, también podríamos mantener fija $f_2(\tau)$ y tomar la imagen reflejada de $f_1(\tau)$ en la convolución gráfica de la figura 1.43. En los dos casos, obtendremos el mismo resultado.

1.15 CONVOLUCION DE UNA FUNCION CON LA FUNCION IMPULSO UNITARIO

La convolución de una función $f(t)$ con la función impulso unitario $\delta(t)$ resulta en la función misma $f(t)$. Esto se comprueba fácilmente con la propiedad de muestreo indicada por la ecuación 1.90b.

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \delta(t - \tau)\, d\tau$$
$$= f(t)$$

Este resultado también se deduce del teorema de convolución en el tiempo y del hecho de que

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \qquad \text{y} \qquad \delta(t) \leftrightarrow 1$$

Por lo tanto,

$$f(t) * \delta(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

En consecuencia,

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \tag{1.131}$$

Este resultado también es obvio gráficamente. Como el impulso está concentrado en un punto y tiene área unitaria, la integral de convolución de la ecuación 1.130 es igual a la función $f(t)$. Así, la convolución de la función

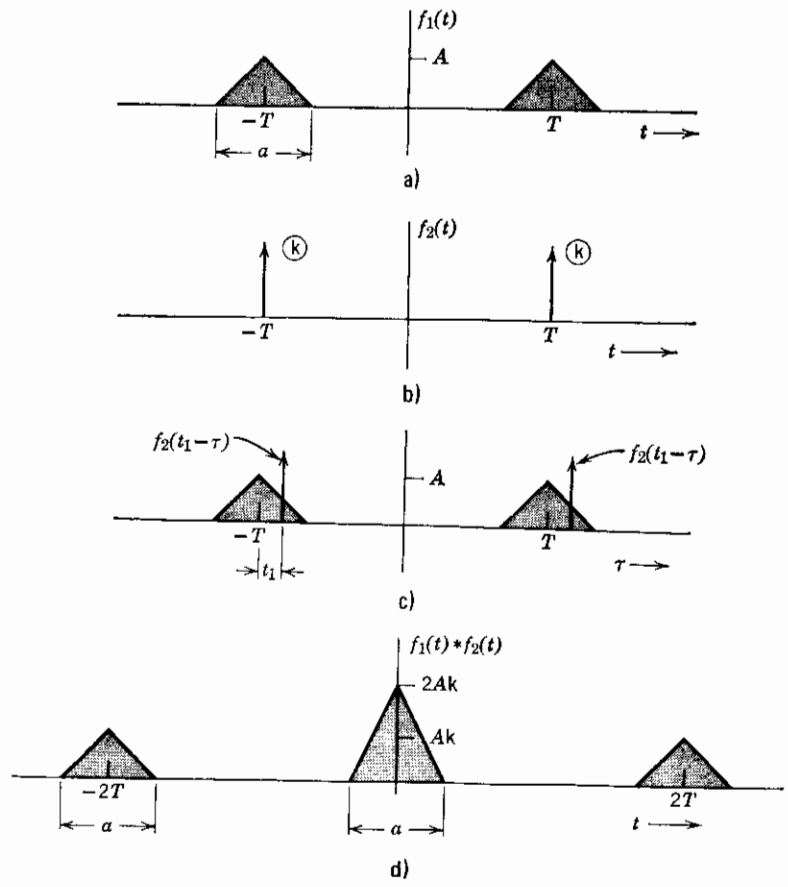


Figura 1.44

impulso unitario $f(t)$ reproduce la función $f(t)$. Al generalizar la ecuación 1.131, se obtiene

$$f(t) * \delta(t - T) = f(t - T) \tag{1.132a}$$

$$f(t - t_1) * \delta(t - t_2) = f(t - t_1 - t_2) \tag{1.132b}$$

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2) \tag{1.132c}$$

Ejemplo 1.12

Encontrar gráficamente la convolución de $f_1(t)$ (figura 1.44a) con dos impulsos de intensidad k cada uno, ilustrados en la figura 1.44b.

Seguiremos el procedimiento de la convolución gráfica descrito en la sección 1.14; giramos $f_2(\tau)$ alrededor del eje vertical para obtener $f_2(-\tau)$. Como $f_2(\tau)$ es función par de τ, $f_2(-\tau) = f_2(\tau)$. La convolución de $f_1(\tau)$ con $f_2(\tau)$ se reduce así a la convolución de $f_1(\tau)$ con dos impulsos. De la propiedad de la función impulso para reproducir por convolución la función (ecuación 1.131) se desprende claramente que cada impulso genera un pulso triangular en el origen ($t = 0$) de altura Ak. Por lo tanto, la altura neta del pulso triangular en el origen es $2Ak$. Puesto que la función $f_2(t - \tau)$ se sigue desplazando en dirección positiva, el impulso originalmente localizado en $-T$ se encuentra con el pulso triangular en $\tau = T$ y reproduce un pulso triangular en $t = 2T$ de altura Ak. De la misma manera, el impulso que estaba en T reproduce un pulso triangular en $t = 2T$, de altura Ak. El resultado final de la convolución se muestra en la figura 1.44d.

1.16 EL TEOREMA DE MUESTREO

El teorema de muestreo tiene un profundo significado en la teoría de la comunicación. Su enunciado es el siguiente:

Una señal limitada en banda que no contiene componentes espectrales mayores que la frecuencia f_mHz está determinada en forma única por sus valores en intervalos uniformes menores de $1/2f_m$ segundos.

Este teorema se conoce como el *teorema de muestreo uniforme* pues se refiere a la especificación de una señal dada mediante muestras suyas tomadas a intervalos uniformes de $1/2f_m$ segundos.* Esto implica que, si la transformada de Fourier de $f(t)$ vale cero fuera de determinada frecuencia $\omega_m = 2\pi f_m$, entonces toda la información acerca de $f(t)$ queda contenida en sus muestras uniformemente espaciadas a intervalos menores de $1/2f_m$ segun-

* Este teorema es un caso especial del teorema general de muestreo, cuyo enunciado es:

Si se divide el intervalo de tiempo de una señal limitada en banda en partes iguales para formar subintervalos tales que cada uno tenga una duración de T segundos, donde T es menor que $1/2fm$ y si se toma una muestra instantánea de cada subintervalo, entonces el conocimiento de la magnitud instantánea de cada muestra y de los instantes en que se toma la muestra de cada subintervalo nos da toda la información de la señal original.

Véase, por ejemplo, H. S. Black, *Modulation Theory*, Van Nostrand, New York, 1953, p.41.

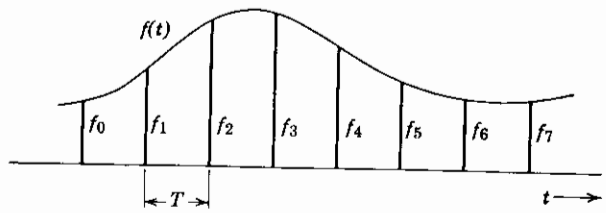


Figura 1.45

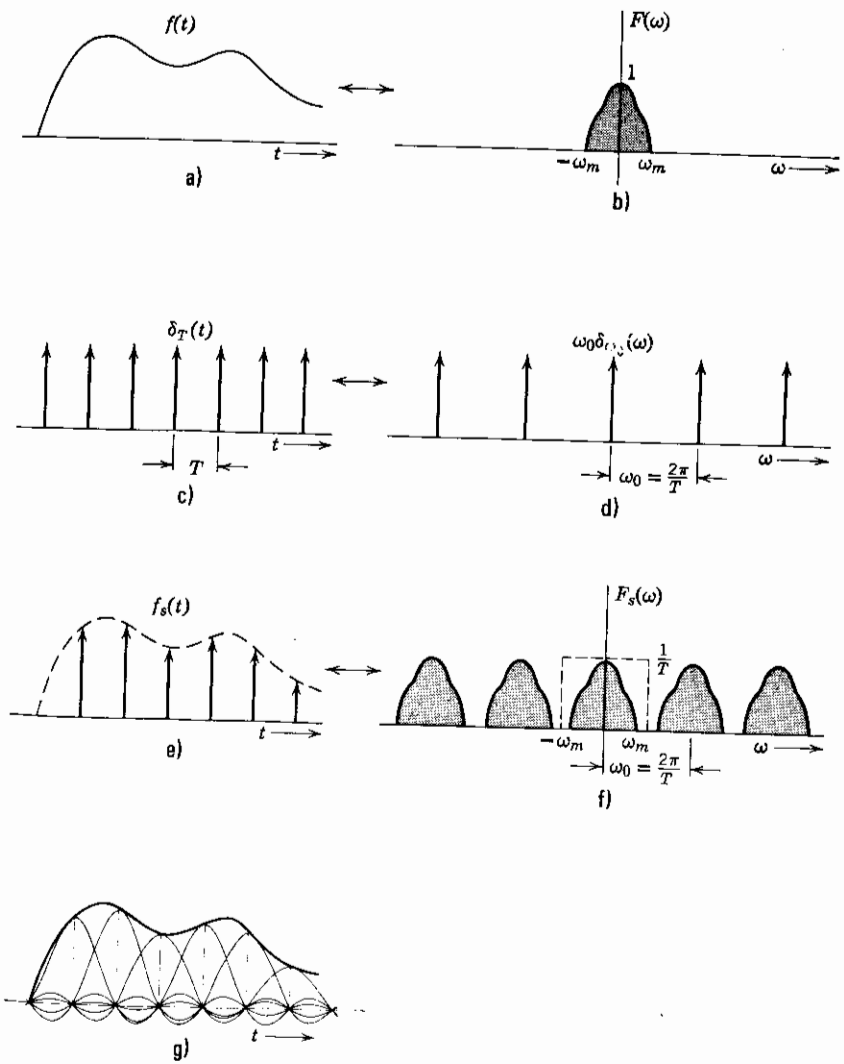


Figura 1.46

dos. Esto se ilustra en la figura 1.45. Se toma una muestra de la función $f(t)$ cada T segundos ($T \leqslant 1/2f_m$), es decir, se muestrea la función con rapidez igual o mayor que $2f_m$ muestras por segundo. A las muestras sucesivas se les denota por f_0, f_1, f_2, . . . , etc. Del teorema de muestreo se deduce que estas muestras contienen la información acerca de $f(t)$ en cada valor de t. La rapidez de muestreo, sin embargo, debe ser por lo menos el doble de la máxima frecuencia f_m presente en el espectro de $f(t)$. Expresado con otras palabras, se debe muestrear la señal por lo menos dos veces en cada período o ciclo de su componente de frecuencia más alta.

Es fácil demostrar el teorema de muestreo con la ayuda del teorema de la convolución en la frecuencia. Considérese una señal $f(t)$ limitada en banda que no contenga componentes espectrales mayores de f_m Hz. Esto significa que $F(\omega)$, la transformada de Fourier de $f(t)$, es cero cuando $|\omega| > \omega_m (\omega_m = 2\pi f_m)$. Supongamos que multiplicamos la función $f(t)$ por una función impulso periódica $\delta_T(t)$ (figura 1.46c). La función producto es una sucesión de impulsos localizados a intervalos regulares de T segundos con intensidades iguales a los valores de $f(t)$ en los instantes correspondientes. El producto $f(t)\ \delta_T(t)$ representa la función $f(t)$ muestreada a intervalos uniformes de T segundos. Denotaremos la función muestreada por $f_s(t)$ (véase la figura 1.46e).

$$f_s(t) = f(t)\ \delta_T(t)$$

El espectro de frecuencias de $f(t)$ es $F(\omega)$. Se ha demostrado (ecuación 1.106) que la transformada de Fourier de un tren uniforme de funciones impulso $\delta_T(t)$ es otro tren uniforme de funciones impulso $\delta_{\omega 0}(\omega)$ (figura 1.46d). Los impulsos están separados por un intervalo uniforme de $\omega_0 = 2\pi/T$.

$$\delta_T(t) \leftrightarrow \omega_0\ \delta_{\omega_0}(\omega)$$

La transformada de Fourier de $f(t)\ \delta_T(t)$ estará dada de acuerdo con el teorema de la convolución en la frecuencia, por la convolución de $F(\omega)$ con $\omega_0 \delta_{\omega 0}(\omega)$.

$$f_s(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\,[F(\omega) * \omega_0\ \delta_{\omega_0}(\omega)]$$

Al substituir $\omega_0 = 2\pi/T$, obtenemos

$$f_s(t) \leftrightarrow \frac{1}{T}\,[F(\omega) * \delta_{\omega_0}(\omega)] \tag{1.134}$$

Por la ecuación 1.134, es evidente que el espectro de la señal muestreada $f_s(t)$ está dado por la convolución de $F(\omega)$ con un tren de impulsos. Podemos someter a las funciones $F(\omega)$ y $\delta_{\omega 0}(\omega)$ (mostradas en las figuras 1.46b y 1.46d, respectivamente) a una convolución gráfica con el procedimiento descrito en la sección 1.14. Para llevar a cabo esta operación, giramos la función $\delta_{\omega 0}(\omega)$ sobre el eje vertical $\omega = 0$. Como $\delta_{\omega 0}(\omega)$ es función par de ω, la función girada resulta ser la misma función original $\delta_{\omega 0}(\omega)$. Para realizar la operación de convolución, desplazamos todo el tren

de impulsos $[\delta_{\omega 0}(\omega)]$ en la dirección positiva de ω. Cuando cada impulso pasa por $F(\omega)$, reproduce la misma $F(\omega)$. Como los impulsos están a intervalos de $\omega_0 = 2\pi/T$, la operación de convolución resulta en que se repita $F(\omega)$ cada ω_0 radianes por segundo como nos muestra la figura 1.46f. La función de densidad espectral correspondiente a $f_s(t)$ es, por lo tanto, la misma $F(\omega)$ pero repetida periódicamente cada ω_0 radianes por segundo. Designaremos esta función con $F_2(\omega)$. Obsérvese que $F(\omega)$ se repetirá periódicamente sin traslaparse siempre que $\omega_0 \geqslant 2\omega_m$, o sea

$$\frac{2\pi}{T} \geqslant 2(2\pi f_m)$$

Es decir

$$T \leqslant \frac{1}{2f_m} \tag{1.135}$$

Por consiguiente, cuando muestreamos la función $f(t)$ a intervalos uniformes, menores de $1/2f_m$ segundos, la función de densidad espectral de $f_s(t)$ será una réplica periódica de $F(\omega)$ y, por lo tanto, contendrá toda la información acerca de $f(t)$. Se puede recuperar fácilmente $F(\omega)$, a partir de $F_s(\omega)$, pasando la señal muestreada a través de un filtro de paso bajo que permite la transmisión de todas las componentes de frecuencia inferior a f_m y atenúa todas aquellas de frecuencia superior a f_m. La característica ideal de filtro con la que se obtiene esto, se ha representado por la línea punteada de la figura 1.46f.

Obsérvese que si el intervalo de muestreo T llega a ser mayor que $1/2f_m$, entonces la convolución de $F(\omega)$ con $\delta_{\omega 0}(\omega)$ genera periódicamente a $F(\omega)$; sin embargo, existe ahora un traslapamiento de ciclos que no permite recuperar $F(\omega)$ a partir de $F_s(\omega)$. De aquí que, si el período de muestreo T es muy grande, se pierde una parte de la información y no se puede recobrar la señal original a partir de la señal muestreada $f_s(t)$. Esta conclusión es bastante lógica pues es razonable que se pierda la información cuando el muestreo es muy lento. El intervalo máximo de muestreo $T = 1/2f_m$ se conoce como *intervalo de Nyquist.*

En la discusión anterior, se obtuvo gráficamente $F(\omega) * \delta_{\omega 0}(\omega)$. También se puede derivar fácilmente el mismo resultado analíticamente. Tenemos

$$\begin{aligned}\delta_{\omega_0}(\omega) &= \delta(\omega) + \delta(\omega - \omega_0) + \cdots + \delta(\omega - n\omega_0) + \cdots \\ &\quad + \delta(\omega + \omega_0) + \cdots + \delta(\omega + n\omega_0) + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)\end{aligned}$$

De la ecuación 1.134 se deduce que

$$\begin{aligned}F_s(\omega) &= \frac{1}{T}\,[F(\omega) * \delta_{\omega_0}(\omega)] = \frac{1}{T}\left[F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)\right] \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_0)\end{aligned}$$

Aquí, la ecuación 1.132a resulta en

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0) \tag{1.136}$$

El segundo miembro de la ecuación 1.136 representa a la función $F(\omega)$, que se repite cada ω_0 radianes por segundo. El resultado es igual al obtenido mediante la convolución gráfica.

Recuperación de $f(t)$ a partir de sus muestras

Como vimos antes, se puede recuperar la función original si se hace pasar la función muestreada por un filtro de paso bajo, con frecuencia de corte ω_m. Se trata evidentemente de una operación en el dominio de la frecuencia. Debido a la dualidad entre el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo, existe una operación equivalente en el dominio del tiempo con que se recupera $f(t)$ a partir de sus muestras. A continuación estudiaremos esta posibilidad.

Consideremos una señal $f(t)$ muestreada con la rapidez mínima requerida ($2f_m$ muestras por segundo). En este caso,

$$T = \frac{1}{2f_m} \qquad \text{y} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 4\pi f_m = 2\omega_m$$

Según la ecuación 1.36,

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - 2n\omega_m) \tag{1.137}$$

Como antes, podemos obtener el espectro $F(\omega)$ si filtramos $F_s(\omega)$ con un filtro de paso bajo con frecuencia de corte ω_m. Es claro que esa operación equivale a multiplicar $F_s(\omega)$ por una función pulso rectangular $G_{2\omega_m}(\omega)$. Por lo tanto, de la ecuación 1.137 obtenemos

$$F_s(\omega)G_{2\omega_m}(\omega) = \frac{1}{T}F(\omega)$$

de donde

$$F(\omega) = TF_s(\omega)G_{2\omega_m}(\omega) \tag{1.138}$$

Figura 1.47

Por consiguiente, la transmisión de la señal muestreada $f_s(t)$ a través de un filtro de paso bajo reproduce la señal $f(t)$. El filtro tiene una frecuencia de corte ω_m y una ganancia $T = 1/2f_m$. Se puede expresar la función de transferencia $H(\omega)$ de este filtro (figura 1.47) como

$$H(\omega) = TG_{2\omega_m}(\omega)$$

$$= \frac{1}{2f_m}G_{2\omega_m}(\omega)$$

Al aplicar el teorema de convolución en el tiempo a la ecuación 1.138, se tiene

$$f(t) = Tf_s(t) * \frac{\omega_m}{\pi}Sa(\omega_m t)$$

$$= f_s(t) * Sa(\omega_m t) \tag{1.139}$$

La función muestreada $f_s(t)$ está dada por

$$f_s(t) = \sum_n f_n\,\delta(t - nT)$$

en donde f_n es la enésima muestra de $f(t)$. Por lo que

$$f(t) = \sum_n f_n\,\delta(t - nT) * Sa(\omega_m t)$$

$$= \sum_n f_n Sa[\omega_m(t - nT)] \tag{1.140a}$$

$$= \sum_n f_n Sa(\omega_m t - n\pi) \tag{1.140b}$$

Es obvio que se puede construir $f(t)$ en el dominio del tiempo a partir de sus muestras, de acuerdo con la ecuación 1.140. Gráficamente, cada muestra se multiplica por una función muestreo y se suman todas las formas de onda resultantes para obtener $f(t)$. Esto se indica en la figura 1.46g.

En la práctica, la mayoría de las señales se aproximan a las señales limitadas en banda. Conviene aclarar aquí que, en un sentido estricto, no existen esas señales de banda limitada. Puede demostrarse que si una señal existe en un intervalo finito del tiempo, posee componentes de todas las frecuencias;* sin embargo, en la práctica, las funciones de densidad espectral disminuyen a frecuencias superiores. La mayor parte de la energía reside en las componentes que ocupan un cierto intervalo de frecuencia de manera que para propósitos prácticos, se puede considerar la señal como limitada en banda. El error que procede de no tomar en cuenta las componentes de alta frecuencia es despreciable.

* Esto se deduce del criterio de Paley-Wiener que se estudió en el capítulo 2 (sección 2.5). Si $F(\omega)$ es limitada en banda [$F(\omega) = 0$, para $|\omega| > \omega_m$], entonces $F(\omega)$ no cumple con ese criterio y, por lo tanto, su transformada inversa $f(t)$ existe para todos los valores negativos del tiempo. Recíprocamente, tenemos que una señal que existe únicamente en un intervalo finito del tiempo, no puede ser limitada en banda.

El teorema de muestreo es un concepto importante, pues nos permite reemplazar una señal continua limitada en banda por una secuencia discreta de sus muestras sin perder información alguna. Por tanto, el contenido de información de la señal equivale a elementos discretos de información. Ya que el principio de muestreo especifica el número mínimo de valores discretos necesarios para reproducir una señal continua, el problema de transmitir dicha señal se reduce al de la transmisión de un número finito de valores. Esa información discreta se puede transmitir mediante un grupo de pulsos cuyas amplitudes varían de acuerdo con los valores de las muestras (modulación en amplitud de pulsos). Otras formas de modulación son: la modulación en posición de pulsos y la modulación en duración de pulsos en donde la variación de la posición y de duración de los pulsos es en proporción a los valores de las muestras, o la modulación en pulsos codificados (en donde se representa el valor de las muestras mediante un código formado por un grupo de pulsos).

Teorema de muestreo (dominio de la frecuencia)

El teorema de muestreo en el dominio del tiempo tiene su dual en el dominio de la frecuencia cuyo enunciado es: Una señal limitada en tiempo que es cero en $|t| > T$ queda determinada en forma única por las muestras de su espectro de frecuencias en intervalos uniformes menores de $1/2T$ Hz (o π/T radianes por segundo).

La demostración de este teorema es parecida a la del dominio del tiempo si se invierten los papeles que desempeñan $f(t)$ y $F(\omega)$. Esto se deja como ejercicio para el lector.

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{n\pi}{T}\right) Sa(\omega T - n\pi) \qquad (1.141)$$

PROBLEMAS

1. Demostrar que, en el intervalo $(0, 2\pi)$, la función rectangular de la figura 1.3 es ortogonal a las señales cos t, cos $2t$, . . . , cos nt para todos los valores enteros de n, es decir, que la función tiene una componente de valor cero de la forma de onda cos nt (n entero).

2. Demostrar que, si las señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son ortogonales en el intervalo (t_1, t_2) entonces la energía de la señal $f_1(t) + f_2(t)$ es igual a la suma de las energías de $f_1(t)$ y $f_2(t)$. La energía de la señal $f(t)$ en el intervalo (t_1, t_2) se define como:

$$\text{energía} = \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\, dt$$

Extiéndase este resultado al caso de n señales ortogonales entre sí.

3. Nos podemos aproximar a la función rectangular $f(t)$ de la figura 1.3 mediante la señal $(4/\pi)$ sen t. Muéstrese que la función de error

$$f_e(t) = f(t) - \frac{4}{\pi} \text{ sen } t$$

es ortogonal a la función sen t en el intervalo $(0, 2\pi)$. ¿Puede el lector indicar cualitativamente la razón de esto?). Demuéstrese que la energía de $f(t)$ es la suma de las energías de $f_e(t)$ y de $(4/\pi)$ sen t.

4. Hacer una aproximación a la función rectangular de la figura 1.3 mediante polinomios de Legendre por los primeros dos términos diferentes de cero. Encontrar el error cuadrático medio de la aproximación cuando sob tiene *a*) el primer término y *b*) el primero y segundo términos. ¿Qué se puede concluir de la comparación entre esta aproximación y la que se obtiene mediante términos sinusoidales (en la ecuación 1.38)?

5. Demostrar que, si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones complejas de la variable real t, entonces la componente de $f_2(t)$ contenida en $f_1(t)$ en el intervalo (t_1, t_2) está dada por

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t) f_2^*(t)\, dt}$$

Como siempre, la componente se define para reducir al mínimo la magnitud del error cuadrático medio. Demuéstrese que las señales $[f_1(t) - C_{12} f_2(t)]$ y $f_2(t)$ son mutuamente ortogonales.

6. Encontrar la componente de la forma de onda sen $\omega_2 t$ en el intervalo $(-T, T)$ para todos los valores reales de ω_1 y $\omega_2 (\omega_1 \neq \omega_2)$. ¿Cómo varía esta componente en función de T? Demuéstrese que cuando T tiende a infinito, la componente desaparece, y que este resultado es válido con cualquier par de las funciones sen $\omega_1 t$, sen $\omega_2 t$, cos $\omega_1 t$, cos $\omega_2 t$.

7. Las dos funciones periódicas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ con componentes de corriente directa de valor cero, tienen formas de onda arbitrarias con períodos T y $\sqrt{2}T$, respectivamente. Demuéstrese que la componente en $f_1(t)$, de la forma de onda $f_2(t)$, es cero en el intervalo $(-\infty < t < \infty)$. Demuéstrese que este resultado es válido con cualesquiera dos funciones periódicas, si la razón de sus períodos es un número irracional y siempre y cuando $f_1(t)$ o $f_2(t)$ o ambas, tengan valores promedio de valor cero (componentes de corriente directa).

8. Determinar si las funciones siguientes son o no son periódicas. En el caso de las funciones periódicas, encontrar el período.

a) a sen $t + b$ sen $2t$
b) a sen $5t + b$ cos $8t$
c) a sen $2t + b$ cos πt
d) a cos $2t + b$ sen $7t + c$ sen $13t$
e) a cos $t + b$ sen $\sqrt{2}t$
f) a sen $(3t/2) + b$ cos $(16t/15) + c$ sen $(t/29)$
g) $(a \text{ sen } t)^3$
h) $(a \text{ sen } 2t + b \text{ sen } 5t)^2$

9. Representar las funciones e^t y t^2 en el intervalo $(0 < t < 1)$ mediante las series trigonométrica y exponencial de Fourier.

10. Representar cada una de las cuatro funciones de la figura P-1.10 mediante una serie trigonométrica de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$. A continuación, buscar una aproximación a estas funciones mediante términos finitos de la serie de Fourier. Determínese, en cada caso, el número de términos que debe tomarse para reducir el error cuadrático medio, entre la función real y la aproximada, a menos del 1 % de la energía total de $f(t)$.

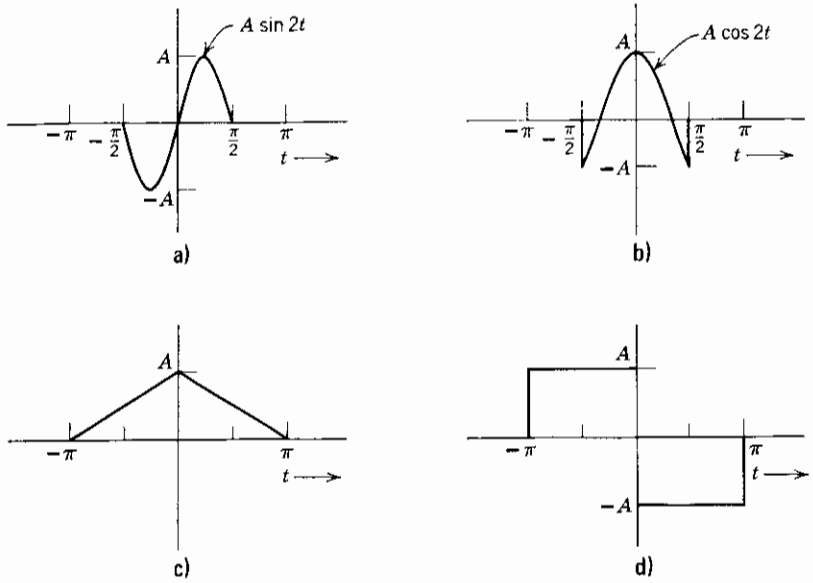


Figura P-1.10

11. La obtención de los coeficientes en la serie de Fourier se simplifica si una función periódica satisface ciertas condiciones de simetría. Demuéstrese la validez de las proposiciones siguientes:

a) Si $f(t) = f(-t)$ (simetría par), entonces todos los términos seno de la serie trigonométrica de Fourier son cero.

b) Si $f(t) = -f(-t)$ (simetría impar), entonces todos los términos coseno de la serie trigonométrica son cero.

c) Si $f(t) = -f(t \pm T/2)$ (simetría de rotación), entonces todas las armónicas pares valen cero.

Además demuéstrese en cada caso, que se pueden determinar los coeficientes de Fourier al integrar la señal periódica en sólo medio ciclo.

12. Se forma una función periódica al eliminar alternativamente un ciclo de la forma de onda senoidal, como se muestra en la figura P-1.12.

a) Encontrar la serie de Fourier (trigonométrica o exponencial) por determinación directa de los coeficientes.

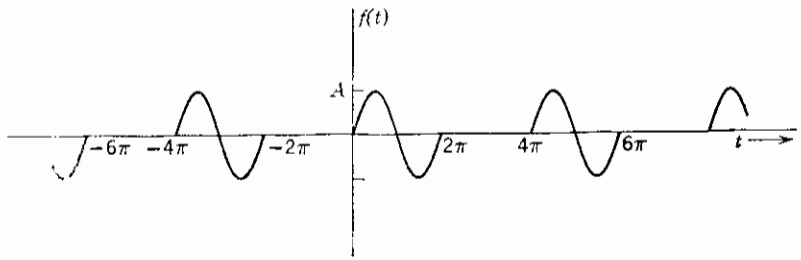


Figura P-1.12

b) Si la forma de onda $f(t)$ se desplaza π segundos a la izquierda, la nueva forma de onda $f(t + \pi)$ será función impar del tiempo cuya transformada de Fourier contiene solamente términos seno.

Encontrar la serie de Fourier de $f(t + \pi)$ y, a partir de esta serie, determinar la serie correspondiente a $f(t)$.

c) Repítase *b*) con una traslación de $f(t)$ π segundos hacia la derecha.

13. Se forma una función periódica $f(t)$ al invertir alternativamente los ciclos de una onda seno como nos muestra la figura P-1.13

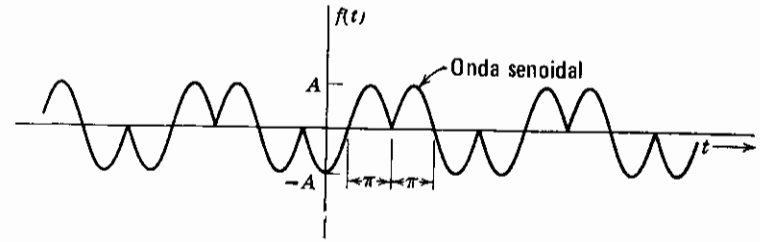


Figura P-1.13

a) Encontrar la serie de Fourier por evaluación directa de los coeficientes.

b) Si desplazamos $\pi/2$ segundos hacia la derecha esta forma de onda $f(t)$ obtendremos una nueva forma de onda $f(t - \pi/2)$, que resulta ser una función par del tiempo cuya serie de Fourier contiene sólo términos coseno. Determinar la serie de Fourier de $f(t - \pi/2)$ y, a partir de esta serie, encontrar la serie de $f(t)$.

c) La forma de onda $f(t + \pi/2)$ es función impar del tiempo. Determinar la serie de Fourier de $f(t + \pi/2)$ y, a partir de esta serie, encontrar la serie de $f(t)$.

d) También se puede expresar esta forma de onda en términos de la forma de onda encontrada en el problema 12 (figura P-1.12). Determínese la serie de Fourier de $f(t)$ mediante los resultados del problema 12.

14. Desarrollar cada una de las funciones $f(t)$ que se muestran en la figura P-1.14 como serie trigonométrica de Fourier, con los siguientes términos.

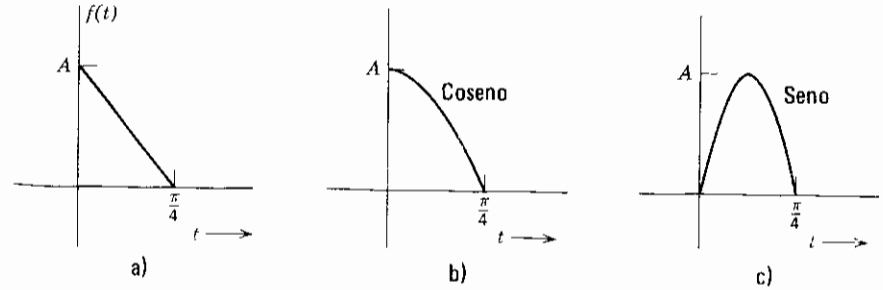


Figura P-1.14

a) Los términos seno y coseno de frecuencias $\omega = 4, 8, 12, 16, \ldots$, etc., y una constante.

b) Solamente los términos seno de frecuencias $\omega = 2, 6, 10, 14, \ldots$, etc.

c) Una constante y solamente los términos coseno de frecuencias $\omega = 8/3, 16/3, 8, 32/3, \ldots$, etc.

d) Una constante y solamente los términos coseno de frecuencias $\omega = 2, 4, 6, 8, \ldots$, etc.

e) Los términos seno y coseno de frecuencias $\omega = 1, 2, 3, 4, \ldots$, etc., y una constante.

f) Solamente los términos seno de frecuencias $\omega = 1, 3, 5, 7, \ldots$, etc.

Si se desea aproximar a $f(t)$ con un número finito de términos en estas series, ¿cuál de las representaciones anteriores conviene emplear? Explíquelo en forma cualitativa y cuantitativa.

15. Encontrar la serie de Fourier de cada una de las formas de onda periódica de la figura P-1.15; dibujar el espectro de frecuencia.

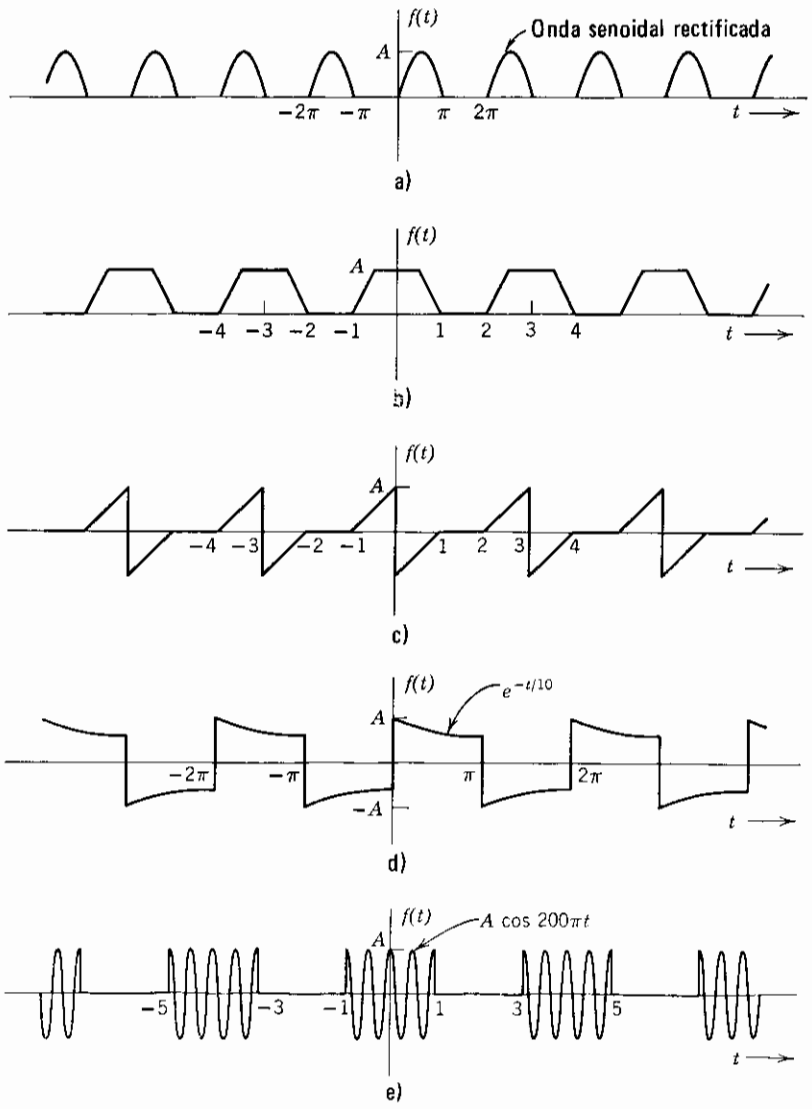


Figura P-1.15

16. Demostrar que siempre se puede expresar una función $f(t)$ como suma de una función par $f(t)$ y una función impar $f(t)$

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

Encuéntrense los componentes par e impar de las funciones $u(t)$, $e^{-at}u(t)$ y e^{jt}. (*Sugerencia:*

$$f(t) = \tfrac{1}{2}[f(t) + f(-t)] + \tfrac{1}{2}[f(t) - f(-t)].)$$

17. Demostrar que, en una función periódica par, los coeficientes de la serie exponencial de Fourier son reales; y que en una función periódica impar, los coeficientes son imaginarios.

18. La serie de Fourier de una función periódica continua está dada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

Demostrar que la función df/dt también es periódica con el mismo período, y que se le puede expresar como

$$\frac{df}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn\omega_0 F_n) e^{jn\omega_0 t}$$

Demostrar que, si la función $f(t)$ tiene valor promedio de cero (es decir, $F_0 = 0$), entonces su integral también es función periódica, que se puede expresar mediante la serie

$$\int f(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_n}{jn\omega_0} e^{jn\omega_0 t}$$

19. Encontrar la serie exponencial de Fourier de la función periódica que se ve en la figura P-1.19. ¿Cómo varían los coeficientes F_n en función de n? ¿Pueden explicarse, cualitativamente, los resultados empleando los del problema 18?

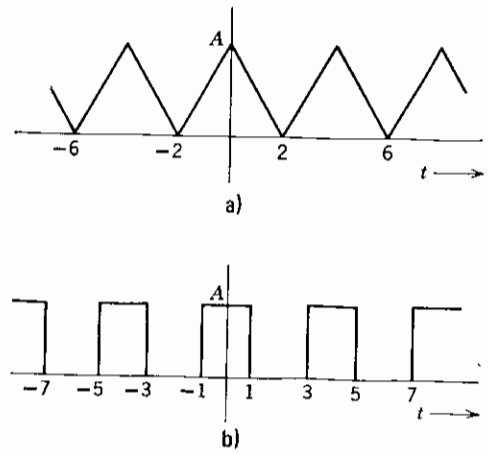


Figura P-1.19

20. La función periódica $f(t)$ está constituida por componentes de sólo las primeras n armónicas, siendo cero todos los coeficientes de las armónicas superiores. Esas señales se llaman señales limitadas en banda. Demostrar que una señal de ésas queda especificada en forma única mediante sus valores en cualesquiera $(2n+1)$ instantes de un período.

21. Comprobar que la transformada de Fourier de $f(t)$ también se puede expresar como

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt$$

Comprobar también que, si $f(t)$ es función par de t, entonces

$$F(\omega) = 2 \int_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$$

y si $f(t)$ es función impar de t, entonces

$$F(\omega) = -2j \int_{0}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt$$

Por lo tanto, comprobar que si $f(t)$ es:	Entonces $F(\omega)$ es:
función real y par de t	función real y par de ω
real e impar	imaginaria e impar
imaginaria y par	imaginaria y par
compleja y par	compleja y par
compleja e impar	compleja e impar

22. Se puede expresar la función $f(t)$ como suma de una función par y una función impar (véase el problema 16):

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

en donde $f_e(t)$ es función par de t y $f_o(t)$ es función impar de t.

a) Demostrar que, si $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de la señal real $f(t)$, entonces $\mathrm{Re}[F(\omega)]$ es la transformada de Fourier de $f_e(t)$ y $j\,\mathrm{Im}[F(\omega)]$ es la transformada de Fourier de $f_o(t)$.

b) Demostrar que, si $f(t)$ es complejo

$$f(t) = f_r(t) + jf_i(t)$$

y si $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$, entonces

$$\mathcal{F}[f_r(t)] = \tfrac{1}{2}[F(\omega) + F^*(-\omega)]$$

$$\mathcal{F}[f_i(t)] = \tfrac{1}{2}[F(\omega) - F^*(-\omega)]$$

Sugerencia:

$$f^*(t) = f_r(t) - jf_i(t)$$

y

$$\mathcal{F}[f^*(t)] = F^*(-\omega)$$

23. Determinar las transformadas de Fourier de las funciones $f(t)$ indicadas en la figura P-1.23

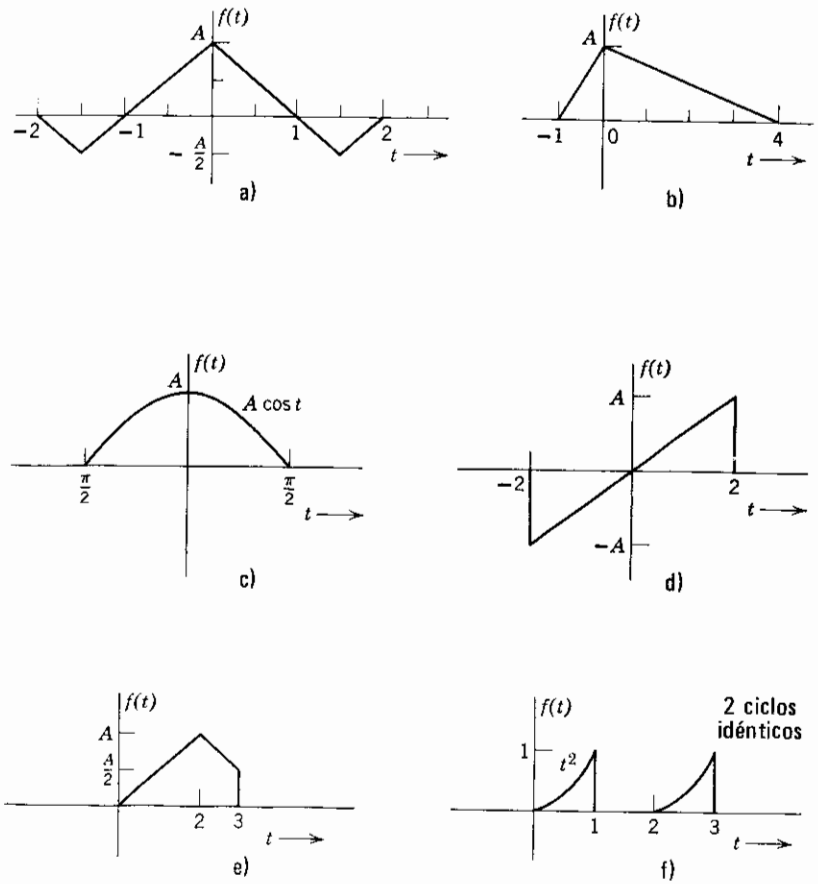


Figura P-1.23

24. Deducir las ecuaciones 1.100a y 1.100b a partir del teorema de la modulación y la ecuación 1.96

25. Por medio de la propiedad de muestreo de la función impulso, determinar las siguientes integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) \operatorname{sen} t \, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+3) e^{-t} \, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(1-t)(t^3+4) \, dt$$

26. Determinar las funciones $f(t)$ cuyas transformadas de Fourier se ilustran en la figura P-1.26

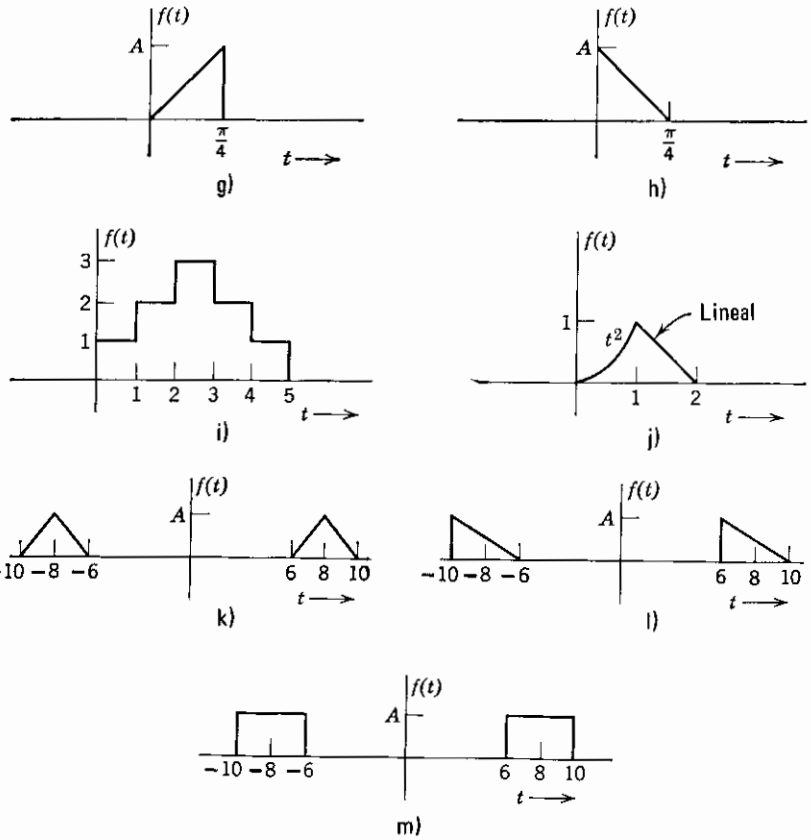


Figura P-1.23 (continuación)

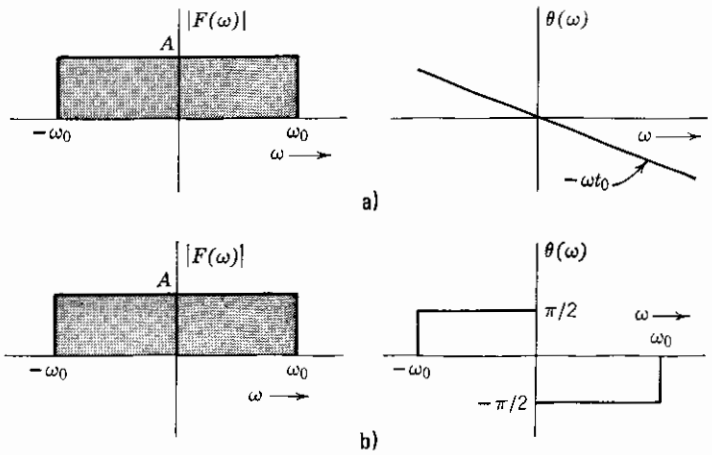


Figura P-1.26

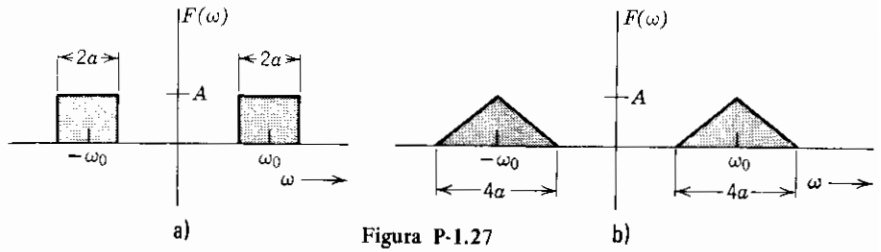
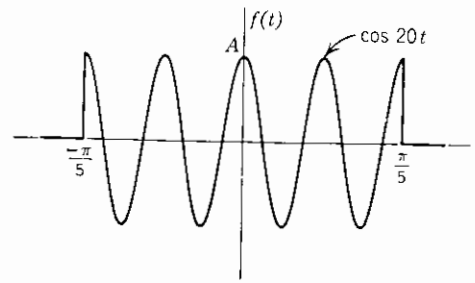
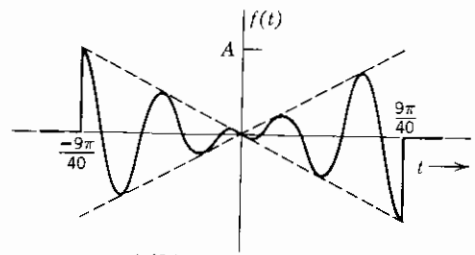


Figura P-1.27





$$f(t) = \begin{cases} \frac{-40A}{9\pi} t \cos 20t & \left(\frac{-9\pi}{40} < t < \frac{9\pi}{40}\right) \\ 0 & \text{para cualquier otro valor de t.} \end{cases}$$

b)

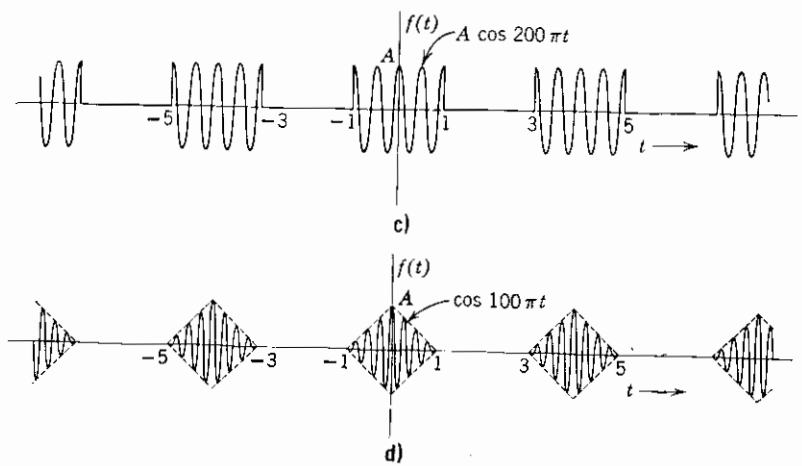


Figura P-1.28

27. Encontrar la función $f(t)$ cuyas transformadas de Fourier se muestran en la figura P-1.27. (*Sugerencia:* Emplear el teorema de la modulación.)

28. Determinar la transformada de Fourier de las funciones de la figura P-1.28, por medio del teorema de la modulación. Dibújese el espectro de frecuencia en cada caso.

29. Si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

determinar las transformadas de:

(*a*) $tf(2t)$
(*b*) $(t-2)f(t)$
(*c*) $(t-2)f(-2t)$
(*d*) $t\dfrac{df}{dt}$
(*e*) $f(1-t)$
(*f*) $(1-t)f(1-t)$

30. Encontrar las transformadas de las funciones $f(t)$ de la figura P-1.23 por medio de la propiedad de diferenciación en la frecuencia, la propiedad de desplazamiento en el tiempo y la tabla 1.1B.

31. Encontrar la transformada de Fourier de $f(t)$ de la figura P-1.23 k, l, y m empleando el dual del teorema de la modulación (ecuación 1.118).

32. Determinar la transformada de Fourier de la función representada en la figura P-1.32 mediante:

a) Integración directa.

b) Sólo la propiedad de integración en el tiempo y la tabla de transformadas 1.1B.

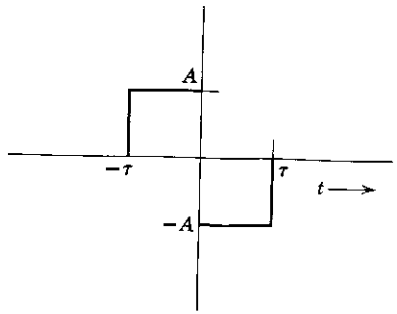


Figura P-1.32

c) Sólo la propiedad de diferenciación en el tiempo, la propiedad de desplazamiento en el tiempo y la tabla de transformadas 1.1B.

d) Sólo la propiedad de desplazamiento en el tiempo, y la tabla de transformadas 1.1B. de transformadas 1.1B.

33. El momento n-ésimo m_n de la función $f(t)$ está definido como

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)\, dt$$

Aplíquese el teorema de diferenciación en la frecuencia para demostrar que

$$m_n = (j)^n \frac{d^n F(0)}{d\omega^n}$$

Por medio de este resultado, demostrar que el desarrollo de $F(\omega)$ en serie de Taylor tiene la expresión siguiente:

$$F(\omega) = m_0 - jm_1\omega - \frac{m_2\omega^2}{2!} + \frac{jm_3\omega^3}{3!} + \frac{m_4\omega^4}{4!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n m_n \frac{\omega^n}{n!}$$

Determinar los diferentes momentos de una función pulso rectangular y, a partir de la ecuación anterior, encontrar su transformada de Fourier.

34. Demostrar que, si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

entonces

$$|F(\omega)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$$

$$|F(\omega)| \leqslant \frac{1}{|\omega|} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{df}{dt}\right| dt$$

$$|F(\omega)| \leqslant \frac{1}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d^2 f}{dt^2}\right| dt$$

Estas desigualdades determinan los límites superiores de $|F(\omega)|$

35. Determinar las siguientes integrales de convolución:

(*a*) $u(t) * u(t)$
(*b*) $u(t) * e^{-t}u(t)$
(*c*) $e^{-t}u(t) * e^{-2t}u(t)$
(*d*) $u(t) * tu(t)$
(*e*) $e^{-t}u(t) * tu(t)$
(*f*) $e^{-2t}u(t) * e^{-t}$

Verificar los resultados de los incisos de *a*) a *f*) mediante las transformadas de Fourier.

36. Demostrar que, si $f(t)$ es una señal continua limitada en banda a ω_m radianes por segundo, entonces

$$\frac{k}{\pi}[f(t) * Sa(kt)] = f(t) \qquad \text{para} \quad k \geqslant \omega_m$$

Por lo tanto, demostrar que

$$\frac{\omega_n}{\pi}[Sa(\omega_m t) * Sa(\omega_n t)] = Sa(\omega_m t) \qquad \text{para} \quad \omega_n \geqslant \omega_m$$

37. Determinar la transformada inversa de Fourier de $Sa^2(Wt)$ empleando el teorema de convolución en el tiempo. Determinar gráficamente la integral de convolución.

38. Determinar la rapidez mínima de muestreo y el intervalo de Nyquist de las siguientes señales:

(*a*) $Sa(100t)$
(*b*) $Sa^2(100t)$
(*c*) $Sa(100t) + Sa(50t)$
(*d*) $Sa(100t) + Sa^2(60t)$

39. Determinar $f_1 * f_2$ y $f_2 * f_1$ para las funciones ilustradas en la figura P-1.39.

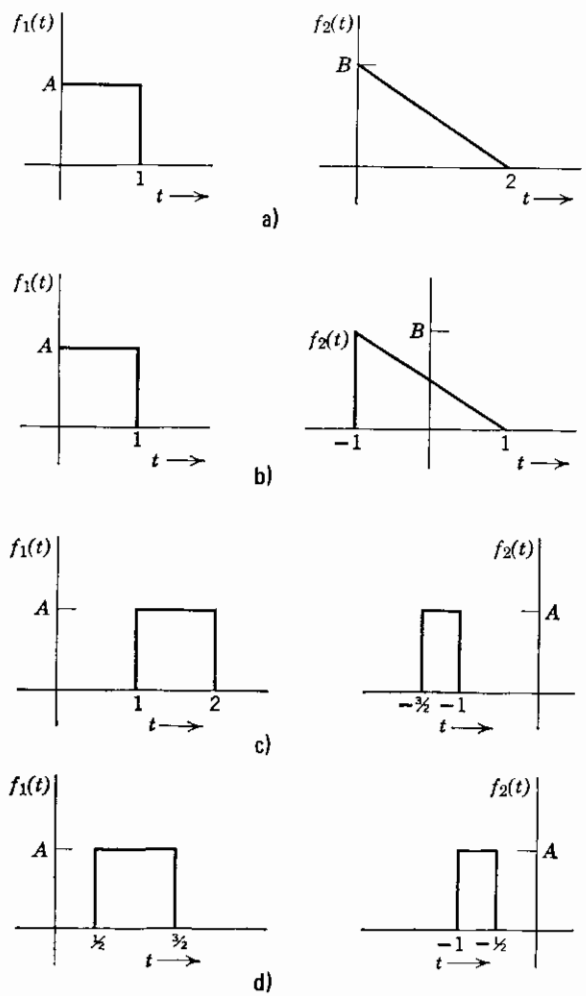


Figura P-1.39

40. Demostrar que se puede expresar una función causal $f(t)$ (cuyo valor es cero en $t<0$) como suma continua de funciones rampa unitaria:

$$f(t) = \int_0^t \frac{d^2 f}{d\tau^2}(t-\tau)\,d\tau$$

(*Sugerencia:* Aplíquese el teorema de la convolución.)

41. Determinar

$$h(t) * f_1(t), \qquad h(t) * f_2(t) \qquad \text{y} \qquad h(t) * f_3(t)$$

según la figura P-1.41

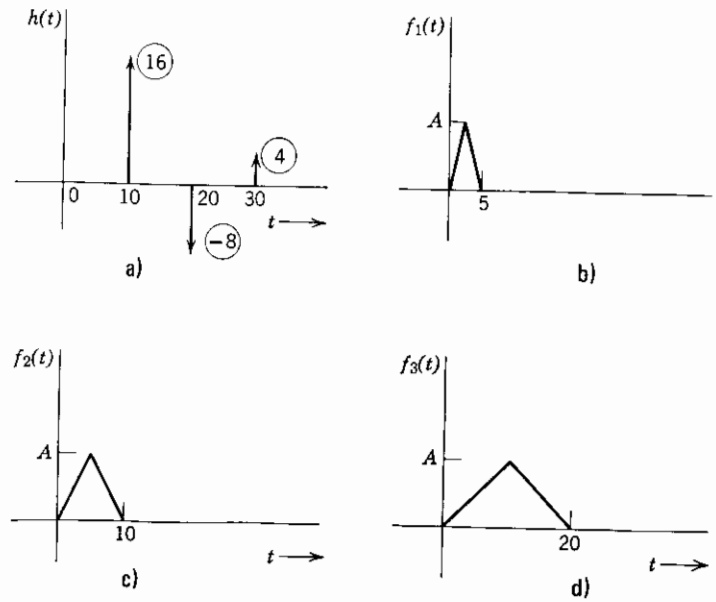


Figura P-1.41

42. El teorema de la integración en el tiempo (ecuación 1.119b) sólo es válido si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 0$$

Demuéstrese que si esta condición no se satisface, entonces

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau \leftrightarrow \pi F(\omega)\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\,F(\omega)$$

[*Sugerencia:* Expresar $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ como convolución de $f(t)$ y $u(t)$.]

43. Sea $F(\omega)$ la transformada de Fourier de la función $f(t)$.

a) Demostrar que la transformada de Fourier de la función periódica $f_T(t)$, formada por la repetición de $f(t)$ cada T segundos, como se ve en la figura 1.15, está dada por

$$f_T(t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T}\,F(\omega)\delta_{\omega_0}(\omega) \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

[*Sugerencia:* Desarróllese $f_T(t)$ en serie de Fourier y obsérvese que el n-ésimo coeficiente F_n de esta serie es $(1/T)F(\omega)|_{\omega=n\omega_0}$; o también se puede expresar $f_T(t)$ como convolución de $f(t)$ y $\delta_T(t)$.]

b) Dibújese la transformada de Fourier de la función pulso rectangular $G_\tau(t)$ en $\tau = 1/20$. Empleando el resultado de *a*), trácese la transformada de Fourier de la función pulso rectangular periódica que se repite cada 1/4 segundo.

Compárense estos resultados con los del ejemplo 1.7 del texto.

44. Sea $F(\omega)$ la transformada de Fourier de la función $f(t)$ de la figura 1.14. Formar una nueva función como lo indica la figura 1.15, con sólo n pulsos a intervalos de T segundos. La nueva función $f_n(t)$ que resulta existe en el intervalo $(-nT/2 < t < nT/2)$ y vale cero fuera de él. Demostrar que

$$f_n(t) \leftrightarrow F(\omega) \frac{\text{sen } (n\omega T/2)}{\text{sen } (\omega T/2)}$$

Bosquejar la función $[\text{sen } (n\omega T/2)]/[\text{sen } (\omega T/2)]$ para $n = 15$. Demostrar que, cuando $n \to \infty$, la función tiende a una secuencia de funciones impulso; es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\text{sen } (n\omega T/2)}{\text{sen } (\omega T/2)} = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$$

en donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Sugerencia: Use

$$\sum_{k=-m}^{m} e^{jkx} = \frac{\text{sen } (nx/2)}{\text{sen } (x/2)} \qquad n = 2m + 1$$

45. Se tiene una función $h(t)$ que vale cero para todo $t < 0$ (esa función se conoce como función causal). Sea $H(\omega)$ la transformada de Fourier de $h(t)$. Demuéstrese que si $R(\omega)$ y $X(\omega)$, son respectivamente, las partes real e imaginaria de $H(\omega)$, y si $h(t)$ no contiene una función impulso en el origen, entonces

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{\omega - y}\, dy$$

y

$$X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{\omega - y}\, dy$$

Este par de ecuaciones define la transformada de Hilbert. Modifíquese el resultado al suponer $h(t)$ función negativa del tiempo, es decir, $h(t) = 0$, para todo $t > 0$. [*Sugerencia:* Expresar $h(t)$ en términos de componentes par e impar $h_p(t)$ y $h_i(t)$ (ver problema 16)].

Se deduce de los resultados del problema 22*a* que

$$h_e(t) \leftrightarrow R(\omega) \qquad \text{y} \qquad h_o(t) \leftrightarrow jX(\omega)$$

Obsérvese también que para una función causal $h(t)$

$$h_e(t) = h_o(t) \text{ sgn } t$$

y

$$h_o(t) = h_e(t) \text{ sgn } t$$

A continuación, se aplica el resultado de la ecuación 1.95 y el teorema de convolución.

46. Demostrar que

$$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n$$

$$t^n \leftrightarrow 2\pi j^n \frac{d^n \delta(\omega)}{d\omega^n}$$

CAPITULO 2

Transmisión de señales y espectros de densidad de potencia

2.1 TRANSMISION DE SEÑALES A TRAVES DE SISTEMAS LINEALES

Los sistemas lineales están caracterizados por el principio de superposición. Esto implica que si $r_1(t)$ es la respuesta a la función de excitación $f_1(t)$ y $r_2(t)$ la respuesta a la función de excitación $f_2(t)$, entonces la respuesta a la función de excitación $f_1(t) + f_2(t)$ será $r_1(t) + r_2(t)$. Este es el postulado del principio de superposición. En general, la respuesta de un sistema lineal a la función de excitación $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$ está dada por $\alpha r_1(t) + \beta r_2(t)$, siendo α y β constantes arbitrarias.

Para determinar la respuesta de un sistema lineal a una función de excitación dada, se puede emplear el principio de superposición. Se puede expresar una función de excitación como suma de funciones más simples, para las cuales se calcula fácilmente la respuesta del sistema. En el capítulo 1, se ha visto que se puede expresar una función arbitraria de excitación $f(t)$ como suma (continua) de exponenciales por medio de la transformada de Fourier. Podemos utilizar eso para obtener la respuesta de un sistema con los métodos de Fourier (o Laplace). Sin embargo, aquí estudiaremos otras clases de funciones elementales, como la función impulso. En primer lugar, expresaremos una señal $f(t)$ como suma continua de funciones impulso. Por la propiedad de muestreo de la función impulso (o por la ecuación 1.131), obtenemos:

$$f(t) = f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \delta(t - \tau)\, d\tau \tag{2.1}$$

Podemos considerar esa ecuación como representación de $f(t)$ en términos de componentes impulso. El segundo miembro representa una suma continua (integral) de funciones impulso. Para aclarar esto, expresaremos dicha suma como forma límite de la suma discreta. La ecuación 2.1 puede expresarse como:

$$f(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} [f(\tau)\,\Delta\tau]\,\delta(t-\tau) \tag{2.2}$$

Aquí, $f(t)$ queda expresada como una suma de impulsos; un impulso característico localizado en $t = \tau$ tiene intensidad $f(\tau)\,\Delta\tau$.

Si $h(t)$ es la respuesta del sistema a un impulso unitario $\delta(t)$, entonces la respuesta del sistema a $[f(\tau)\,\Delta\tau]\,\delta(t-\tau)$ será* $f(\tau)\,\Delta\tau\,h(t-\tau)$ y la respuesta total $r(t)$ a la función de excitación $f(t)$ estará dada por (si tomamos en cuenta el principio de superposición en la ecuación 2.2):

$$\begin{aligned} r(t) &= \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} [f(\tau)\Delta\tau]h(t-\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.3) \\ &= f(t) * h(t) \qquad (2.4) \end{aligned}$$

Por medio del teorema de la convolución en el tiempo, se obtiene:

$$R(\omega) = F(\omega)H(\omega) \tag{2.5a}$$

en donde

$$r(t) \leftrightarrow R(\omega), \qquad f(t) \leftrightarrow F(\omega) \qquad \text{y} \qquad h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

$H(\omega)$ se conoce como la función de transferencia del sistema†.

Si la señal $f(t)$ empieza en $t = 0$ y es cero en $t < 0$, entonces se puede reemplazar el límite inferior de la integral de la ecuación 2.3 por cero. Si, además, $h(t) = 0$ en $t < 0$ (lo cual se verifica en cualquier sistema físico), entonces $h(t-\tau) = 0$ cuando $\tau > t$. Por lo tanto, podemos reemplazar el límite superior de la integral de la ecuación 2.3 por t. Así, para sistemas físicos y cuando $f(t) = 0$ en $t < 0$.

$$r(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \tag{2.5b}$$

Obsérvese que la ecuación 2.3 es una forma general, mientras que la ecuación 2.5b es el caso especial en que tanto $f(t)$ como $h(t)$ son cero en $t < 0$.

* Aquí se supone implícitamente que el sistema es lineal e invariante en el tiempo. En esos sistemas, los parámetros no cambian con el tiempo. En consecuencia, si la respuesta del sistema a $\delta(t)$ es $h(t)$, entonces la respuesta a $\delta(t-\tau)$ debe ser $h(t-\tau)$. Existe una clase de sistemas lineales (sistemas lineales variables en el tiempo) en los que uno o más de sus parámetros pueden cambiar con el tiempo y la respuesta a $\delta(t-\tau)$ no es necesariamente $h(t-\tau)$. Si la respuesta de un sistema lineal a la función de excitación $\delta(t-\tau)$ es $h(t-\tau)$, para todos los valores de τ, entonces se infiere que el sistema es invariante en el tiempo.

† Se puede demostrar que la respuesta del sistema a una función de excitación $e^{j\omega t}$ es $H(\omega)e^{j\omega t}$. Si se quiere tener más información véase B.P. Lathi, *Signals, Systems, and Communication*, John Wiley and Sons, New York, 1965.

2.2 CARACTERISTICAS DE FILTRO DE LOS SISTEMAS LINEALES

En un sistema dado, una señal $f(t)$ de entrada produce una señal de respuesta $r(t)$ de manera característica del sistema. La función de densidad espectral de la señal de entrada es $F(\omega)$ mientras que la función de densidad espectral de la respuesta es $F(\omega)H(\omega)$. Por lo tanto, el sistema modifica la función de densidad espectral de la señal de entrada. Es evidente que el sistema actúa como una especie de filtro de las diferentes componentes de frecuencia. La intensidad de algunas componentes aumenta, la de otras se atenúa y otras más pueden quedar iguales. De manera semejante, cada componente sufre un cambio de fase diferente en el proceso de transmisión. Por lo tanto, el sistema modifica la función de densidad espectral de acuerdo con sus características de filtro. Esta modificación depende de la función de transferencia $H(\omega)$, que representa la respuesta del sistema a las diferentes componentes de frecuencia. Así, $H(\omega)$ actúa como una función de ponderación según las diferentes frecuencias. La respuesta resultante tiene densidad espectral $F(\omega)H(\omega)$ (figura 2.1). La señal de entrada tiene densidad espectral $F(\omega)$ y la función de transferencia está dada por $H(\omega)$. La densidad espectral de la respuesta evidentemente es $F(\omega)H(\omega)$.

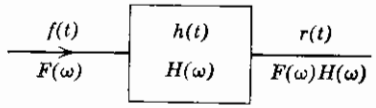


Figura 2.1

Considérese el circuito R-C de la figura 2.2a. En las terminales de entrada aa' de este circuito, se aplica un pulso rectangular como el de la figura 2.2c. La respuesta del circuito es el voltaje $v_0(t)$ que aparece en las terminales de salida. La función de densidad espectral de la señal de entrada (pulso rectangular) está representada en la figura 2.2d. La función de transferencia $H(\omega)$ del circuito, que relaciona el voltaje de salida con el de entrada, es obviamente $1/(j\omega + 1)$. Por lo tanto, $H(\omega) = 1/(j\omega + 1)$.

En la figura 2.2b se muestra la gráfica de la magnitud $|H(\omega)|$ correspondiente a las características de filtro del circuito. Por el momento, haremos caso omiso de las características de fase. Obsérvese que este circuito atenúa las frecuencias altas y permite que las bajas pasen con atenuación relativamente pequeña. Así, este circuito es la forma más simple de un filtro de paso bajo. Las componentes de frecuencia alta del espectro de entrada experimentan una atenuación severa si las comparamos con las de frecuencia baja. La función de densidad espectral de la respuesta es el producto $F(\omega)H(\omega)$. En la figura 2.2f se ve la magnitud $|F(\omega)H(\omega)|$ de esta función. La comparación entre las figuras 2.2d y 2.2f muestra claramente la atenuación causada por el circuito a las frecuencias altas. La función de respuesta $v_0(t)$ (figura 2.2e) es obviamente una réplica distorsionada de la señal de entrada, debido a que el circuito no permite el mismo acceso a la transmisión de todas las componentes de frecuencia de la señal de entrada. En particular, las componentes de frecuencia alta resultan muy afectadas. Esto

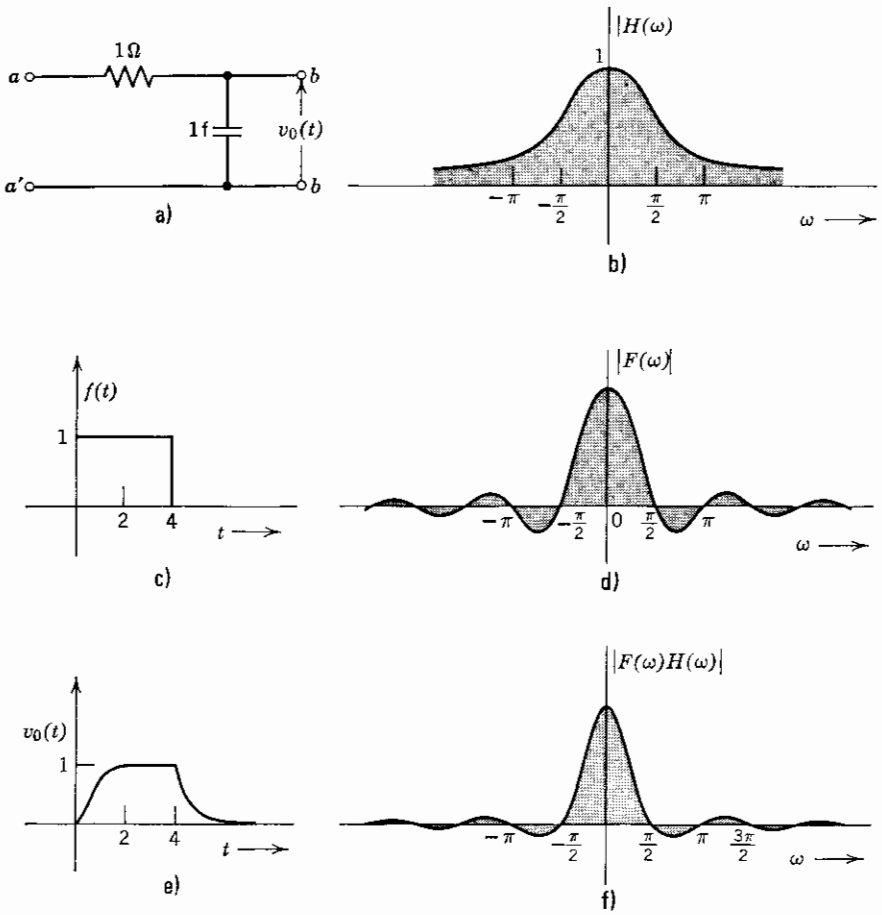


Figura 2.2

se manifiesta en las características de elevación y caída del voltaje de respuesta. La señal de entrada sube abruptamente en $t = 0$. La elevación súbita, que significa un cambio rápido, implica componentes de frecuencia muy alta. Ya que el circuito no permite el paso a las componentes de frecuencia alta, el voltaje de salida no puede cambiar con esa rapidez, por lo que sube y baja menos abruptamente en comparación con la señal de entrada.

2.3 TRANSMISION SIN DISTORSION

El estudio anterior nos sugiere inmediatamente los requisitos con que un sistema debe cumplir para transmitir sin distorsión una señal. Un sistema debe atenuar igualmente todas las componentes de frecuencia, es decir, $H(\omega)$ deberá tener una magnitud constante para todas las frecuencias. Esa

condición no es suficiente para garantizar la transmisión sin distorsión; el cambio de fase de cada componente también debe satisfacer ciertas relaciones y, hasta el momento, no hemos tomado en cuenta su efecto. Es posible imaginar que, aun cuando todas las componentes de una señal se atenuaran en la misma medida, no se obtendría la misma señal si, en el proceso de transmisión, las componentes han adquirido defasamientos diferentes. Investigaremos la condición de los cambios relativos de fase de las diferentes componentes, de una transmisión sin distorsión.

En una transmisión sin distorsión es necesario que la respuesta sea una réplica exacta de la señal de entrada. Por supuesto, la réplica puede tener magnitud diferente; lo que importa es la forma de la onda y no su magnitud relativa. En general, puede haber algún retraso de tiempo asociado con esta réplica. Por lo tanto, podemos decir que se transmite sin distorsión una señal $f(t)$ si la respuesta es $kf(t - t_0)$. Es evidente que la respuesta es la réplica exacta de la entrada con una magnitud de k veces la señal original y un retraso de t_0 segundos.

Así, si $f(t)$ es la señal de entrada, necesitamos que la respuesta $r(t)$ sea, en una transmisión sin distorsión,

$$r(t) = kf(t - t_0)$$

Por la propiedad de desplazamiento en el tiempo (ecuación 1.117) tenemos

$$R(\omega) = kF(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

De la ecuación 2.5a tenemos

$$R(\omega) = F(\omega)H(\omega) = kF(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Entonces, en un sistema sin distorsión

$$H(\omega) = ke^{-j\omega t_0} \tag{2.6}$$

Por lo tanto, para lograr una transmisión sin distorsión a través de un sistema, la función de transferencia del sistema debe ser de la forma expresada por la ecuación 2.6 (figura 2.3a). Es evidente que $|H(\omega)|$, la magnitud de la función de transferencia, es k, que es constante para todas las frecuencias. Por otra parte, el defasamiento es proporcional a la frecuencia, es decir,

$$\theta(\omega) = -\omega t_0 \tag{2.7}$$

La razón de esto es obvia: si dos componentes de frecuencias diferentes se defasan el mismo intervalo de tiempo, los cambios de fase correspondientes son proporcionales a la frecuencia. Por ejemplo, si una señal $\cos \omega t$ se defasa t_0 segundos, la señal resultante puede expresarse como

$$\cos \omega(t - t_0) = \cos (\omega t - \omega t_0)$$

Es evidente que el cambio de fase de la nueva señal es $-\omega t_0$, proporcional a la frecuencia ω.

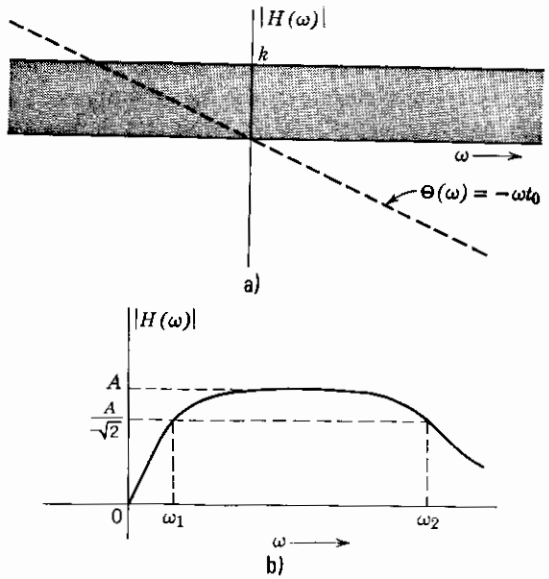


Figura 2.3 a) Características de magnitud y fase de un sistema de transmisión sin distorsión.

En un sentido estricto, la ecuación 2.7 debería ser:

$$\theta(\omega) = n\pi - \omega t_0 \qquad (n \text{ entero positivo o negativo}) \qquad (2.8)$$

ya que la adición de la fase $n\pi$ radianes no puede tener más efecto que cambiar el signo de la señal. Por lo tanto, la función de fase de un sistema sin distorsión debe ser de la forma mostrada en la ecuación 2.8 (figura 2.3a).

Ancho de banda de un sistema

En general, la constancia de la magnitud $|H(\omega)|$ de un sistema queda especificada por su ancho de banda. Se define arbitrariamente el ancho de banda del sistema como el intervalo de frecuencia en el cual la magnitud $|H(\omega)|$ es mayor que $1/\sqrt{2}$ multiplicado (dentro de 3 db) por su valor en la mitad del intervalo. El ancho de banda de un sistema, cuya gráfica $|H(\omega)|$ se ilustra en la figura 2.3b, es $\omega_2 - \omega_1$.

Para que una transmisión no tenga distorsión, necesitamos obviamente que el ancho de banda del sistema sea infinito. Debido a las limitaciones físicas, es imposible realizar tal sistema. En realidad, se puede obtener una transmisión satisfactoria sin distorsión mediante sistemas con anchos de banda muy grandes, pero finitos. El contenido de energía de cualquier señal física decrece con la frecuencia. Por lo tanto, sólo es necesario construir un sistema que transmita las componentes de frecuencia que contengan la mayor parte de la energía de la señal. La atenuación de componentes de

frecuencia extremadamente alta tendería a causar una distorsión muy pequeña, pues esas componentes contienen muy poca energía.

2.4 FILTROS IDEALES

Un filtro ideal de paso bajo transmite, sin distorsión alguna, todas las señales de frecuencias menores que una determinada frecuencia de W radianes por segundo. Las señales de frecuencia superior a W se atenúan completamente (figura 2.4a). Por consiguiente, la respuesta en frecuencia (característica de magnitud) de ese filtro es una función pulso rectangular $G_{2W}(\omega)$. La función de fase correspondiente a la transmisión sin distorsión es $-\omega t_0$; entonces la función de transferencia de ese filtro es

$$H(\omega) = |H(\omega)|\, e^{j\theta(\omega)}$$
$$= G_{2W}(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

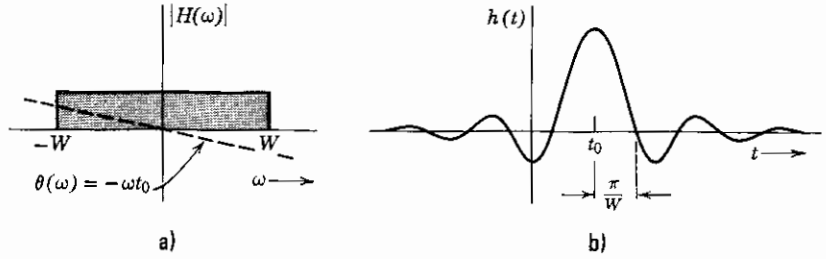


Figura 2.4 Características de un filtro ideal de paso bajo y su respuesta al impulso.

Se puede encontrar la respuesta $h(t)$ al impulso unitario de este filtro si se calcula la transformada inversa de $H(\omega)$

$$h(t) = \mathscr{F}^{-1}[H(\omega)]$$
$$= \mathscr{F}^{-1}[G_{2W}(\omega) e^{-j\omega t_0}]$$

Al usar el par 12 de la tabla 1.1B y la propiedad de desplazamiento en el tiempo, obtenemos

$$h(t) = \frac{W}{\pi} Sa[W(t - t_0)]$$

La figura 2.4b nos enseña que la respuesta al impulso existe en los valores negativos de t. En vista de que se aplicó la función de excitación (impulso unitario) en $t = 0$, el resultado anterior parece extraño, es decir, se produce la respuesta antes de que se aplique la función de excitación; el sistema parece anticiparse a la función de excitación. Prácticamente es imposible construir un sistema con esa propiedad. Por lo tanto, se debe concluir que, aun cuando sería muy conveniente tener un filtro ideal de paso bajo, no es físicamente realizable. Se puede demostrar de manera parecida, que tampoco

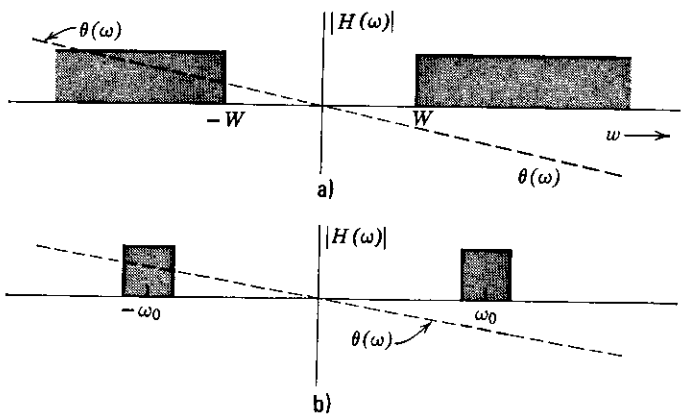


Figura 2.5 Características de filtros ideales de paso alto y de paso de banda.

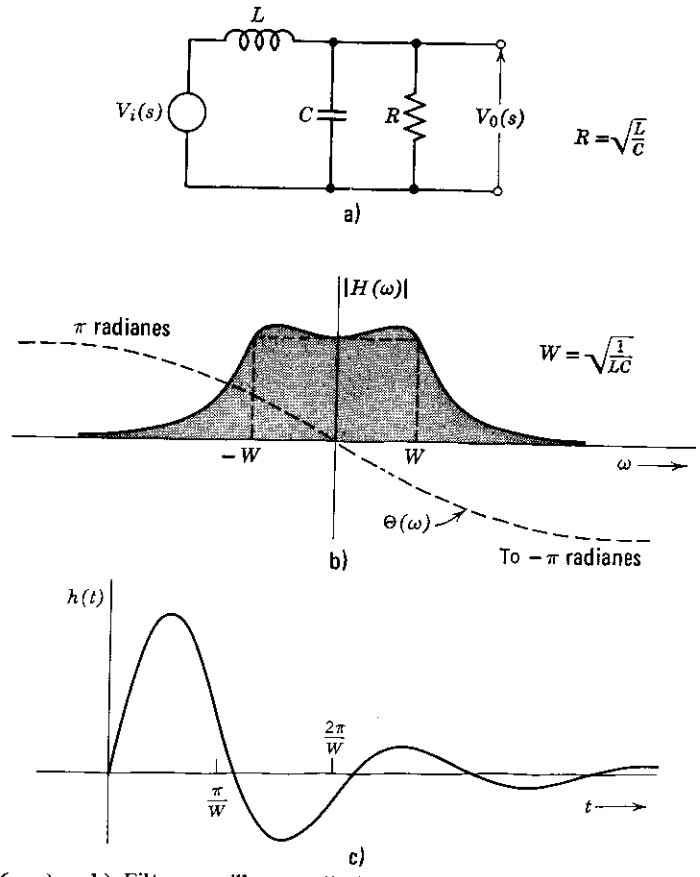


Figura 2.6 a) y b) Filtro sencillo y realizable de paso bajo y su función de transferencia. c) Respuesta al impulso del filtro de paso bajo mostrado en a.

son realizables físicamente otros filtros ideales como los de paso alto y de paso de banda que vemos en la figura 2.5).

En la práctica, es suficiente tener filtros cuyas características se aproximen a las de los filtros ideales. En la figura 2.6a se ilustra un filtro sencillo de paso bajo. Su función de transferencia está dada por

$$H(\omega) = \frac{1/(1/R + j\omega C)}{j\omega L + 1/(1/R + j\omega C)} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega L/R}$$

Puesto que

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = W \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$H(\omega) = \frac{2W}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} W}{\left(\frac{W}{2} + j\omega\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} W\right)^2}$$

La respuesta $h(t)$ al impulso es (par 11, tabla 1.1B)

$$h(t) = \mathscr{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{2W}{\sqrt{3}} e^{-Wt/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} Wt\right)$$

En la figura 2.6b, se muestra la magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ y en la figura 2.6c la respuesta $h(t)$. Compárense estas características de magnitud y fase con las del filtro ideal. La respuesta al impulso es similar a la de un filtro ideal con la salvedad que empieza en $t = 0$.

Sería conveniente encontrar un criterio para distinguir entre las características físicamente realizables e irrealizables. Ese es el criterio de *Paley-Wiener,* que se estudiará a continuación.

2.5 CAUSALIDAD Y POSIBILIDAD DE REALIZACION FISICA: CRITERIO DE PALEY-WIENER

En diversas publicaciones se ha definido la posibilidad de realización física de diferentes maneras. Aquí emplearemos la definición que hace menos restricciones y distingue a los sistemas que son físicamente viables de los que no lo son. Es intuitivamente evidente que un sistema físicamente realizable no podrá tener una respuesta que se adelante a la aplicación de la función de excitación. Esto se conoce como la *condición de causalidad.* Existe otra manera de expresar la misma condición: la respuesta $h(t)$ a un impulso unitario de un sistema físicamente realizable debe ser causal. Se dice que una señal es causal si es cero en $t < 0$. Así, la respuesta $h(t)$ al impulso de un sistema físicamente realizable debe ser cero en $t < 0$. Este es el criterio para la posibilidad de realización física en el dominio del tiempo. En el dominio de la frecuencia, el criterio implica que es condición necesa-

ria y suficiente para que una función de magnitud $|H(\omega)|$ sea físicamente realizable que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(\omega)||}{1+\omega^2}\, d\omega < \infty \tag{2.9}$$

Sin embargo, la función de magnitud $|H(\omega)|$ al cuadrado tiene que ser integrable para que valga el criterio de Paley-Wiener;† es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2\, d\omega < \infty$$

Si un sistema tiene función de magnitud que no cumple con el criterio de Paley-Wiener (ecuación 2.9) su respuesta al impulso es no causal, es decir, existe una respuesta que se adelanta a la aplicación de la función de excitación.

Podemos sacar algunas conclusiones significativas del criterio de Paley-Wiener. Obviamente, la función de magnitud $|H(\omega)|$ puede ser cero en algunas frecuencias discretas, pero no lo puede ser en una banda finita de frecuencias pues esto implicaría que la integral de la ecuación 2.9 fuese infinita. Es, por lo tanto, evidente que los filtros ideales indicados en las figuras 2.4 y 2.5 no son físicamente realizables. De la ecuación 2.9 se concluye que la función de amplitud no disminuye hacia cero con rapidez mayor que la de una función de orden exponencial. Así

$$|H(\omega)| = ke^{-\alpha|\omega|}$$

es admisible. Pero la función de Gauss

$$|H(\omega)| = ke^{-\alpha\omega^2}$$

no es realizable, pues viola la ecuación 2.9. En resumen, la característica de magnitud realizable no puede tener una atenuación total demasiado grande. Es interesante observar que, aunque las características de filtro ideales mostradas en las figuras 2.4 y 2.5 no son realizables, es posible aproximarnos a ellas tanto como se quiera. Así, la característica de filtro de paso bajo que se ilustra en la figura 2.7 es físicamente realizable para valores arbitrariamente pequeños de ϵ. El lector puede verificar que esta característica cumple con el criterio de Paley-Wiener.

* Raymond E.A.C. Paley and Norbert Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, American Mathematical Society Colloquium Publication 19, New York, 1934.

† Si la magnitud de la función $H(\omega)$ satisface el criterio de Paley Wiener (ecuación 2.9), eso no significa que el sistema sea físicamente realizable. Dicho criterio únicamente establece que puede asociarse una función de fase adecuada $\nu(\omega)$ con $\mathcal{H}(\omega)$, de manera que la función de transferencia resultante sea físicamente realizable.

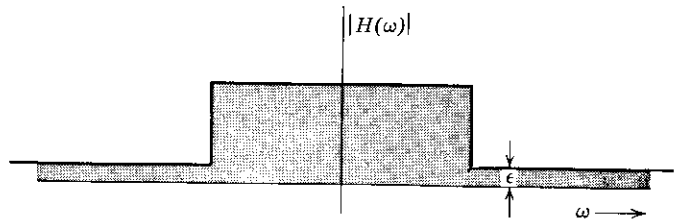


Figura 2.7 Característica de filtro físicamente realizable.

2.6 RELACION ENTRE EL ANCHO DE BANDA Y EL TIEMPO DE SUBIDA

Un cambio pronunciado en la amplitud de una señal implica variaciones rápidas de dicha señal con el tiempo; esto da lugar a componentes de frecuencia alta. La señal con cambios relativamente leves contiene sobre todo frecuencias bajas. Se ha observado (figura 2.2) que, si se transmite una señal con una discontinuidad pronunciada por un filtro de paso bajo, la discontinuidad desaparece a la salida, es decir el cambio es gradual. Si, a la entrada de un filtro ideal de paso bajo, se aplica una función escalón unitario $u(t)$, la salida presentará una elevación gradual (en lugar de la elevación abrupta de la entrada). El tiempo de elevación a la salida dependerá de la frecuencia de corte del filtro. A continuación, demostraremos que el tiempo de subida es inversamente proporcional a la frecuencia de corte del filtro. A medida que la frecuencia de corte es más pequeña, más gradual se vuelve la subida de la señal a la salida.

Esto se ve fácilmente al considerar la respuesta del filtro de paso bajo a la función escalón unitario $u(t)$. Si $H(\omega)$ es la función de transferencia del filtro ideal de paso bajo, entonces (figura 2.4a)

$$H(\omega) = G_{2W}(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Además,

$$u(t) \leftrightarrow \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Si $r(t)$ es la respuesta del filtro de paso bajo a $u(t)$, entonces,

$$R(\omega) = \left[\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] G_{2W}(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Nótese que $H(0) = 1$. En consecuencia, $\delta(\omega)H(\omega) = H(0)\,\delta(\omega)$ y

$$R(\omega) = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} G_{2W}(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$r(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} G_{2W}(\omega)e^{-j\omega t_0}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\omega} G_{2W}(\omega) e^{-j\omega t_0}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_{2W}(\omega)}{j\omega} e^{j\omega(t-t_0)}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} \frac{\cos\,[\omega(t-t_0)]}{j\omega}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} \frac{\operatorname{sen}\,[\omega(t-t_0)]}{\omega}\, d\omega$$

Obsérvese que la primera integral desaparece debido a que el integrando

$$\frac{\{\cos\,[\omega(t-t_0)]\}}{\omega}$$

es función impar de ω. El integrando de la segunda integral es función par de ω. Por lo tanto, obtenemos

$$r(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^W \frac{\operatorname{sen}\,[\omega(t-t_0)]}{\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{W(t-t_0)} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{W(t-t_0)} Sa(x)\, dx$$

La integral que aparece en el segundo miembro puede determinarse desarrollando la función de muestreo en una serie de potencias. Esta integral, que se encuentra tabulada* tiene el nombre especial de *integral seno* y se le denota por $Si(x)$

$$Si(x) = \int_0^x Sa(\tau)\, d\tau \qquad (2.10)$$

La gráfica de la función $Si(x)$ está en la figura 2.8a. Entonces, se puede expresar la respuesta $r(t)$ como

$$r(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si[W(t-t_0)]$$

Las figuras 2.8b y c representan, respectivamente, la función escalón unitario $u(t)$ y su respuesta $r(t)$. La frecuencia de corte del filtro ideal de paso bajo es W (figura 2.4a)

* E. Jahnke and F. Emde, *Tables of Functions*, Dover Publications, New York, 1945.

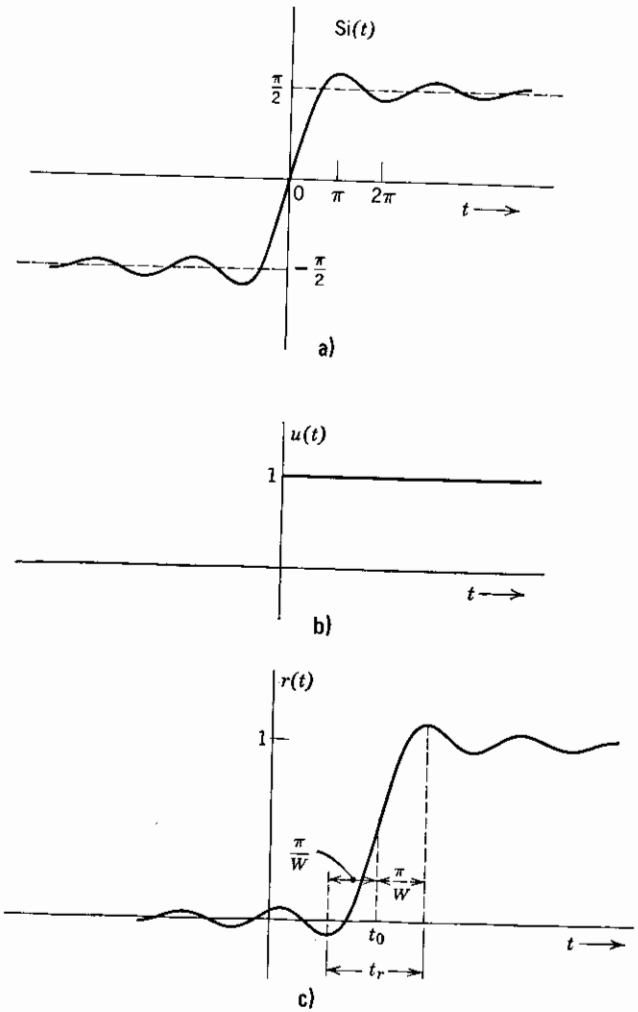


Figura 2.8

A partir de la figura 2.8c, es evidente que, a medida que disminuye la frecuencia de corte W, la salida $r(t)$ se eleva más lentamente. Si se define el tiempo de subida t_r como el tiempo necesario para que la salida váríe del valor mínimo al máximo* (figura 2.8c), entonces, de la figura 2.8c

* Existen diversas definiciones del tiempo de subida t_r. Algunos autores lo definen como el tiempo necesario para que la respuesta aumente desde su valor cero (el más cercano al mínimo) hasta su valor máximo. Se puede demostrar que esto es $0.8/B$. En otra definición, t_r es el recíproco de la pendiente de $r(t)$ en $t = t_0$. En este caso $t_r = 0.5/B$. En los circuitos electrónicos, el tiempo de subida t_r se define como el tiempo requerido para que la salida se eleve desde el 10 % al 90 % de su valor final. En la figura 2.8c, esto es aproximadamente $0.44/B$. En todas estas definiciones, se ve que t_r es inversamente proporcional a la frecuencia de corte.

$$t_r = \frac{2\pi}{W} = \frac{1}{B} \tag{2.11}$$

en donde B es el ancho de banda del filtro en Hz. Así, vemos que el tiempo de elevación es inversamente proporcional a la frecuencia de corte (en Hz) del filtro.

A partir de estos resultados, se obtiene fácilmente la respuesta de un filtro de paso bajo a un pulso rectangular $p(t)$, como el de la figura 2.9a

$$p(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

Obtenemos la respuesta del filtro a este pulso, $r_p(t)$, a partir de la ecuación 2-10b por medio del principio de superposición.

$$r_p(t) = \frac{1}{\pi}\{Si\,[W(t - t_0)] - Si\,[W(t - t_0 - \tau)]\}$$

Esta respuesta se ilustra en la figura 2.9b. La figura 2.9c nos enseña una aproximación razonable a esa respuesta mediante un pulso trapezoidal. Se puede ver fácilmente que la transmisión de un pulso por un filtro de paso bajo provoca la dispersión del pulso.

2.7 ESPECTRO DE DENSIDAD DE ENERGIA

Un parámetro útil de una señal $f(t)$ es su energía normalizada. Se define la energía normalizada E (o simplemente energía) de una señal $f(t)$ como la energía disipada por un resistor de 1 ohm cuando se le aplica el voltaje $f(t)$ (o por una corriente $f(t)$ que pasa por un resistor de 1 ohm). Así

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt \tag{2.12}$$

El concepto de energía de señal sólo tiene significado si la integral de la ecuación 2.12 es finita. Las señales que la energía E es finita se llaman *señales de energía.* Con algunas señales, como por ejemplo, las señales periódicas, la integral (2.12) es obviamente infinita y el concepto de energía no tiene sentido. En esos casos, consideramos el promedio en el tiempo de la energía que es evidentemente el promedio de la potencia de la señal. A esas señales se les da el nombre de *señales de potencia,* y las estudiaremos posteriormente.

Si $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

y la energía E de $f(t)$ está dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right]dt$$

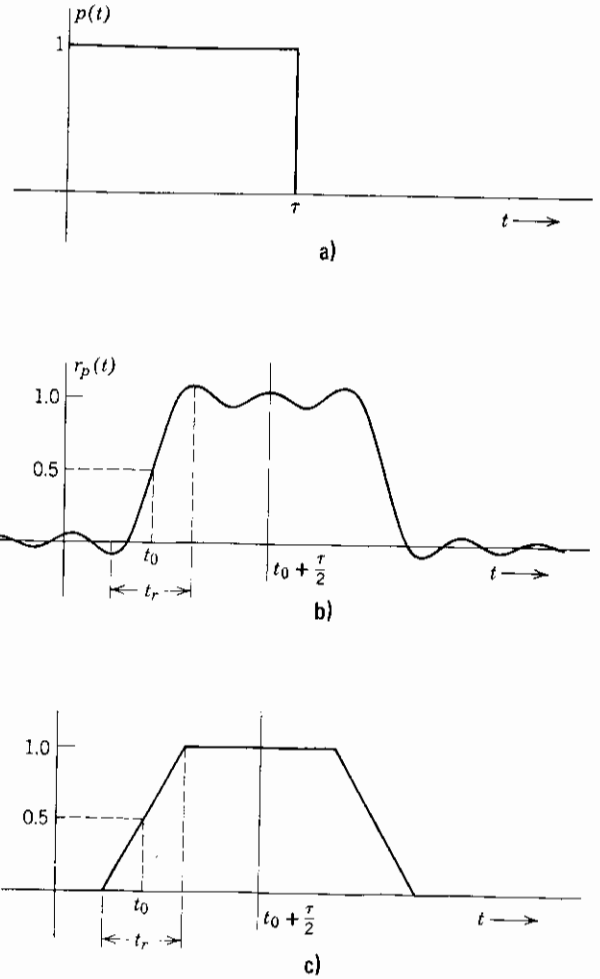


Figura 2.9

Al intercambiar el orden de integración en el segundo miembro, obtenemos

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}\,dt\right]d\omega$$

La integral dentro del paréntesis es evidentemente $F(-\omega)$. En consecuencia, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F(-\omega)\,d\omega$$

Ya hemos demostrado (véase la ecuación 1.78) que, cuando $f(t)$ es real,

$$F(\omega)F(-\omega) = |F(\omega)|^2$$

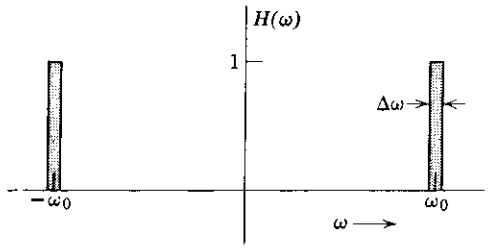


Figura 2.10

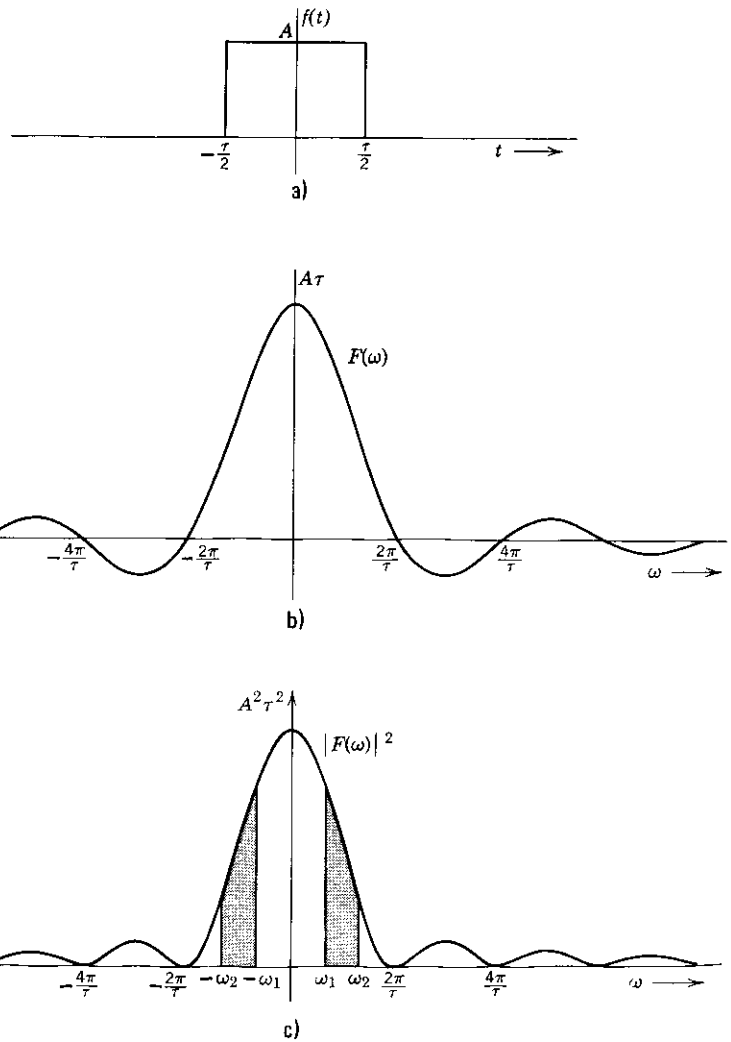


Figura 2.11 a) $f(t)$. b) Función de densidad espectral. c) Espectro de densidad de energía.

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega \tag{2.13a}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,df \tag{2.13b}$$

Esta ecuación* establece que la energía de una señal está dada por el área bajo la curva $|F(\omega)|^2$ (integrada con respecto a la variable $f = \omega/2\pi$).

Interpretación de la densidad de energía

Es interesante considerar la interpretación física de la densidad de energía de una señal. Tenemos

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$$

Consideremos la señal $f(t)$ aplicada a la entrada de un filtro ideal de paso de banda cuya función de transferencia $H(\omega)$ es la de la figura 2.10. Este filtro suprime todas las frecuencias con la excepción de las que están comprendidas dentro de una banda angosta $\Delta\omega$ ($\Delta\omega \to 0$) cuya frecuencia central es ω_0. Si $R(\omega)$ es la transformada de Fourier de la respuesta $r(t)$ de este filtro, entonces

$$R(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

y la energía E_o de la señal de salida $r(t)$ está dada por la ecuación 2.13,

$$E_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)H(\omega)|^2\,d\omega$$

Ya que $H(\omega) = 0$ en cualquier punto excepto en una banda angosta $\Delta\omega$ en donde vale uno, tenemos (cuando $\Delta\omega \to 0$)

$$E_o = 2\,\frac{1}{2\pi}\,|F(\omega_0)|^2\,\Delta\omega$$

Así, la energía de la señal de salida es $2|F(\omega_0)|^2\Delta f$. Como puede verse en la figura 2.10, sólo se transmiten sin alteración por el filtro las componentes de $f(t)$ que quedan dentro de la banda angosta $\Delta\omega$. Las demás componentes quedan totalmente suprimidas. Es evidente que $2|F(\omega_0)|^2\Delta f$ representa la aportación, a la energía de $f(t)$, de las componentes de $f(t)$ que quedan dentro de la banda angosta Δf con centro en ω_0. Por lo tanto, $2|F(\omega)|^2$ es la energía por ancho de banda unitario (en Hz) aportada por las componentes de frecuencia con centro en ω. Obsérvese que las unidades del espectro de densidad de energía son joules por Hz.

* La ecuación 2.13, que corresponde al teorema de Parseval (ecuación 1.34) para señales no periódicas, se conoce también como teorema de Plancharel.

Debe notarse que la aportación de energía procede de componentes de frecuencia negativa y positiva. Además, esta aportación es igual en ambas, puesto que

$$|F(\omega)|^2 = |F(-\omega)|^2$$

Por lo tanto, podemos interpretar que la cantidad $|F(\omega)|^2$ [mitad de la energía $2|F(\omega)|^2$] ha sido aportada por las componentes de frecuencia positiva y la cantidad restante $|F(\omega)|^2$ es la aportación de las componentes de frecuencia negativa.* Por esa razón, $|F(\omega)|^2$ se llama espectro de densidad de energía. Representa la energía por ancho de banda unitario (ya sea positivo o negativo). Entonces, el espectro de densidad de energía $\Psi_f(\omega)$ se define como†

$$\Psi_f(\omega) = |F(\omega)|^2 \tag{2.14}$$

Del espectro de densidad de energía procede la aportación relativa de energía de las diferentes componentes de frecuencia. La figura 2.11 muestra la función pulso rectangular, así como su transformada de Fourier y el espectro de densidad de energía $|F(\omega)|^2$.

La energía total E está dada por

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega \tag{2.15}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, df \tag{2.16}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_f(\omega)\, df \tag{2.17}$$

Por la ecuación

$$|F(\omega)|^2 = |F(-\omega)|^2$$

es evidente que la funcion de densidad de energía es función real y par de ω. En consecuencia, se puede expresar la ecuación 2.15 como

$$E = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega)^2\, d\omega \tag{2.18}$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} |F(\omega)|^2\, df \tag{2.19}$$

* Esta distinción, no es muy natural, pero sí conveniente. En la realidad, una combinación de frecuencias negativas y positivas aporta la energía asociada con cualquier banda de frecuencia particular.

† Las publicaciones al respecto contienen diferentes definiciones de $\Psi_f(\omega)$. Una de ellas es $\Psi_f(\omega) = 2|F(\omega)|^2$. En este caso debe tomarse en cuenta conjuntamente la energía correspondiente a las frecuencias positivas y negativas. Se determina la energía total E al integrar $\Psi_f(\omega)$ sólo desde 0 hasta ∞ o desde 0 hasta $-\infty$, también se ha definido $\Psi_f(\omega)$ como $(1/\pi)|F(\omega)|^2$. En este caso, la densidad de energía se define como la energía por radián de ancho de banda en lugar de hertz de ancho de banda.

Densidades de energía de la entrada y la respuesta

Si $f(t)$ y $r(t)$ son la función de excitación y su respuesta correspondiente de un sistema lineal con función de transferencia $H(\omega)$, entonces

$$R(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

El espectro de densidad de energía de la función de excitación es $|F(\omega)|^2$ y el de la respuesta es $|R(\omega)|^2$. Evidentemente, se tiene que

$$|R(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2\,|F(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2\Psi_f(\omega) \tag{2.20}$$

Por lo tanto, el espectro de densidad de energía de la respuesta está dado por el espectro de densidad de energía de la señal de excitación multiplicado por $|H(\omega)|^2$.

2.8 ESPECTRO DE DENSIDAD DE POTENCIA

Se mencionó antes que algunas señales (por ejemplo, las periódicas) tienen energía infinita. A éstas se les conoce como señales de potencia. El parámetro significativo de una señal de potencia $f(t)$ es la potencia promedio P. Definimos la potencia promedio (o simplemente potencia) de una señal $f(t)$ como el promedio de la potencia disipada por un resistor de 1 ohm al aplicársele un voltaje $f(t)$ (o al circular la corriente $f(t)$ por dicho resistor). Así, la potencia promedio P de la señal $f(t)$ está dada por

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\, dt \tag{2.21a}$$

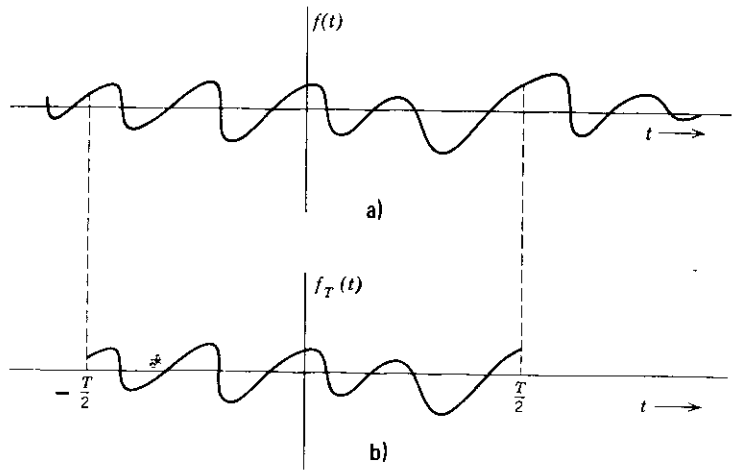


Figura 2.12

Obsérvese que la potencia promedio, definida por la ecuación 2.21a, también es el valor cuadrático medio de $f(t)$. Si denotamos este valor por $\overline{f^2(t)}$, entonces

$$P = \overline{f^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt \qquad (2.21b)$$

A continuación, podemos utilizar el procedimiento que empleamos para obtener la densidad de energía.

Al truncar la función $f(t)$ fuera del intervalo $|t| > T/2$, formamos una nueva función $f_T(t)$ (figura 2.12b), que podemos expresar como:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < \dfrac{T}{2} \\ 0 & \text{para cualquier otro valor de } t \end{cases}$$

Siempre y cuando T sea finito, $f_T(t)$ tiene energía finita. Sea

$$f_T(t) \leftrightarrow F_T(\omega)$$

Entonces, la energía E_T de $f_T(t)$ está dada por

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} f_T{}^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2\,df$$

Pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T{}^2(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt$$

De ahí que, la potencia promedio P sea

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}\,df$$

A medida que se incrementa T, la energía de $f_T(t)$ también se incrementa. Así, $|F_T(\omega)|^2$ crece junto con T. En el límite, cuando $T\to\infty$, el valor de $|F_T(\omega)|^2/T$ se aproxima a un límite. Suponiendo que el límite existe, definimos $\mathcal{S}_f(\omega)$, el espectro de densidad de potencia de $f(t)$, como

$$\mathcal{S}_f(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} \qquad (2.22)$$

$\mathcal{S}_f(\omega)$ se le conoce como espectro de densidad de potencia promedio, o simplemente *espectro de densidad de potencia* (también densidad de potencia espectral) de $f(t)$. Por lo tanto.

$$\text{Potencia promedio } P = \overline{f^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_f(\omega)\,df \qquad (2.23a)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_f(\omega)\,d\omega \qquad (2.23b)$$

Nótese que

$$|F_T(\omega)|^2 = F_T(\omega)F_T(-\omega)$$

De la ecuación anterior y de la ecuación 2.22 se deduce obviamente que la densidad de potencia es función par de ω. Por lo anterior, podemos expresar las ecuaciones 2.23a y b como

$$\text{Potencia promedio} = \overline{f^2(t)} = 2\int_0^{\infty} \mathcal{S}_f(\omega)\,df \qquad (2.23c)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathcal{S}_f(\omega)\,d\omega \qquad (2.23d)$$

Se deduce de la ecuación 2.22 que el espectro de densidad de potencia de una señal contiene solamente la información de magnitud del espectro de frecuencia $F_T(\omega)$, y pierde la información de fase. Se infiere que todas las señales con espectro de igual magnitud y diferentes funciones de fase tendrán idénticos espectros de densidad de potencia. Así, para una señal dada, existe un solo espectro de densidad de potencia; sin embargo, lo recíproco no es cierto; puede existir un gran número de señales (de hecho, un número infinito de ellas) que tengan el mismo espectro de densidad de potencia.

Hemos demostrado que, en las señales de energía, si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

entonces

$$f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \tfrac{1}{2}[F(\omega+\omega_0) + F(\omega-\omega_0)]$$

y

$$f(t)\,\text{sen}\,\omega_0 t \leftrightarrow \frac{j}{2}[F(\omega+\omega_0) - F(\omega-\omega_0)]$$

Podemos extender estos resultados a las señales de potencia.

Considérese una señal de potencia $f(t)$ con un espectro de densidad de potencia $\mathcal{S}_f(\omega)$:

$$\mathcal{S}_f(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

Consideremos la señal $\varphi(t)$ dada por

$$\varphi(t) = f(t)\cos\omega_0 t$$

Si $\mathcal{S}_\varphi(\omega)$ es el espectro de densidad de potencia de $\varphi(t)$, entonces por definición

$$\mathcal{S}_\varphi(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|\Phi_T(\omega)|^2}{T}$$

en donde

$$f_T(t)\cos\omega_0 t = \varphi_T(t) \leftrightarrow \Phi_T(\omega)$$

Del teorema de modulación (ecuación 1.116a) se deduce que

$$\Phi_T(\omega) = \tfrac{1}{2}[F_T(\omega+\omega_0) + F_T(\omega-\omega_0)]$$

y

$$\mathcal{S}_\varphi(\omega) = \frac{1}{4}\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega+\omega_0)+F_T(\omega-\omega_0)|^2}{T}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega+\omega_0)|^2+|F_T(\omega-\omega_0)|^2}{T} \qquad (2.24a)$$

Nótese que el doble producto $2F_T(\omega+\omega_0)F_T(\omega-\omega_0)$ desaparece, debido a que los dos espectros no se traslapan (véase la figura 2.13).

La ecuación 2.22 resulta aquí en*

$$\mathcal{S}_\varphi(\omega) = \tfrac{1}{4}[\mathcal{S}_f(\omega+\omega_0)+\mathcal{S}_f(\omega-\omega_0)] \qquad (2.24b)$$

Se ve fácilmente que, si

$$\varphi(t) = f(t)\,\text{sen}\,\omega_0 t$$

entonces

$$\mathcal{S}_\varphi(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{\left|\frac{j}{2}[F_T(\omega+\omega_0)-F_T(\omega-\omega_0)]\right|^2}{T}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega+\omega_0)|^2+|F_T(\omega-\omega_0)|^2}{T}$$

$$= \tfrac{1}{4}[\mathcal{S}_f(\omega+\omega_0)+\mathcal{S}_f(\omega-\omega_0)] \qquad (2.24c)$$

* Los resultados obtenidos aquí se aplican a señales de paso bajo $f(t)$, en donde $F_T(\omega+\omega_0)$ y $F_T(\omega-\omega_0)$ no se traslapan. Si $f(t)$ es una señal de paso de banda, se ve fácilmente que $F_T(\omega+\omega_0)$ y $F_T(\omega-\omega_0)$ se traslapan alrededor del origen y, en un sentido estricto no se aplican estos resultados (ecuaciones 2.24b y 2.24c). Sin embargo, si $f(t)$ es una señal aleatoria, los resultados sí se aplican. Si una fuente genera señales aleatorias, cada vez que inicie su operación, genera una forma de onda diferente. Por esta razón se define el espectro de densidad de potencia de una señal aleatoria (proceso aleatorio) como la media de los espectros de densidad de potencia de todas las formas posibles de onda generadas por la fuente. En ese caso se puede demostrar que, aunque se traslapen $F_T(\omega+\omega_0)$ y $F_T(\omega-\omega_0)$ la media de su producto es cero y los resultados de las ecuaciones 2.24b y 2.24c son válidos. Esto se comprende mejor si se tienen algunos conocimientos acerca de los procesos aleatorios.

Es evidente que $f(t)\cos\omega_0 t$ y $f(t)\,\text{sen}\,\omega_0 t$ tienen espectros de potencia idénticos. Los espectros de densidad de potencia de $f(t)$ y $\varphi(t)$ están representados en la figura 2.13. Las ecuaciones 2.24b y 2.24c representan la extensión del teorema de modulación (ecuación 1.116) a las señales de potencia.

Ejemplo 2.1 Potencia de una señal modulada en amplitud

Calcular la potencia (valor cuadrático medio) de la señal modulada $\varphi(t) = f(t)\cos\omega_0 t$, en donde $f(t)$ es una señal de potencia de banda angosta (paso bajo) con el valor cuadrático medio $\overline{f^2(t)}$.

La potencia de una señal es $1/2\pi$ multiplicado por el área bajo su espectro de densidad de potencia:

$$\overline{\varphi^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{S}_\varphi(\omega)\,d\omega$$

y

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{S}_f(\omega)\,d\omega$$

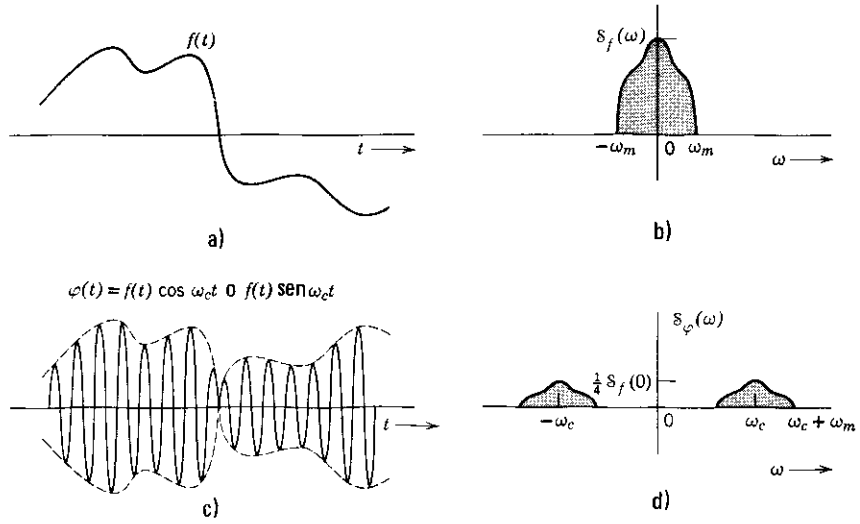


Figura 2.13

El área bajo $\mathcal{S}_f(\omega)$ es $2\pi\overline{f^2(t)}$ (figura 2.13). De la ecuación 2.24b se deduce que el área bajo $\mathcal{S}_\varphi(\omega)$ es la mitad del área bajo $\mathcal{S}_f(\omega)$. Esto también se ve claramente en la figura 2.13. En consecuencia

$$\overline{\varphi^2(t)} = \tfrac{1}{2}\overline{f^2(t)} \qquad (2.25a)$$

Así, el valor cuadrático medio de la señal modulada $f(t)\cos\omega_c t$ es la mitad del valor cuadrático medio de la señal moduladora $f(t)$:

$$\overline{[f(t)\cos\omega_c t]^2} = \tfrac{1}{2}\overline{f^2(t)} \qquad (2.25b)$$

Con un procedimiento parecido, el lector puede demostrar fácilmente que

$$\overline{[f(t)\ \text{sen}\ \omega_c t]^2} = \tfrac{1}{2}\overline{f^2(t)} \tag{2.25c}$$

Al derivar estos resultados, hemos supuesto implícitamente que $\omega_c > \omega_m$. Si $\omega_c < \omega_m$, entonces $\mathcal{S}_f(\omega+\omega_c)$ y $\mathcal{S}_f(\omega-\omega_c)$ de la figura 2.13d quedan traslapadas y la ecuación 2.24 no es válida. Así, la ecuación 2.25 es válida solamente si $\omega_c > \omega_m$ [la frecuencia máxima de $f(t)$].

Ejemplo 2.2 Valor cuadrático medio de una señal limitada en banda en términos de sus muestras

Determinar la potencia (valor cuadrático medio) de una señal limitada en banda en términos de sus muestras.

Se puede expresar una señal $f(t)$, limitada en banda a ω_m radianes por segundo en términos de sus muestras como (ecuación 1.140)

$$f(t) = \sum_k f_k Sa[\omega_m(t - kT)] \tag{2.26}$$

en donde f_k es la k-ésima muestra, $f_k = f(kT)$, y T es el intervalo de muestreo.

$$T = \frac{1}{2f_m} = \frac{\pi}{\omega_m} \tag{2.27}$$

El valor cuadrático medio de $f(t)$ está dado por

$$\overline{f^2(t)} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t)\,dt$$

Al substituir la ecuación 2.26 en la ecuación anterior e intercambiar la suma con la integración obtenemos:

$$\overline{f^2(t)} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\left(\sum_k f_k Sa[\omega_m(t-kT)]\right)^2 dt \tag{2.28}$$

Se puede demostrar que las diferentes funciones de muestreo que aparecen en la ecuación 2.28 son ortogonales, es decir, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sa[\omega_m(t-nT)]Sa[\omega_m(t-mT)]\,dt = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\omega_m} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \tag{2.29}$$

Por lo tanto, la integral de todos los términos de doble producto en la ecuación 2.28 vale cero y (al intercambiar las operaciones de suma e integración) obtenemos

$$\overline{f^2(t)} = \sum_k \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f_k^2 Sa^2[\omega_m(t-kT)]\,dt$$

$$= \sum_k \frac{f_k^2}{\tau}\lim_{\tau\to\infty}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Sa^2[\omega_m(t-kT)]\,dt$$

Si aplicamos el resultado de la ecuación 2.29 en la ecuación anterior, tendremos

$$\overline{f^2(t)} = \sum_k \frac{\pi}{\omega_m \tau} f_k^2 = \frac{1}{2f_m\tau}\sum_k f_k^2 \tag{2.30}$$

Obsérvese que τ es el intervalo en el cual se determina el promedio. Como la velocidad de muestreo es de $2f_m$ muestras por segundo, $2f_m\tau$ es el número total de muestras en el intervalo τ. El segundo miembro de la ecuación 2.30 es obviamente la media del cuadrado de las muestras (valor cuadrático medio de las amplitudes de las muestras). Por lo tanto, la ecuación 2.30 nos hace ver que el valor cuadrático medio de una señal limitada en banda es igual al valor cuadrático medio de sus muestras. Este resultado también se puede expresar como

$$\overline{f^2(t)} = \overline{f_k^2} \tag{2.31}$$

Espectro de densidad de potencia de una señal periódica

Consideremos una señal periódica $f(t)$ y su representación como serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$F(\omega)$, la transformada de Fourier de $f(t)$, está dada por la ecuación 1.102,

$$F(\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\,\delta(\omega - n\omega_0)$$

Se puede obtener la función $f_T(t)$ al multiplicar $f(t)$ por una función pulso rectangular

$$f_T(t) = G_T(t)f(t)$$

Al recurrir al teorema de la convolución en frecuencia, obtenemos

$$F_T(\omega) = \frac{1}{2\pi}\,T\,Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right) * F(\omega)$$

$$= T\,Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\,\delta(\omega - n\omega_0)$$

$$= T\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right) * \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$= T\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n Sa\left[\frac{(\omega - n\omega_0)T}{2}\right]$$

Por lo tanto,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}=\lim_{T\to\infty}T\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2\,Sa^2\left[\frac{(\omega-n\omega_0)T}{2}\right] \tag{2.32}$$

Nótese que, cuando $T\to\infty$, la función $Sa\{[(\omega-n\omega_0)T]/2\}$ tiende a concentrarse en $\omega=n\omega_0$ (véase la ecuación 1.86). En consecuencia, la expresión de $|F_T(\omega)|^2$ en la ecuación 2.32 no tiene ningún término doble producto, ya que cada componente existe en donde las otras son cero. Por medio de las ecuaciones 1.87 y 2.32, obtenemos

$$\mathcal{S}_f(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2\,\delta(\omega-n\omega_0) \tag{2.33}$$

Deducimos que, si

$$\begin{aligned}f(t)&=a\cos(\omega_0t+\theta)\\&=\frac{a}{2}[e^{j(\omega_0t+\theta)}+e^{-j(\omega_0t+\theta)}]\\&=\left(\frac{a}{2}e^{j\theta}\right)e^{j\omega_0t}+\left(\frac{a}{2}e^{-j\theta}\right)e^{-j\omega_0t}\end{aligned}$$

entonces, por la ecuación 2.33,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_f(\omega)&=2\pi\left[\frac{a^2}{4}\,\delta(\omega-\omega_0)+\frac{a^2}{4}\,\delta(\omega+\omega_0)\right]\\&=\frac{\pi a^2}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\end{aligned} \tag{2.34}$$

Así, el espectro de densidad de potencia de una señal sinusoidal $a\cos(\omega_0t+\theta)$ está dado por dos impulsos en $\pm\omega_0$, cada uno de intensidad $\pi a^2/2$. Obsérvese que el espectro de densidad de potencia es independiente de θ.

La potencia de una señal es su valor cuadrático medio. Por lo tanto la potencia P de una señal sinusoidal

$$f(t)=a\cos(\omega_0t+\theta)$$

está dada por

$$P=\overline{f^2(t)}=\frac{a^2}{2} \tag{2.35}$$

Esto se deduce del hecho de que el valor cuadrático medio de cualquier señal sinusoidal de amplitud a es $a^2/2$. O, también, la potencia P es $1/2\pi$ multiplicado por el área bajo $\mathcal{S}_f(\omega)$ en la ecuación 2.34. Se ve con facilidad que es $a^2/2$.

Ejemplo 2.3

Encontrar la potencia de una señal $A+f(t)$, en donde A es una constante y la señal $f(t)$ es una señal de potencia con valor medio cero. Sea P la potencia de $A+f(t)$. Entonces, por definición,

$$\begin{aligned}P&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[A+f(t)]^2\,dt\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{T/2}A^2\,dt+\int_{-T/2}^{T/2}f^2(t)\,dt+2A\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,dt\right]\\&=A^2+\overline{f^2(t)}+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,dt\end{aligned}$$

La integral del segundo miembro es el valor medio de $f(t)$, el cual es cero. Entonces,

$$P=\overline{[A+f(t)]^2}=A^2+\overline{f^2(t)} \tag{2.36}$$

Densidades de potencia de la entrada y de la respuesta.

Apliquemos una señal de potencia $f(t)$ a la entrada de un sistema lineal con función de transferencia $H(\omega)$ y sea $r(t)$ la señal de salida. Expresaremos esto simbólicamente como

$$f(t)\to r(t)$$

Las señales $f_T(t)$ y $r_T(t)$ representan respectivamente señales $f(t)$ y $r(t)$ que valen cero fuera del intervalo $|t|=T/2$.

A continuación apliquemos la señal $f_T(t)$ a la entrada. Eso equivale a aplicar la señal $f(t)$ sólo en el intervalo $|t|\leqslant T/2$. En general, la respuesta no será $r_T(t)$ sino que se extenderá más allá de $t=T/2$. Sin embargo puesto que la entrada es cero para $t>T/2$, la respuesta en $t>T/2$, de un sistema estable debe disminuir con el paso del tiempo. En el límite, cuando $T\to\infty$, su aportación (más allá de $t=T/2$) es insignificante, desde el punto de vista de una señal de duración infinita.*

Entonces, cuando $T\to\infty$, cometemos un error muy pequeño al tomar $r_T(t)$ como la respuesta a $f_T(t)$. Así,

$$\lim_{T\to\infty}f_T(t)\to r_T(t)$$

y

$$\lim_{T\to\infty}R_T(\omega)=H(\omega)F_T(\omega)$$

* Hacemos una argumentación parecida cuando $t<-T/2$. La respuesta en $t>-T/2$, que produce la señal de entrada $f(t)$, aplicada antes de $t=-T/2$, disminuirá a medida que $T\to\infty$.

Además, por definición, el espectro de densidad de potencia $S_r(\omega)$ correspondiente a la señal de salida $r(t)$, está dado por:

$$\begin{aligned} S_r(\omega) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |R_T(\omega)|^2 \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |H(\omega)F_T(\omega)|^2 \\ &= |H(\omega)|^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2 \\ &= |H(\omega)|^2 S_f(\omega) \end{aligned} \tag{2.37}$$

Por lo tanto, es evidente que la densidad de potencia de la señal de salida está dada por $|H(\omega)|^2$ multiplicado por la densidad de potencia de la señal de entrada.

El valor cuadrático medio de una señal está dado por $1/2\pi$ multiplicado por el área bajo su espectro de densidad de potencia. En consecuencia, el valor cuadrático medio de la respuesta $r(t)$ es

$$\overline{r^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_f(\omega)\, d\omega$$

Nótese que $\overline{r^2(t)}$ es, por definición, la potencia de $r(t)$.

Interpretación del espectro de densidad de potencia

El espectro de densidad de potencia tiene una interpretación física muy similar a la de la densidad de energía. Considere una señal de potencia $f(t)$ aplicada a la entrada de un filtro ideal de paso de banda cuya función de transferencia $H(\omega)$ es la de la figura 2.10. Este filtro suprime todas las frecuencias, excepto una banda angosta $\Delta\omega (\Delta\omega \to 0)$ cuya frecuencia central es ω_0. El espectro de densidad de potencia de la señal de salida estará dado por $S_f(\omega_0)$ sobre la banda angosta $\Delta\omega$ centrada en $\pm\omega_0$ como nos enseña la figura 2.14.

La potencia P_0 de la señal de salida, de acuerdo con la ecuación 2.23, está expresada por:

$$P_o = 2S_f(\omega_0)\,\Delta f \tag{2.38}$$

Puede verse que ésta es la aportación de potencia de las componentes de frecuencia de $f(t)$ que están dentro de la banda Δf centrada en ω_0. De nuevo, tenemos componentes de frecuencia positivas y negativas. Por lo tanto, atribuimos $S_f(\omega_0)\,\Delta f$ a las frecuencias positivas y una cantidad igual a las negativas. Así, $S_f(\omega)$ es la potencia por ancho de banda unitario (en Hz) debida a las componentes de frecuencia centradas en la frecuencia ω. Las unidades del espectro de densidad de potencia son watts por Hz.

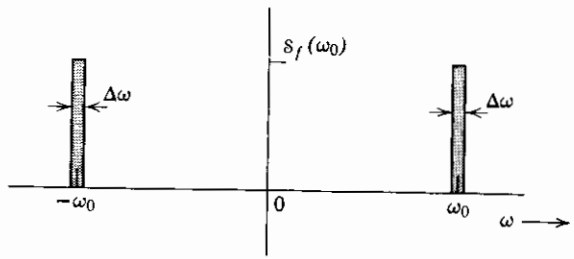


Figura 2.14

Ejemplo 2.4 Densidad de potencia de df/dt

Una señal de potencia $f(t)$ tiene una potencia $S_f(\omega)$. Encontrar el espectro de densidad de potencia de la señal df/dt.

Si se transmite una señal $f(t)$ a través de un diferenciador ideal, la salida será df/dt. La función de transferencia del diferenciador es $j\omega$. Esto se deduce de la propiedad de diferenciación en el tiempo (ecuación 1.119a), que establece que, si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega), \quad \text{entonces} \quad \frac{df}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

Así, para un diferenciador ideal

$$|H(\omega)|^2 = |j\omega|^2 = \omega^2$$

y el espectro de densidad de potencia $S_{\dot{f}}(\omega)$, de df/dt, queda dado por:

$$S_{\dot{f}}(\omega) = \omega^2 S_f(\omega) \tag{2.39}$$

PROBLEMAS

1. Considérese un filtro ideal de paso bajo como el de la figura 2.4a Demuéstrese que la respuesta de este filtro a las señales $(\pi/W)\,\delta(t)$ y $Sa(Wt)$ es la misma. Coméntese el resultado.

2. Un circuito resistivo formado por dos resistores R_1 y R_2 se emplea como atenuador para reducir el voltaje aplicado a las terminales ab. Los resistores R_1 y R_2 tienen capacitancias distribuidas C_1 y C_2 como ilustra la figura P-2.2. ¿Cuál debe ser la relación entre los valores R y C para lograr una atenuación sin distorsión?

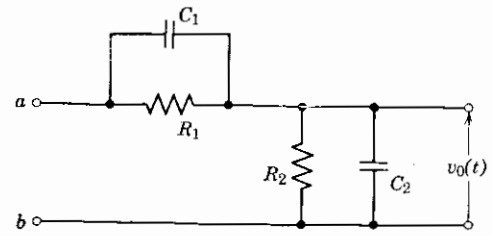


Figura P-2.2

3. Determinar la función de transferencia que relaciona al voltaje de salida con el de entrada en el circuito *R-C* de la figura P-2.3. Representar gráficamente las características de magnitud y fase de la función de transferencia. Indicar las señales que se pueden transmitir con una fidelidad razonable a través de este circuito y cuánto es el retardo de la onda de salida.

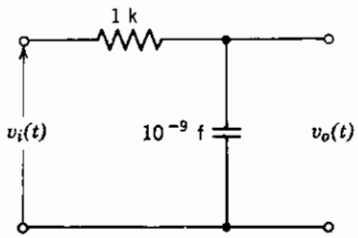


Figura P-2.3

4. La característica de ganancia de un amplificador está dada por

$$H(\omega) = \frac{K}{j\omega + \omega_0}$$

a) Representar gráficamente las características de magnitud y fase del amplificador.
b) Determinar el tipo de señales que serán amplificadas con fidelidad razonable y explicar el motivo. Encontrar el tiempo de retardo en la transmisión de dichas señales.

5. Encontrar la función de transferencia del circuito de la figura P-2.5

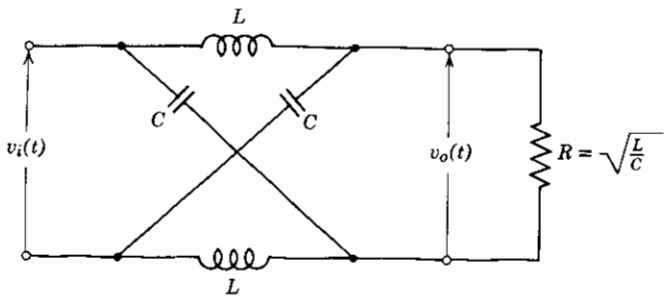


Figura P-2.5

a) Encontrar la función de transferencia que relaciona a $v_0(t)$ con $v_i(t)$.
b) Construir las gráficas de las funciones de magnitud y de fase.
c) Determinar si, en general, se puede emplear este circuito para transmitir señales sin distorsión. Enúnciense las condiciones de las señales que pueden transmitirse por el mismo con fidelidad razonable.
d) Encontrar la impedancia de entrada del circuito.
e) Establecer si puede formarse una línea de retardo empleando un gran número de tales secciones en serie, así como la condición impuesta a las señales que puedan retardarse (con fidelidad razonable) mediante esas secciones. Encontrar el retardo que se obtiene cuando se emplean *n* secciones en serie.

6. Determinar la función de transferencia que relaciona al voltaje de salida $v_0(t)$ y la corriente de entrada $i(t)$ en el circuito de la figura P-2.6. El voltaje de salida debe tener la misma forma de onda que $i(t)$ (transmisión sin distorsión). Determínense los valores de los elementos desconocidos. Determinar si existe algún retardo en la transmisión.

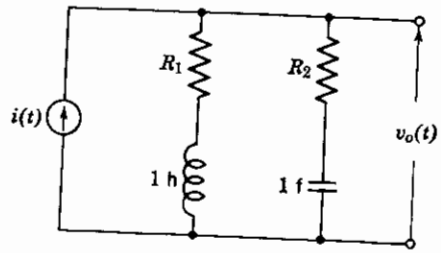


Figura P-2.6

7. La función de transferencia de un filtro ideal de paso de banda está dada por:

$$H(\omega) = k[G_W(\omega - \omega_0) + G_W(\omega + \omega_0)]e^{-j\omega t_0}$$

a) Representar gráficamente las funciones de magnitud y de fase de esta función de transferencia.
b) Evaluar la respuesta de este filtro al impulso.
c) Elaborar la gráfica de la respuesta e indicar si el filtro es físicamente realizable.

8. Encontrar la respuesta del filtro de paso de banda del problema 7 a la señal de excitación $\cos \omega_0 t\, u(t)$. (Suponga que el filtro es de banda angosta, de modo que la función $1/j(\omega + \omega_0) \simeq 1/2j\omega_0$ en toda la banda de paso en $\omega = \omega_0$ y $1/j(\omega - \omega_0) \simeq -1/2j\omega_0$ en toda la banda de paso en $\omega = -\omega_0$.)

9. Encontrar y construir la gráfica de la respuesta de un filtro ideal de paso bajo (figura 2.4a) a la señal $f(t)$ mostrada en la figura P-2.9. La frecuencia de corte del filtro es 1 MHz y el tiempo de retardo t_0 es 1μs.

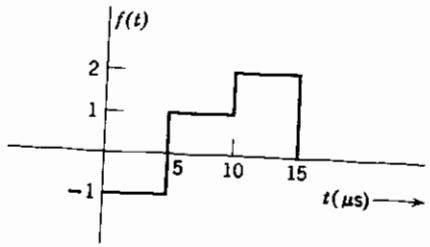


Figura P-2.9

10. Encontrar la respuesta, al impulso unitario y al escalón unitario, del filtro ideal de paso alto cuya función de transferencia está dada por:

$$H(\omega) = [1 - G_{2W}(\omega)]e^{-j\omega t_0}$$

11. El circuito equivalente de un amplificador con tubos al vacío se muestra en la figura P-2.11.

a) Encontrar la función de transferencia $H(\omega)$ que relaciona al voltaje de salida con el voltaje de entrada y determinar el ancho de banda de la ganancia en voltaje.

b) Calcular y dibujar el voltaje de salida $v_0(t)$ cuando se aplica un voltaje unitario en las terminales de entrada *gk*.

c) Si se define el tiempo de subida como el tiempo que se requiere para que la respuesta obtenida en *b*) se eleve del 10 al 90 por ciento de su valor final, demués-

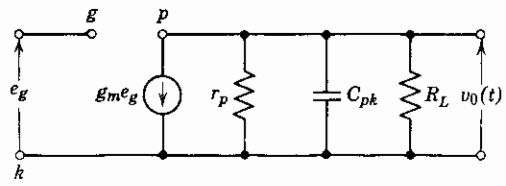


Figura P-2.11

trese que el ancho de banda (en radianes por segundo) multiplicado por el tiempo de subida, es una constante independiente de los parámetros del tubo. Demostrar que la constante es 2.2.

d) Demostrar que el producto de la ganancia de corriente directa $[H(0)]$ y el ancho de banda encontrado en *a*) es igual a g_m/C_{pk}.

12. Supongamos que una señal $f(t)$ es limitada en banda, es decir, que la función de densidad espectral $F(\omega)$ no tiene componentes de frecuencia más allá de una frecuencia W. En otras palabras, $F(\omega) = 0$ en $|\omega| > W$. Se puede amplificar esa señal, sin distorsión, mediante un amplificador cuya función de transferencia $H(\omega)$ tenga una característica de filtro ideal de paso bajo:

$$H(\omega) = kG_{2W}(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

La desviación de la característica de magnitud o de fase con respecto a la que se da en esta ecuación, produce distorsión de eco. Supongamos que la característica de fase del amplificador es ideal, es decir, que $\theta(\omega) = -\omega t_0$, pero que la característica de magnitud disminuye en frecuencias superiores,

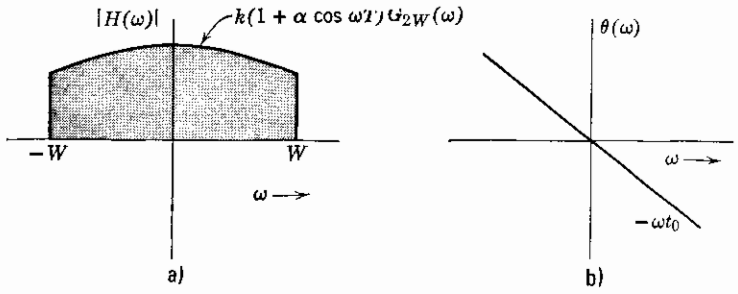


Figura P-2.12

como se ve en la figura P-2.12. Esto puede expresarse como

$$H(\omega) = k(1 + \alpha \cos \omega T)G_{2W}(\omega)$$

Encontrar la salida del amplificador cuando se aplica a la entrada una señal pulso $f(t)$ limitada en banda a W radianes por segundo. (*Sugerencia:* aplíquese la ecuación 1.118).

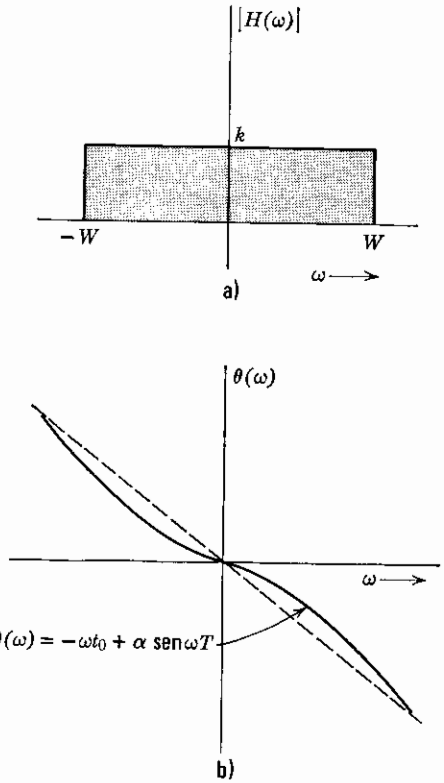


Figura P-2.13

13. En el amplificador mencionado en el problema 12, supongamos que la característica de magnitud del amplificador es ideal, es decir, que $H(\omega) = kG_{2W}(\omega)$, y que, en cambio, la característica de fase (figura P-2.13) está dada por:

$$\theta(\omega) = -\omega t_0 + \alpha \operatorname{sen} \omega T$$

Encontrar la salida del amplificador cuando se aplica a la entrada la misma señal pulso $f(t)$ limitada en banda (*Sugerencia:* tómense α y T muy pequeñas, y exprésese $e^{j\alpha \operatorname{sen} \omega T}$ mediante los primeros dos términos de su serie de Taylor:

$$e^{j\alpha \operatorname{sen} T\omega} \simeq 1 + j\alpha \operatorname{sen} \omega T$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{2}(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})$$

14. Se transmite una señal $f(t) = 2e^{-t}u(t)$ a través de un filtro ideal de paso bajo con frecuencia de corte de 1 radián por segundo. Encontrar el espectro de la densidad de energía de la señal de salida. Determinar la energía de las señales de entrada y de salida.

15. En una señal de energía $f(t)$, demostrar que la función de densidad de energía $\Psi_f(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función $\varphi(\tau)$, donde

$$\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)\,dt$$

16. Deducir el teorema de Parseval (ecuación 2.13b) a partir del teorema de la convolución en el tiempo. [*Sugerencia:* Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, entonces $f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$ y $f(t) * f(-t) \leftrightarrow |F(\omega)|^2$.]

17. En una señal real de potencia $f(t)$, demostrar que la densidad de potencia $\mathcal{S}_f(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\mathcal{R}_f(\tau)$, definida por:

$$\mathcal{R}_f(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t-\tau)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau)\,dt$$

La función $\mathcal{R}_f(\tau)$ se llama función de *autocorrelación en el tiempo* de $f(t)$.

18. En una señal de potencia, se define la potencia como la que se disipa en un resistor de 1 ohm. La ecuación 2.21a expresa esto con respecto a una señal real de potencia $f(t)$. Modifíquese la ecuación para el caso de una señal compleja de potencia $f(t)$.

19. Encontrar la potencia (valor cuadrático medio) de las siguientes señales y dibujar sus espectros de densidad de potencia.

a) $A \cos(2000\pi t) + B \operatorname{sen}(200\pi t)$.
b) $[A + \operatorname{sen}(200\pi t)] \cos(2000\pi t)$.
c) $A \cos(200\pi t) \cos(2000\pi t)$.
d) $A \operatorname{sen}(200\pi t) \cos(2000\pi t)$.
e) $A \operatorname{sen}(300\pi t) \cos(2000\pi t)$.
f) $A \operatorname{sen}^2(200\pi t) \cos(2000\pi t)$.

20. Una señal periódica $f(t)$, como la que se muestra en la figura P-2.20a, se trasmite a través de un sistema con función de transferencia $H(\omega)$. Encontrar el espectro de densidad de potencia y la potencia (valor cuadrático medio) de la señal de salida en tres diferentes valores de T ($T = 2\pi/3$, $\pi/3$ y $\pi/6$). Calcular la potencia de la señal de entrada $f(t)$.

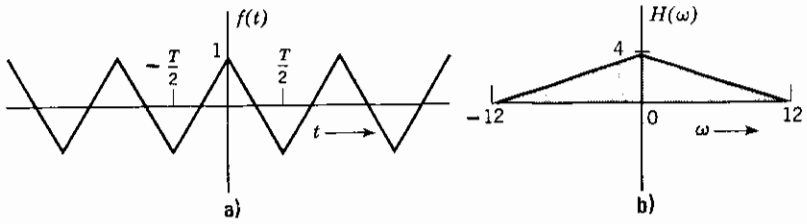


Figura P-2.20

21. Encontrar el valor cuadrático medio del voltaje de salida $v_0(t)$ del circuito *R-C*

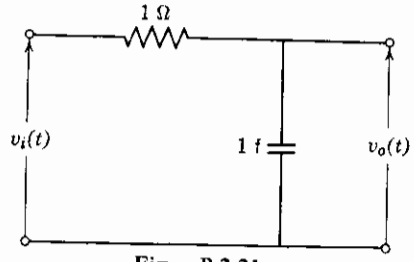


Figura P-2.21

ilustrado en la figura P-2.21, si el voltaje de entrada tiene un espectro de densidad de potencia $\mathcal{S}_i(\omega)$ dado por:

a) $\mathcal{S}_i(\omega) = K$.
b) $\mathcal{S}_i(\omega) = G_2(\omega)$ (función pulso rectangular con frecuencia de corte en $\omega = 1$).
c) $\mathcal{S}_i(\omega) = \pi[\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)]$.

En cada caso, calcular la potencia (valor cuadrático medio) de la señal de entrada.

CAPITULO 3

Sistemas de comunicación: Modulación en amplitud

La ingeniería de comunicaciones se dedica a estudiar la transmisión de señales de un punto a otro. Este problema se presenta en las emisiones de radio y televisión, la comunicación a larga distancia en líneas telefónicas, las comunicaciones por satélite, los sistemas de control remoto, la telemedición, etc. En este capítulo, estudiaremos algunos sistemas de comunicación.

Las señales se transmiten de un punto a otro por un canal que puede tener la forma de línea de transmisión (como un canal telefónico) o simplemente por el espacio abierto, en el cual se reciben las señales portadoras de la información deseada (como la difusión de radio y televisión, la comunicación por satélite, etc.). En general, cada una de las señales transmitidas tienen ancho de banda finito y pequeño, comparado con el ancho de banda del canal mismo. Por lo tanto, si sólo se transmite una señal por canal, éste no se aprovecha adecuadamente, pues se le hace funcionar muy por debajo de su capacidad de transmitir información; sin embargo, no podemos transmitir directamente más de una señal a la vez, porque esto causará interferencia entre las señales y éstas no las podremos recuperar individualmente en el extremo receptor. Eso significa que no es posible, mediante un método directo, transmitir más de una conversación en una línea telefónica ni explotar simultáneamente, más de una estación de radio o de televisión. Se verá que, empleando las técnicas de multicanalización por división de frecuencia o de tiempo, se pueden transmitir varias señales simultáneamente en un mismo canal.

3.1 MULTICANALIZACION POR DIVISION DE FRECUENCIA Y DE TIEMPO

Como se mencionó anteriormente, la transmisión de una sola señal por un canal es una situación de mal aprovechamiento. Sin embargo, esto se mejorará si logramos trasladar los espectros de las diferentes señales para que ocupen rangos diferentes de frecuencia sin traslaparse. Se ha visto en el

capítulo 1 (traslación de frecuencia), que si modulamos una señal (al multiplicar por una señal sinusoidal) se traslada su espectro de frecuencia. En consecuencia, empleando las técnicas de la modulación, se puede transmitir simultáneamente por un canal un gran número de señales.

En el caso de varias señales, se traslada el espectro de cada una en una cantidad adecuada, para evitar el traslapamiento de los diferentes espectros. En el extremo receptor, se separan las diferentes señales mediante filtros apropiados; sin embargo, los espectros individuales así separados, no representan la señal original ya que han sufrido una traslación. Así, para obtener la señal original, se debe trasladar cada espectro en la cantidad adecuada, de modo que recupere su forma original.

La modulación cumple con otro importante propósito en los sistemas que transmiten señales por radiación en el espacio. En la teoría de las ondas electromagnéticas se demuestra que sólo se puede radiar una señal en forma efectiva si la antena radiadora es del orden de un décimo o más de la longitud de onda correspondiente a las frecuencias de las señales radiadas. En la voz humana, la frecuencia máxima es de aproximadamente 10,000 Hz., lo cual corresponde a una longitud de onda mínima de 30,000 metros. Así, para radiar ondas electromagnéticas que correspondan al rango de frecuencia de la voz humana, se necesitaría una antena de varios kilómetros de longitud; esto, desde luego, no es nada práctico. El proceso de modulación traslada el espectro de frecuencia a cualquier rango de frecuencia superior que resulte conveniente, haciendo más fácil radiarlo mediante ondas electromagnéticas. En la práctica, todas las señales de radio y de televisión están moduladas, es decir, el espectro de frecuencia está trasladado a un rango más alto. Por consiguiente, la modulación no solamente permite la transmisión simultánea de varias señales sin interferencia entre ellas, sino que también hace posible su transmisión (radiación) efectiva.

El método de traslación de frecuencia que hemos mencionado no es la única forma de transmitir simultáneamente varias señales en un canal. En el capítulo 1, se ha demostrado que una señal limitada en banda (que no contenga componentes espectrales superiores a una frecuencia f_m Hz) queda especificada en forma única por sus valores a intervalos de $1/(2f_m)$ segundos (teorema de muestreo uniforme). Se demostró que se puede reconstruir la señal completa a partir solamente del conocimiento de sus valores en estos instantes. Por consiguiente, sólo se tienen que transmitir las muestras de la señal en este número finito de instantes. Así, el canal no queda ocupado más que en esos instantes y no se envían señales durante el resto del tiempo. Entonces, se pueden intercalar las muestras de varias señales en el canal. En el extremo receptor, las muestras se separan mediante un detector síncrono adecuado.

Por lo tanto, es posible transmitir varias señales simultáneamente por un canal, siempre que se les pueda separar en el extremo receptor. Cada señal queda especificada en el dominio del tiempo o el dominio de la frecuencia. Así, en el receptor, recuperamos individualmente las señales, ya sea en el dominio del tiempo o de la frecuencia. En el método de la traslación de frecuencia, todas las señales se mezclan en el dominio del tiempo, pero sus espectros están separados de manera que ocupan diferentes bandas de frecuencia. Se recuperan las señales en el receptor empleando filtros adecuados.

Obsérvese que se recuperan los espectros de las señales individuales, por lo que este método de separación se lleva a cabo en el dominio de la frecuencia. Este procedimiento, en el que las diferentes señales comparten diferentes intervalos de frecuencia, se conoce como sistema de multicanalización por división de frecuencia. En el segundo método, se intercalan las muestras de las diferentes señales y éstas se separan individualmente en el extremo receptor mediante el detector síncrono adecuado. En este caso, recuperamos las diferentes señales en el dominio del tiempo; los espectros de frecuencia de todas las señales muestreadas están mezclados ocupando el mismo rango de frecuencia. Este sistema, en el que todas las señales comparten los diferentes intervalos de tiempo se conoce como sistema de multicanalización por división de tiempo. A continuación, estudiaremos varios tipos de sistemas de comunicación que emplean las técnicas de multicanalización mencionadas.

3.2 MODULACION EN AMPLITUD: SISTEMAS DE PORTADORA SUPRIMIDA (AM-PS)

En esencia, en esta técnica se traslada el espectro de frecuencia de la señal que se va a transmitir, al multiplicarlo por una señal sinusoidal cuya frecuencia corresponde a la traslación requerida. Por el teorema de la modulación (ecuación 1.116a) es evidente que el espectro de $f(t)\cos\omega_c t$ es el mismo que el de $f(t)$, pero trasladado en $\pm\omega_c$ radianes por segundo (figura 3.1e); es decir, si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

entonces

$$f(t)\cos\omega_c t \leftrightarrow \tfrac{1}{2}[F(\omega+\omega_c)+F(\omega-\omega_c)] \qquad (3.1)$$

A la señal $\cos\omega_c t$ se le llama portadora. La multiplicación de $\cos\omega_c t$ por $f(t)$ equivale a variar la amplitud de la portadora en proporción a $f(t)$. Se dice que la señal portadora $\cos\omega_c t$ está modulada por la señal modulante $f(t)$. Este modo de transmisión se conoce como modulación en amplitud con *portadora suprimida* (AM-PS), debido a que la señal modulada $f(t)\cos\omega_c t$ no contiene señal portadora adicional; dicha portadora queda suprimida. Posteriormente estudiaremos la modulación en amplitud con portadora libre adicional, en donde la señal modulada es $f(t)\cos\omega_c t + A\cos\omega_c t$. En este caso se transmite la portadora adicional por tener algunas ventajas que se estudiarán después. A tales sistemas se les llama simplemente sistemas de amplitud modulada (AM).

Por lo tanto, la modulación en amplitud (AM-PS) traslada el espectro de frecuencia en $\pm\omega_c$ radianes por segundo, como se ve en la ecuación 3.1. Para recuperar la señal original $f(t)$ a partir de la señal modulada, es necesario retrasladar el espectro a su posición original; a ese proceso de traslación se le conoce como demodulación o detección.

El espectro de la forma de onda modulada (figura 3.1e) se vuelve a trasladar convenientemente a la posición original al multiplicar la señal modulada por $\cos\omega_c t$ en el extremo receptor. Puesto que la multiplicación en

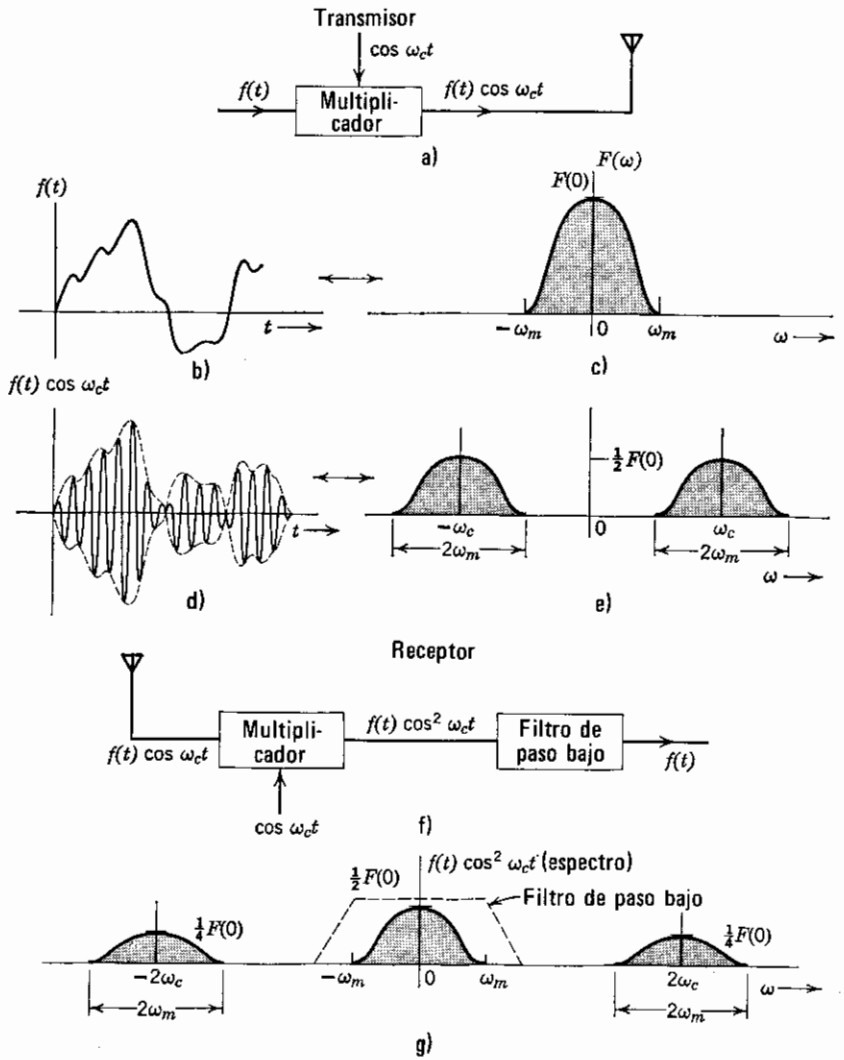


Figura 3.1

el dominio del tiempo equivale a la convolución de espectros en el dominio de la frecuencia, es evidente que obtendremos el espectro de la señal resultante $f(t)\cos^2\omega_c t$ mediante la convolución del espectro de la señal recibida (figura 3.1e) con el espectro de $\cos\omega_c t$ (dos impulsos en $\pm\omega_c$). Obsérvese que esta convolución produce el espectro mostrado en la figura 3.1g (véase el ejemplo 1-12, figura 1.44). Este resultado también es consecuencia directa de la identidad

$$f(t)\cos^2\omega_c t = \tfrac{1}{2}f(t)[1+\cos 2\omega_c t] = \tfrac{1}{2}[f(t)+f(t)\cos 2\omega_c t] \quad (3.2)$$

Por lo tanto, si

$$f(t)\leftrightarrow F(\omega)$$

entonces

$$f(t)\cos^2\omega_c t\leftrightarrow \tfrac{1}{2}F(\omega)+\tfrac{1}{4}[F(\omega+2\omega_c)+F(\omega-2\omega_c)] \quad (3.3)$$

Es evidente que, a partir del espectro de la figura 3.1g, se puede recuperar la señal original $f(t)$ por medio de un filtro de paso bajo, el cual permitirá el paso de $F(\omega)$ y atenuará las componentes restantes centradas en $\pm 2\omega_c$.

Una forma posible de la característica del filtro de paso bajo se ilustra (línea punteada) en la figura 3.1g. El sistema que se requiere en el extremo receptor para recobrar la señal $f(t)$ a partir de la señal modulada recibida $f(t)\cos\omega_c t$ se muestra en la figura 3.1f. Es interesante observar que la multiplicación de $f(t)$ por $\cos\omega_c t$ traslada su espectro en $\pm\omega_c$. El nuevo espectro puede volver a su posición original mediante otra traslación de $\pm\omega_c$, que se lleva a cabo mediante la multiplicación de la señal modulada por $\cos\omega_c t$ en el receptor. (En el proceso, se obtiene un espectro adicional centrado en $\pm 2\omega_c$, que se elimina.) Por lo tanto, el proceso en el receptor es exactamente el mismo que el del transmisor. En consecuencia, este método de recobrar la señal original se llama detección síncrona o detección coherente.

De acuerdo con lo anterior, vemos claramente que, en este sistema, se necesita generar localmente la portadora en el receptor. La frecuencia y la fase de esta portadora son cuestiones extremadamente críticas. Supongamos, por ejemplo, que la portadora local tiene un pequeño error de frecuencia, $\Delta\omega$. La señal que se recibe es $f(t)\cos\omega_c t$ y la portadora local es $\cos(\omega_c+\Delta\omega)t$. El producto está dado por

$$f(t)\cos\omega_c t\cos(\omega_c+\Delta\omega)t = \tfrac{1}{2}f(t)[\cos(\Delta\omega)t+\cos(2\omega_c+\Delta\omega)t] \quad (3.4)$$

El término $f(t)\cos(2\omega_c+\Delta\omega)t$ representa el espectro de $f(t)$ centrado en $\pm(2\omega_c+\Delta\omega)$ y se le puede eliminar mediante un filtro de paso bajo. La salida de este filtro producirá el término restante $\frac{1}{2}f(t)\cos(\Delta\omega)t$ de la ecuación 3.4. Así, en lugar de recobrar la señal original $f(t)$, obtenemos la señal $f(t)\cos(\Delta\omega)t$. En general, $\Delta\omega\to 0$ y $f(t)\cos(\Delta\omega)t$ representa $f(t)$ multiplicada por un factor que varía ligeramente. Esto, evidentemente, constituye un tipo muy poco conveniente de distorsión. Por lo tanto, es de suma importancia tener frecuencias portadoras idénticas en el transmisor y en el receptor. La fase del oscilador local también es crítica. Estudiaremos este tema con más detalle en la sección 3.5.

Para lograr la precisión de la frecuencia y el control de la fase del oscilador local, en el receptor debe haber circuitos muy costosos y complicados. En la mayoría de esos sistemas, se transmite una cantidad muy pequeña de portadora adicional (portadora-piloto) con la señal modulada. En el receptor, la portadora-piloto se separa mediante un filtro, se amplifica y se emplea para sincronizar la fase del oscilador local, que genera la portadora con la potencia adecuada y con la misma frecuencia que la del transmisor.

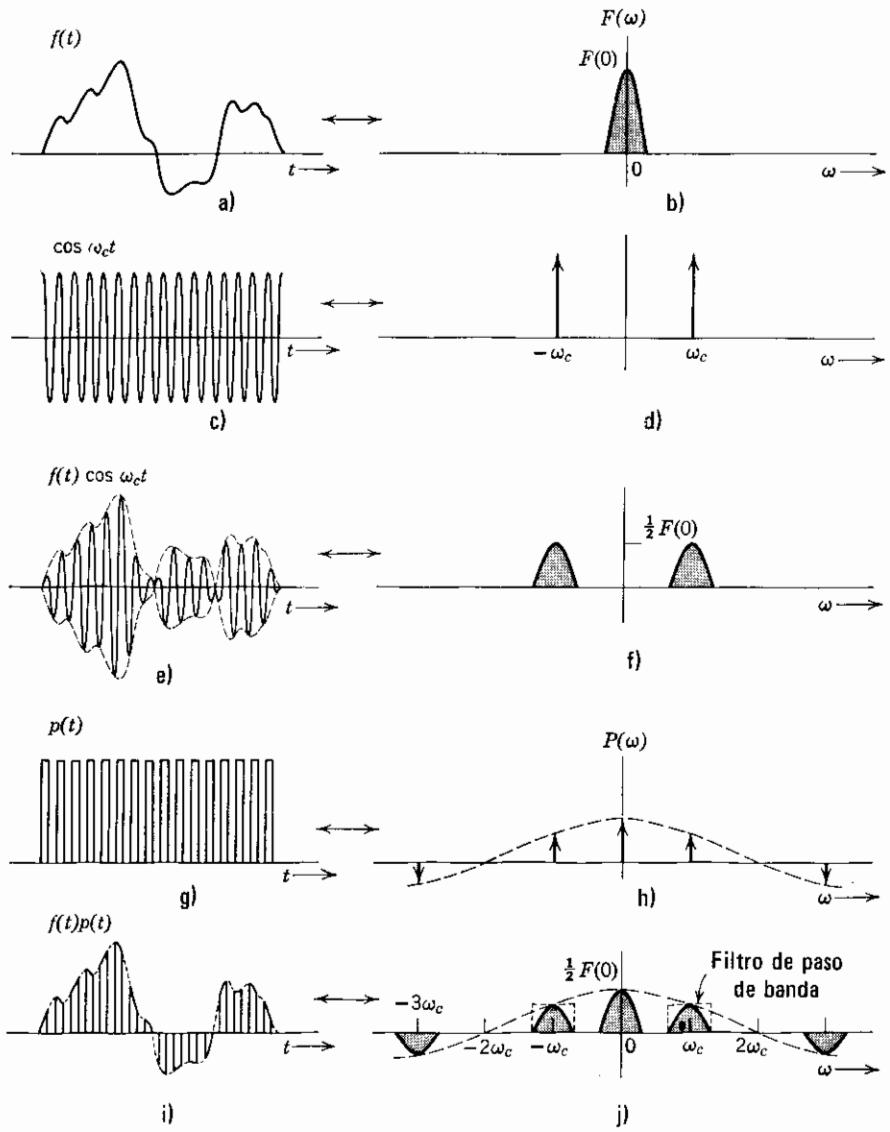


Figura 3.2

Técnicas de traslación de frecuencia

Según el teorema de la modulación, es obvio que se traslada el espectro de cualquier señal en $\pm\omega_c$ radianes por segundo en el dominio de la frecuencia cuando se le multiplica por una señal sinusoidal de frecuencia ω_c; sin embargo, ésta no es la única forma de lograr la traslación. Se demuestra fácilmente que se puede trasladar el espectro en una cantidad $\pm\omega_c$ al multiplicar la señal por cualquier señal periódica de frecuencia ω_c, sin importar su forma. Esto es obvio, pues cualquier forma de onda periódica de frecuencia ω_c contiene componentes sinusoidales de frecuencias 0, ω_c, $2\omega_c$, $3\omega_c, \ldots$, etc. En consecuencia, la multiplicación de la señal $f(t)$ por cualquier forma de onda periódica de frecuencia ω_c trasladará el espectro de $f(t)$ en 0, $\pm\omega_c$, $\pm 2\omega_c$, $\pm 3\omega_c$, etc. Puesto que lo único que nos interesa es la parte del espectro que está centrado en $\pm\omega_c$, éste se puede separar por medio de un filtro de paso de banda que permita el paso de las componentes de frecuencia centradas en $\pm\omega_c$ y atenúe las demás frecuencias.

Como ejemplo, considérese una señal $f(t)$ (figura 3.2a) cuyo espectro $F(\omega)$ se ilustra en la figura 3.2b. La multiplicación de esta señal por una señal sinusoidal $\cos\omega_c t$ (figura 3.2e) traslada el espectro en $\pm\omega_c$ (figura 3.2f). Ahora bien, en lugar de una señal sinusoidal, multiplicaremos a $f(t)$ por una onda rectangular (figura 3.2g) de frecuencia ω_c. El espectro $P(\omega)$ de una onda rectangular periódica $p(t)$ representado en la figura 3.2h, es una secuencia de impulsos localizados en $\omega = 0, \pm\omega_c, \pm 3\omega_c, \pm 5\omega_c, \ldots$, etc. (véase la figura 1.34). Es evidente que el espectro de $f(t)p(t)$ está dado por $(1/2\pi)F(\omega) * P(\omega)$. El resultado de esta convolución, llevada a cabo gráficamente, se muestra en la figura 3.2j.

En la figura, se ve con facilidad que la multiplicación de $f(t)$ por $p(t)$ traslada el espectro de $f(t)$ en $\omega = 0, \pm\omega_c, \pm 3\omega_c, \pm 5\omega_c, \ldots$, etc. Este resultado es válido para cualquier función periódica de frecuencia ω_c, sin importar su forma. En el caso especial de una onda rectangular, las armónicas pares $\pm 2\omega_c, \pm 4\omega_c, \ldots$, etc., son cero; pero en una señal periódica en general esto no sucede necesariamente. Por lo tanto, concluimos que la multiplicación de una señal $f(t)$ por cualquier señal periódica de frecuencia ω_c, sin importar su forma, traslada su espectro en $\omega = 0, \pm\omega_c, \pm 2\omega_c, \pm 3\omega_c, \ldots$, etc. Se puede obtener fácilmente el resultado en forma analítica. Sea $\varphi(t)$ una señal periódica de frecuencia f_c Hz ($\omega_c = 2\pi f_c$). La transformada de Fourier de una función periódica en general quedó determinada en el capítulo 1 (ecuación 1.102). Tenemos que

$$\varphi(t) \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n \, \delta(\omega - n\omega_c) \tag{3.5}$$

en donde Φ_n representa el coeficiente de la enésima armónica en la serie exponencial de Fourier de $\varphi(t)$. Se infiere del teorema de convolución que

$$f(t)\varphi(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) * 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n \, \delta(\omega - n\omega_c) \tag{3.6}$$

$$\leftrightarrow \sum_{n=-\infty} \Phi_n F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_c)$$

$$\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n F(\omega - n\omega_c) \tag{3.7}$$

Es evidente, por la ecuación 3.7, que el espectro de $f(t)\varphi(t)$ contiene al mismo espectro $F(\omega)$ y a $F(\omega)$ trasladado en $\pm\omega_c$, $\pm 2\omega_c$, . . . , etc., observamos que las amplitudes de los ciclos sucesivos de $F(\omega)$ están multiplicados por las constantes Φ_0, Φ_1, Φ_2, . . . , etc. Cuando $\varphi(t)$ es una onda rectangular, se puede determinar Φ_n a partir de la ecuación 1.66a substituyendo $T = 2\delta$ y $A = 1$

$$\Phi_n = \frac{1}{2} Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Nótese que

$$Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\text{sen } (n\pi/2)}{(n\pi/2)} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}\left(\dfrac{2}{n\pi}\right) & n \text{ impar} \\ 1 & n = 0 \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

Entonces, de la ecuación 3.5, obtenemos

$$p(t) \leftrightarrow \pi\,\delta(\omega) + 2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \text{ impar, } 1,\,3,\,5,\,\ldots)}}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n}\,\delta(\omega - n\omega_c) \tag{3.8}$$

y

$$f(t)p(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} F(\omega) + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \text{ impar, } 1,\,3,\,5,\,\ldots)}}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} F(\omega - n\omega_c) \tag{3.9}$$

La figura 3.2j representa el espectro de la ecuación 3.9.

Sin embargo, en amplitud modulada lo único que interesa es el espectro de frecuencia centrado en $\pm\omega_c$, que se obtiene al emplear un filtro de paso

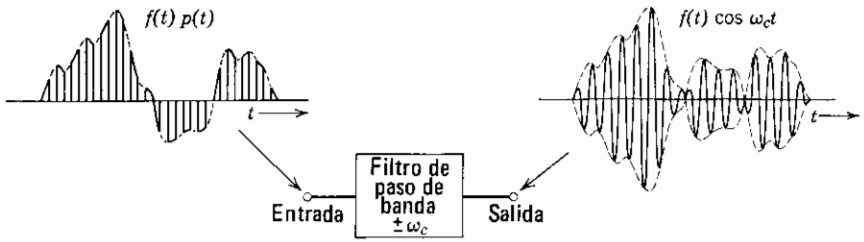


Figura 3.3 Efecto de filtrar una onda rectangular modulada.

de banda que deje pasar a las componentes de frecuencia centradas en $\pm\omega_c$ y atenúe las demás componentes. Un circuito resonante R-L-C simple, sintonizado en $\omega = \omega_c$ dejará pasar una banda de frecuencias centrada en $\pm\omega_c$ y eliminará las demás componentes. Por consiguiente, es obvio que cuando la señal $f(t)p(t)$ (figura 3.2i) pasa a través de tal filtro de paso de banda centrado en $\pm\omega_c$, la salida resultante estará dada por $f(t)$ cos $\omega_c t$ como nos enseña la figura 3.3.

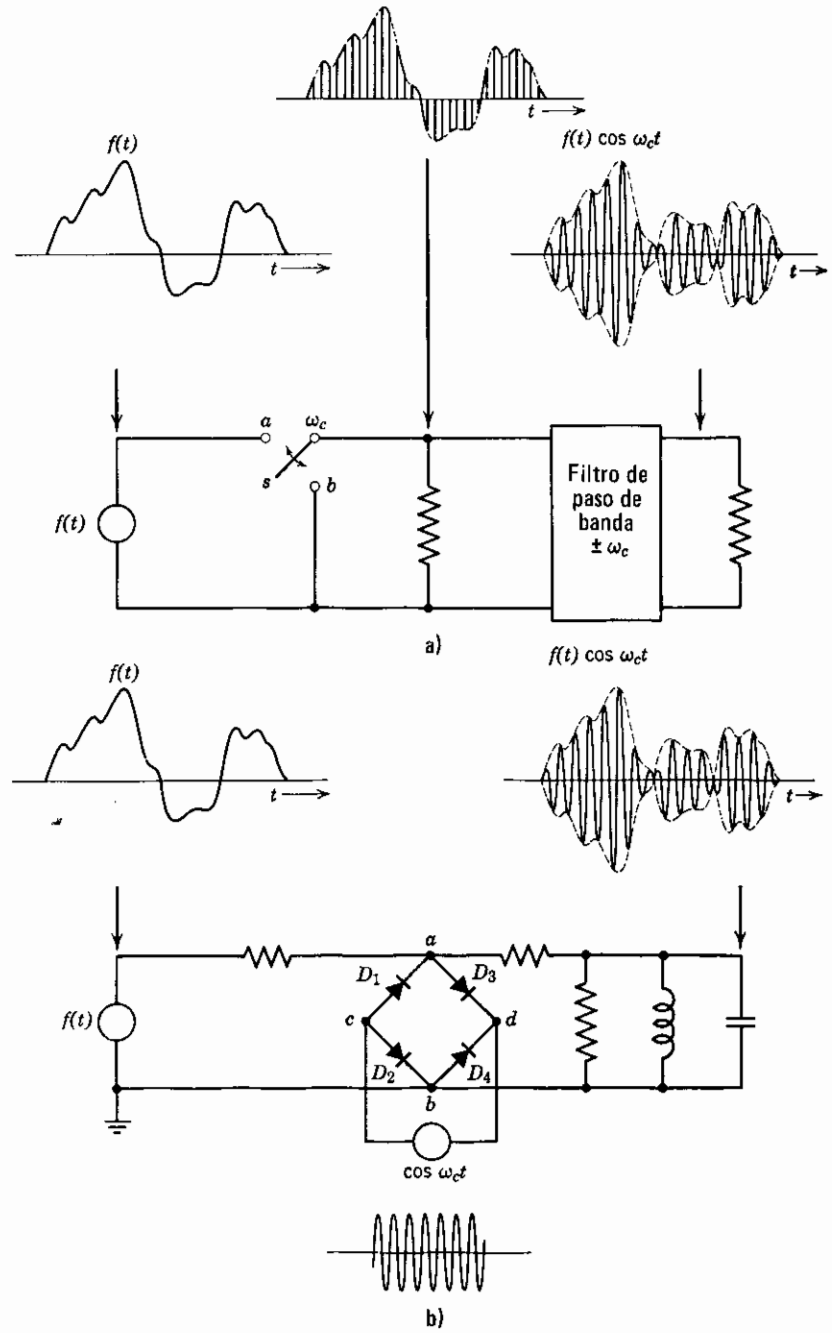


Figura 3.4 a) Esquema de un modulador de interrupción. b) Modulador balanceado de interrupción (modulador de diodos en puente), que emplea diodos como interruptores.

Al proceso de la traslación de frecuencia también se le llama *conversión o mezcla de frecuencia.* Los sistemas que desempeñan esa función se llaman *conversores o mezcladores de frecuencia.* Tanto el modulador como el demodulador ejecutan la operación de trasladar la frecuencia, por lo que también nos referimos a ellos como conversores o mezcladores de frecuencia.

En nuestro estudio de las técnicas de traslación de frecuencia a menudo nos referiremos a filtros de paso bajo, paso alto y paso de banda. Mediante el empleo de un gran número de elementos, se pueden diseñar filtros con características de magnitud o de fase que se aproximen a la característica ideal tanto como sea posible; pero en muchos casos, las componentes de frecuencia no requeridas (que se quieren eliminar) están tan separadas de las componentes de frecuencias útiles que se emplean formas muy simples de filtros.

Sistemas de modulación (conversores o mezcladores de frecuencia)

Consideremos a continuación algunos circuitos simples que llevan a cabo la modulación. Como el proceso de la modulación traslada el espectro de frecuencia, la salida de un modulador tiene frecuencias diferentes de las que componen la señal de entrada. Por lo tanto, es imposible producir modulación por medio de sistemas lineales invariantes en el tiempo, debido a que la respuesta de esos sistemas no contiene frecuencias diferentes a las de la señal de entrada; sin embargo, se puede efectuar la modulación mediante sistemas lineales variables en el tiempo (tales como circuitos de conmutación o de interrupción) o con circuitos que utilizan elementos no lineales. La no linealidad proporciona el verdadero mecanismo de la modulación, pero se suele representar un sistema que produce modulación como un sistema lineal variable en el tiempo.

El diagrama esquemático de un modulador de interrupción se muestra en la figura 3.4a. El interruptor s alterna entre las terminales a y b, con frecuencia ω_c. Durante la mitad del período, el interruptor conecta la terminal c con la señal $f(t)$ y durante la otra mitad, la terminal c está conectada con b. En consecuencia, la onda de salida en la terminal c se interrumpe con frecuencia ω_c. Se puede visualizar la operación de interrupción como una multiplicación de $f(t)$ por una onda rectangular $p(t)$. Como ya hemos explicado, esa forma de onda interrumpida contiene el espectro de $f(t)$ trasladado en $\omega = 0, \pm\omega_c, \pm 2\omega_c, \pm 3\omega_c, \ldots$, etc., y la señal modulada que se quiere $f(t)\cos\omega_c t$ se puede recuperar al transmitir la señal interrumpida a través de un filtro de paso de banda centrado en $\pm\omega_c$ (figura 3.3)

En la práctica se obtiene ese sistema con un circuito como el que se ilustra en la figura 3.4b. En este circuito el arreglo de los diodos actúa como el interruptor necesario. Cuando la señal $\cos\omega_c t$ tiene una polaridad tal que la terminal c es positiva con respecto a la terminal d, todos los diodos conducen, si suponemos que la señal $\cos\omega_c t$ es mucho mayor que la señal $f(t)$. En estas condiciones, el voltaje a través del diodo D_1 es el mismo que el del diodo D_2 de manera que la terminal a queda al mismo potencial que el de la terminal b. Así, la terminal de salida a queda conectada a tierra. Cuando la polaridad de la señal $\cos\omega_c t$ hace que la terminal d sea positiva con respecto a la terminal c, todos los diodos quedan polarizados en forma inversa y actúan como circuito abierto. En esa condición, la terminal a está conectada con la señal $f(t)$ a través de la resistencia R. Es evidente que los diodos conectan alternativamente la terminal a con la señal $f(t)$ y con tierra a una frecuencia ω_c. En la terminal de salida, un circuito resonante paralelo sintonizado a la frecuencia ω_c actúa como filtro de paso de banda. El voltaje de salida constituye la señal modulada que se busca, proporcional a $f(t)\cos\omega_c t$. Nótese que el circuito modulador que se ha estudiado aquí es lineal puesto que la multiplicación de $f(t)$ por una constante incrementa proporcionalmente la salida; sin embargo, el circuito es variable en el tiempo, pues sus parámetros cambian periódicamente. El modulador que vemos en la figura 3.4b se conoce como modulador de diodos en puente.

En general, se describe un modulador lineal como un sistema cuya ganancia (o función de transferencia) puede variar con el tiempo si se aplica una señal variable con el tiempo en algún punto. La ganancia G puede variar proporcionalmente a la señal $f(t)$. Así,

$$G = Kf(t)$$

La portadora $\cos\omega_c t$ se aplica a la terminal de entrada (figura 3.5a). En esta forma, la salida será una señal modulada $Kf(t)\cos\omega_c t$. También se puede utilizar una portadora para variar el parámetro de ganancia (figura 3.5b) y $f(t)$ se aplica a las terminales de entrada. El ejemplo del modulador de anillo queda dentro de esta categoría. Este tipo de modulador actúa como un sistema cuya ganancia varía entre la unidad y cero, a la frecuencia de la portadora. En este caso, la variación de la ganancia en función del tiempo no es sinusoidal sino rectangular. Esto, por supuesto,

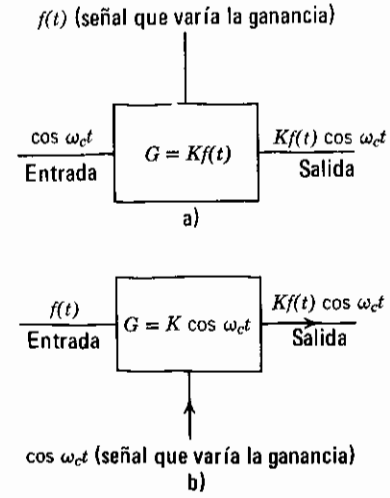
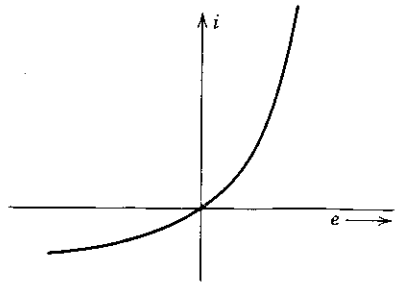


Figura 3.5 Sistemas lineales de modulación.

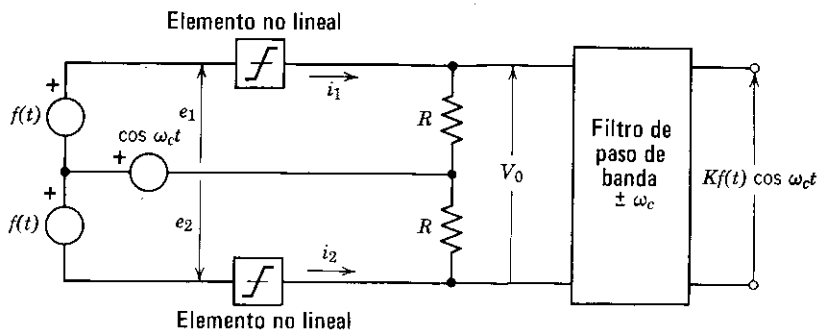
produce traslaciones indeseables en armónicas superiores de ω_c, que se eliminan mediante filtros.

En la práctica, los parámetros de ganancia de dispositivos activos, como los tubos al vacío (μ) y los transistores (β) dependen de los valores de voltajes y corrientes de polarización. Así, se puede hacer que la ganancia de estos dispositivos varíe con el tiempo, al variar los potenciales de polarización, por medio de señales adecuadas. Las características de esos sistemas de modulación (y de demodulación), que emplean tubos al vacío y transistores se describen en los textos acerca de circuitos electrónicos.

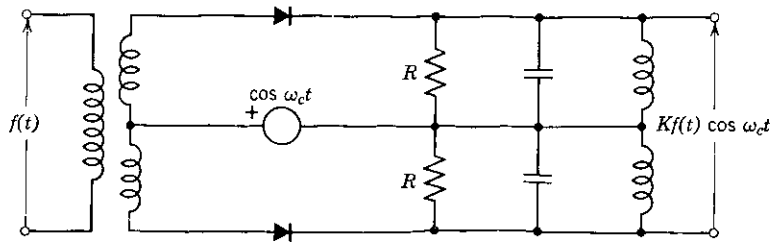
Como dijimos antes, también se puede lograr la modulación si empleamos dispositivos no lineales. En la figura 3.6a, se muestra la característica típica de un dispositivo no lineal. Un buen ejemplo de ese dispositivo es el diodo semiconductor.



a)



b)



c)

Figura 3.6

Nos podemos aproximar a una característica no lineal de esta clase mediante una serie de potencias:

$$i = ae + be^2$$

Bajo condiciones de señales grandes, los transistores y los tubos al vacío también exhiben relaciones similares entre la entrada y la salida. En la figura 3.6c tenemos un arreglo posible para llevar a cabo la modulación que emplea elementos no lineales.

Para analizar este circuito, consideremos la conexión en serie del elemento no lineal con la resistencia R como elemento no lineal compuesto, cuyo voltaje terminal e y corriente i se relacionan por la serie de potencias:

$$i = ae + be^2$$

Los voltajes e_1 y e_2 (figura 3.6b): están dados por

$$e_1 = \cos \omega_c t + f(t)$$

y

$$e_2 = \cos \omega_c t - f(t)$$

Es evidente que las corrientes i_1 y i_2 están dadas por

$$\begin{aligned} i_1 &= ae_1 + be_1^2 \\ &= a[\cos \omega_c t + f(t)] + b[\cos \omega_c t + f(t)]^2 \end{aligned} \tag{3.10a}$$

y

$$i_2 = a[\cos \omega_c t - f(t)] + b[\cos \omega_c t - f(t)]^2 \tag{3.10b}$$

El voltaje de salida v_0 es:

$$v_o = i_1 R - i_2 R$$

Si substituimos 3.10 en esta ecuación obtenemos:

$$v_o(t) = 2R[2bf(t) \cos \omega_c t + af(t)]$$

Se puede eliminar la señal $af(t)$ de esa ecuación mediante un filtro de paso de banda sintonizado en ω_c, en las terminales de salida. En este circuito, se pueden emplear diodos semiconductores como elementos no lineales. En la figura 3.6c, se muestra una versión práctica de ese modulador. Todos los moduladores que hemos examinado generan señales moduladas en amplitud con portadora suprimida y se llaman *moduladores balanceados.*

Demodulación (detección) de señales moduladas en amplitud con portadora suprimida

Para recobrar la señal original $f(t)$ en el extremo receptor, es necesario demodular la señal recibida $f(t) \cos \omega_c t$. Como se ha visto, el proceso de demodulación equivale a la traslación del espectro y se le realiza mediante la multiplicación de la señal modulada $f(t) \cos \omega_c t$ por $\cos \omega_c t$ (detección síncrona). Por lo tanto, los mismos circuitos que se usaron en el proceso de

modulación se pueden emplear para el propósito de la demodulación. Sin embargo, existe una diferencia entre los circuitos de modulación y de demodulación. El espectro de salida del modulador está centrado en $\pm\omega_c$ por lo que es necesario usar un filtro de paso de banda sintonizado en ω_c en la salida de dicho circuito. En el caso del demodulador, el espectro de salida es $F(\omega)$ y está centrado en $\omega = 0$. En consecuencia, se emplea un filtro de paso bajo en la salida para eliminar las componentes indeseables de frecuencia alta que están centradas en $\pm\omega_c$, $\pm 2\omega_c$, $\pm 3\omega_c$, . . . , etc. El demodulador de interrupción y el de elementos no lineales se muestran en las figuras 3.7a y 3.7b. Obsérvese que, en la salida de cada circuito, se utiliza una configuración *R-C* como filtro de paso bajo.

Se puede realizar la demodulación al multiplicar la señal modulada $[f(t) \cos \omega_c t]$ por una señal periódica de frecuencia ω_c. Si $\varphi(t)$ es una señal periódica de frecuencia ω_c, entonces su transformada de Fourier $\Phi(\omega)$ se puede escribir como (ecuación 3.5)

$$\varphi(t) \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n \, \delta(\omega - n\omega_c)$$

Es obvio que si multiplicamos la señal modulada $f(t) \cos \omega_c t$ por $\varphi(t)$, el espectro resultante estará dado por

$$f(t) \cos \omega_c t \varphi(t) \leftrightarrow \pi[F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c)] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n \, \delta(\omega - n\omega_c)$$

$$\leftrightarrow \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n \{F[\omega - (n+1)\omega_c] + F[\omega - (n-1)\omega_c]\} \tag{3.11}$$

Es claro que este espectro contiene un término $F(\omega)$ que se elimina con un filtro de paso bajo.

Amplificador de interrupción

El principio de la traslación de frecuencia también resulta útil en los amplificadores de corriente directa y frecuencia baja. Por consideraciones prácticas del tamaño de los capacitores de acoplamiento, es muy difícil construir amplificadores para frecuencias muy bajas. Como un capacitor actúa como circuito abierto a frecuencias bajas, los capacitores de acoplamiento, de los que se requiere en los amplificadores de varias etapas son de gran tamaño. En consecuencia, para amplificar señales de corriente directa y de frecuencias muy bajas, se utiliza el acoplamiento directo. Sin embargo, este acoplamiento plantea un problema grave de desviación del punto de operación estática del amplificador. La desviación causada por los cambios ambientales hace variar la señal de salida y la variación se confunde con la que produce la misma señal de entrada. El problema se resuelve con un amplificador de interrupción cuyo funcionamiento consiste, en esencia, en trasladar el espectro de la señal de entrada a un rango superior de frecuencia apropiado en donde la amplificación se realiza fácilmente. Se demodula

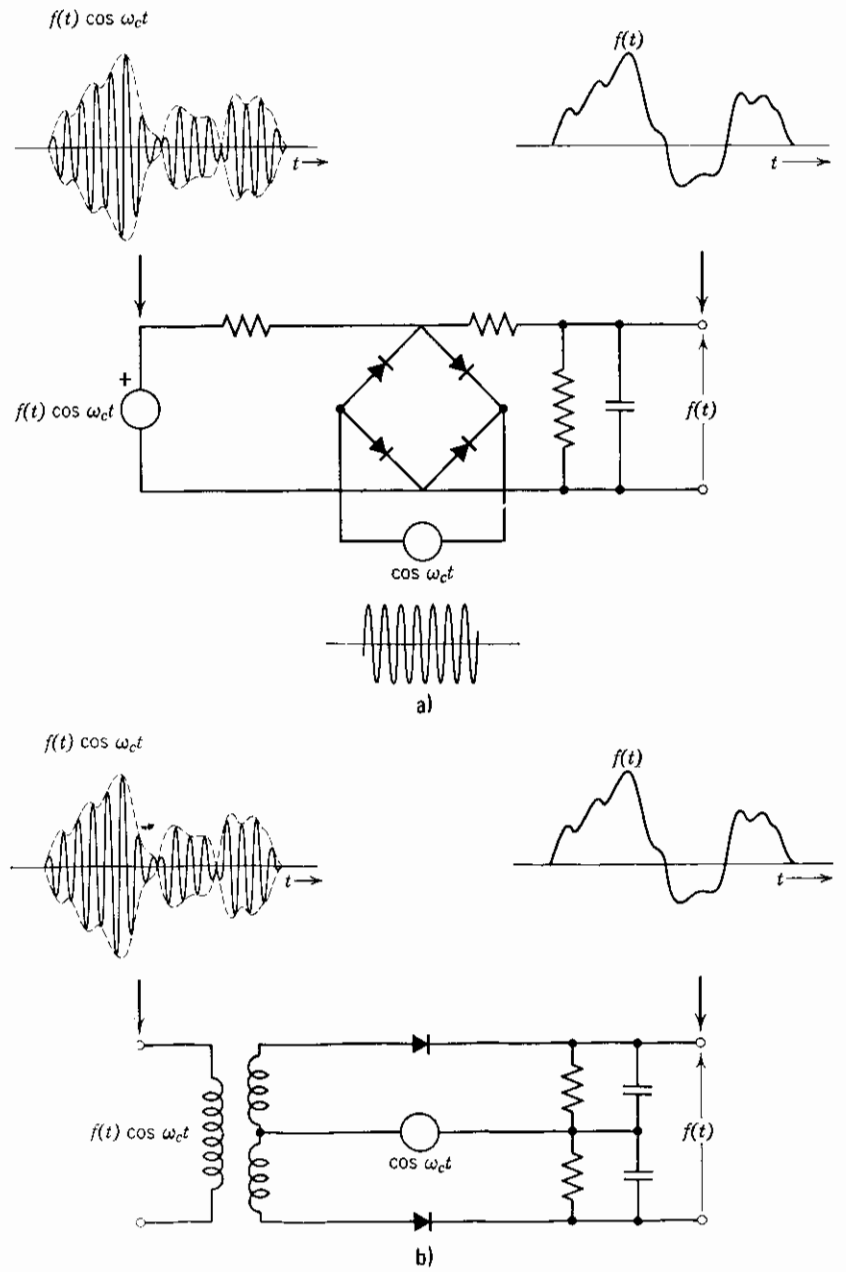


Figura 3.7 a) Demodulador de diodos en puente. b) Demodulador con elementos no lineales.

la señal amplificada para recuperar la forma amplificada de la señal original de frecuencia baja.

Aunque puede emplearse cualquiera de los circuitos estudiados, generalmente se utiliza un interruptor mecánico para la modulación y la demodulación. El interruptor mecánico tiene un conmutador que vibra entre dos terminales haciendo contacto alternativamente con ellas. Puesto que los procesos tanto de modulación como de demodulación requieren de una portadora con la misma frecuencia, es necesario tener el mismo interruptor para modular y demodular, como se ilustra en la figura 3.8.

Considérense la señal de baja frecuencia $f(t)$ y su espectro $F(\omega)$ de las figuras 3.8b y 3.8c, respectivamente. Como muestra la figura 3.8a, se aplica la señal $f(t)$ en las terminales de entrada del amplificador de interrupción. El interruptor de entrada pone a tierra a $f(t)$ en cada medio ciclo. La señal interrumpida que aparece en las terminales aa' se indica en la figura 3.8d. Esta señal equivale a $f(t)$ multiplicada por una onda rectangular $p(t)$. El espectro de la señal interrumpida en las terminales aa' es $F_{aa'}(\omega)$ como vemos en la figura 3.8e (véase la figura 3.2j).

El capacitor de entrada bloquea el espectro centrado en $\omega = 0$. Por lo tanto, el espectro $F_{bb'}(\omega)$ de la señal que aparece en las terminales bb', es idéntico a $F_{aa'}(\omega)$ sin el espectro en $\omega = 0$. El espectro $F_{bb'}(\omega)$ es el de la figura 3.8g. La señal que aparece en las terminales bb' es $f_{bb'}(t)$ y es la transformada inversa de Fourier de $F_{bb'}(\omega)$. Obsérvese aquí que:

$$F_{bb'}(\omega) = F_{aa'}(\omega) - \tfrac{1}{2}F(\omega)$$

entonces

$$f_{bb'}(t) = f_{aa'}(t) - \tfrac{1}{2}f(t)$$

Por lo tanto, obtenemos la señal $f_{bb'}(t)$ al restar de la señal interrumpida $f_{aa'}(t)$ la mitad de los valores instantáneos de la señal original $f(t)$. Esto resulta en la forma de onda bipolar $f_{bb'}(t)$ que se ilustra* en la figura 3.8f. El resultado se vuelve obvio si se observa que el capacitor de entrada bloquea la componente promedio de $f_{aa'}(t)$ y convierte la señal a la forma bipolar $f_{bb'}(t)$. La señal $f_{bb'}(t)$ es la señal de entrada del amplificador. Nótese que $f_{bb'}(t)$ ya no contiene componentes de frecuencia muy baja por lo que se puede amplificar fácilmente. Se ha representado la salida del amplificador en la figura 3.8h. A continuación, se demodula la señal por medio del mismo interruptor; éste pone a tierra la señal de salida cada medio ciclo. Obsérvese que los semiciclos a tierra de la entrada y de la salida son complementarios.

La señal demodulada que aparece en dd' es $f_{dd'}(t)$ y se indica en la figura 3.8i. En realidad, esa señal es una versión amplificada e interrumpida

* En la realidad los pulsos de la figura 3.8f no seguirán exactamente la envolvente sino presentarán pequeñas desviaciones. Esto se debe a que el capacitor no puede eliminar todo el espectro de frecuencia baja localizado en $\omega = 0$. El capacitor bloquea la señal $\omega = 0$, pero solamente puede suprimir parcialmente las demás componentes del rango $(0, \omega_m)$. Sin embargo, puesto que ω_m es muy pequeña (señal de muy baja frecuencia), se justifica el suponer la supresión completa del espectro en el rango $(0, \omega_m)$ y la desviación de los pulsos resulta despreciable.

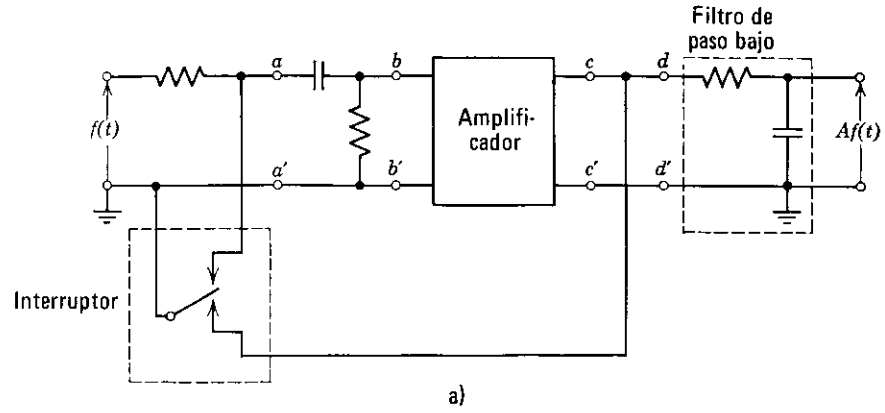


Figura 3.8 (continuación)

de la señal original $f(t)$. En consecuencia, se puede recobrar $f(t)$ si hacemos pasar la señal por un filtro de paso bajo (circuito *R-C*) como el que aparece en la figura 3.8a. La salida final tiene una inversión de signo; sin embargo, la mayoría de los amplificadores también tienen una inversión adicional de signo (cambio de fase de 180 °). En esos casos, la señal de salida es una forma amplificada de $f(t)$ sin inversión de signo.

3.3 MODULACION EN AMPLITUD CON PORTADORA DE ALTA POTENCIA (AM)

Hemos visto que en los sistemas de portadora suprimida se necesitan circuitos complejos en el receptor para generar una portadora de la frecuencia exacta que dé lugar a la detección síncrona; pero esos sistemas son muy eficientes en lo que se refiere a los circuitos de potencia en el transmisor. En las comunicaciones de punto a punto, en donde existe un transmisor por cada receptor, tal complejidad del receptor, estará justificada cuando redunde en grandes ahorros en el costoso equipo transmisor de alta potencia. En cambio, en un sistema de radiodifusión con una multitud de receptores por cada transmisor, resulta más económico tener un solo transmisor costoso de alta potencia y receptores más simples y económicos. En esas aplicaciones, junto con la señal modulada con portadora suprimida $f(t)\cos\omega_c t$ se transmite una señal de portadora de alta potencia que elimina la necesidad de generar la señal portadora en el extremo receptor. Por lo tanto, la señal transmitida es aquí $\varphi_{AM}(t)$ y está dada por

$$\varphi_{AM}(t) = f(t)\cos\omega_c t + A\cos\omega_c t \qquad (3.12a)$$

Es obvio que el espectro de $\varphi_{AM}(t)$ es el mismo que el de $f(t)\cos\omega_c t$ excepto que existen dos impulsos adicionales en $\pm\omega_c$ (figura 3.9):

$$\varphi_{AM}(t) \leftrightarrow \tfrac{1}{2}[F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)] + \pi A[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)] \qquad (3.12b)$$

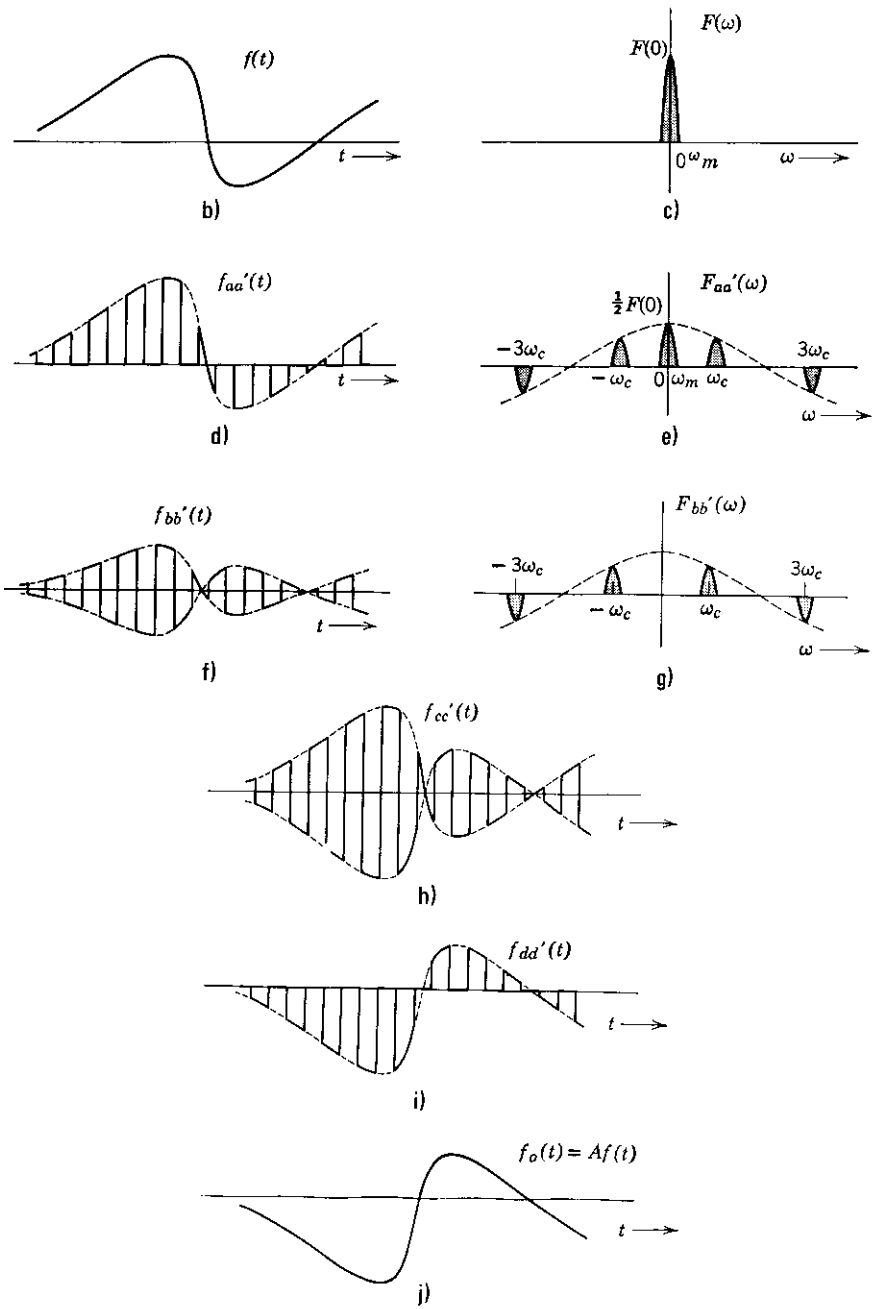


Figura 3.8 (conclusión)

La señal modulada $\varphi_{AM}(t)$ se ilustra en la figura 3.9. Esta señal (ecuación 3.12a) se puede escribir como:

$$\varphi_{AM}(t) = [A + f(t)] \cos \omega_c t \tag{3.13}$$

Es claro que se puede considerar la señal modulada $\varphi_{AM}(t)$ como señal portadora cos $\omega_c t$, cuya amplitud está dada por $[A + f(t)]$. La envolvente de la señal modulada es de la forma de onda de $f(t)$ aumentada en una constante A. Por lo tanto, en este caso la recuperación de la señal $f(t)$ se reduce simplemente a la detección de la envolvente. Nótese que la constante A debe ser suficientemente grande para conservar exactamente la forma de la onda envolvente $f(t)$; si A no es suficientemente grande (figura 3.9e), entonces la forma de onda envolvente no es igual a la de $f(t)$, por lo que ésta no se puede recobrar mediante un simple proceso de detección de la envolvente, sino que se le detecta con el método de detección síncrona (al

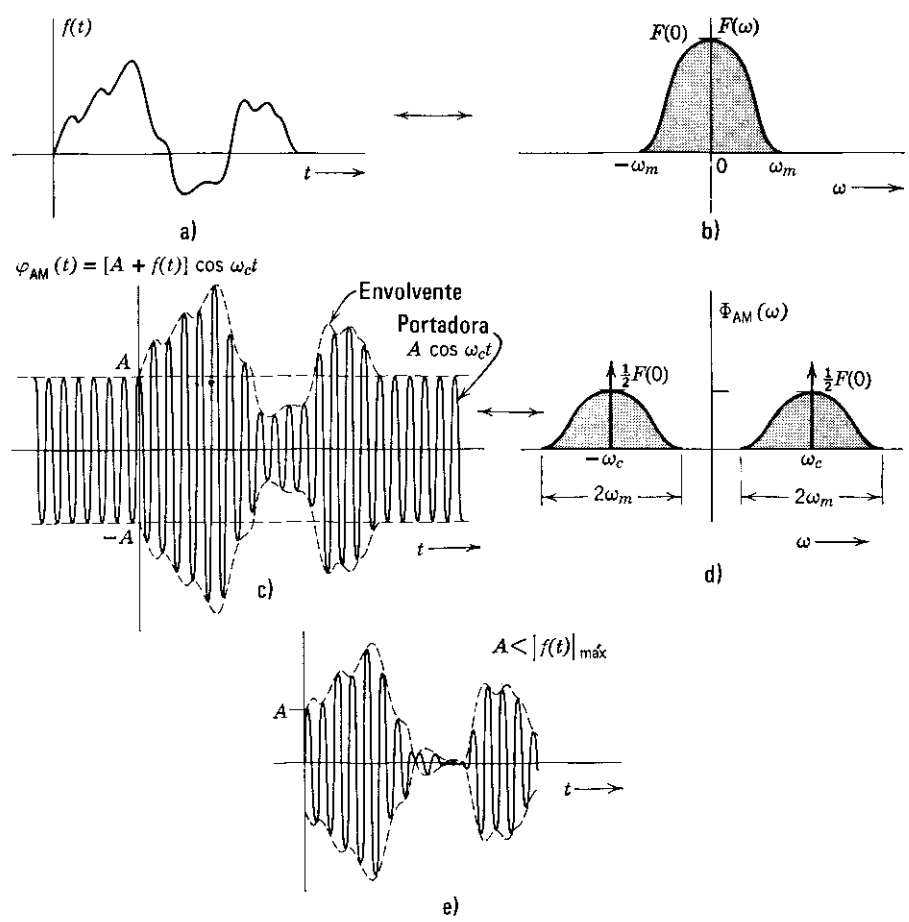


Figura 3.9

multiplicar por cos $\omega_c t$). Entonces, A debe ser suficientemente grande para que $[A + f(t)]$ tenga siempre valor positivo. Esto es posible si

$$A > |f(t)|_{\text{máx}} \tag{3.14}$$

Describiremos más adelante la técnica de la detección de la envolvente, en esta misma sección.

Las señales moduladas, que contienen portadoras de alta potencia tales que satisfacen la condición de la ecuación 3.14, se llaman simplemente señales de amplitud modulada (AM). Así, la señal $[A + f(t)]$ cos $\omega_c t$ (figura 3.9e) se llama señal de AM mientras que se habla de $f(t)$ cos $\omega_c t$ (figura 3.1d) como señal de AM-PS. Veremos a continuación que las señales de AM son más fáciles de generar y demodular que las de AM-PS. Se estudiarán algunos de los métodos empleados para la generación y la demodulación de las señales de AM.

La generación de señales de AM

Como en el caso de las señales de AM-PS, también las de AM se generan mediante un modulador de interrupción y moduladores que emplean dispositivos no lineales. En el modulador de interrupción (figura 3.10a), la señal modulante $f(t)$ con la portadora en serie queda conectada por medio de un conmutador que opera a la frecuencia ω_c. El funcionamiento del conmutador equivale a la multiplicación de la señal de entrada por una onda rectangular $p(t)$ de frecuencia ω_c. Obtenemos el espectro de la señal resultante $v(t)$ por la convolución de los espectros de $[f(t) + k \cos \omega_c t]$ y $p(t)$, como se indica en la figura 3.11. La convolución proporciona el espectro requerido centrado en $\pm\omega_c$, además de otras componentes indeseables de frecuencia en $\omega = 0, \pm 3\omega_c, \pm 5\omega_c, \ldots$, etc., que se eliminan mediante un filtro de paso de banda sintonizado en ω_c. El desarrollo analítico de esto se deja como ejercicio para el lector.

Se puede construir un conmutador con un diodo, como nos muestra la figura 3.10c. Si suponemos que el diodo es ideal (resistencia directa cero y resistencia inversa infinita) y si la magnitud de la portadora es mucho más grande que el valor pico de $f(t)$, entonces el diodo actúa justamente como conmutador que se cierra cuando la señal portadora es positiva y se abre cuando es negativa. En consecuencia, el diodo interrumpe la señal de entrada a una frecuencia ω_c obteniéndose una señal $v(t)$ cuyo espectro se muestra en la figura 3.11c. Cuando se transmite esta señal por un filtro de paso de banda sintonizado en ω_c, se obtiene la señal requerida. Obsérvese que el diodo elimina la parte negativa de la señal compuesta $[f(t) + k \cos \omega_c t]$. Se tiene una rectificación de media onda de la señal de entrada, por lo cual este tipo de modulador también se conoce como modulador del tipo rectificador.

Cuando en un sistema modulador se emplea un dispositivo no lineal, este último proporciona el mecanismo de modulación (figura 3.10b). Si suponemos que para la configuración formada por el dispositivo no lineal y la

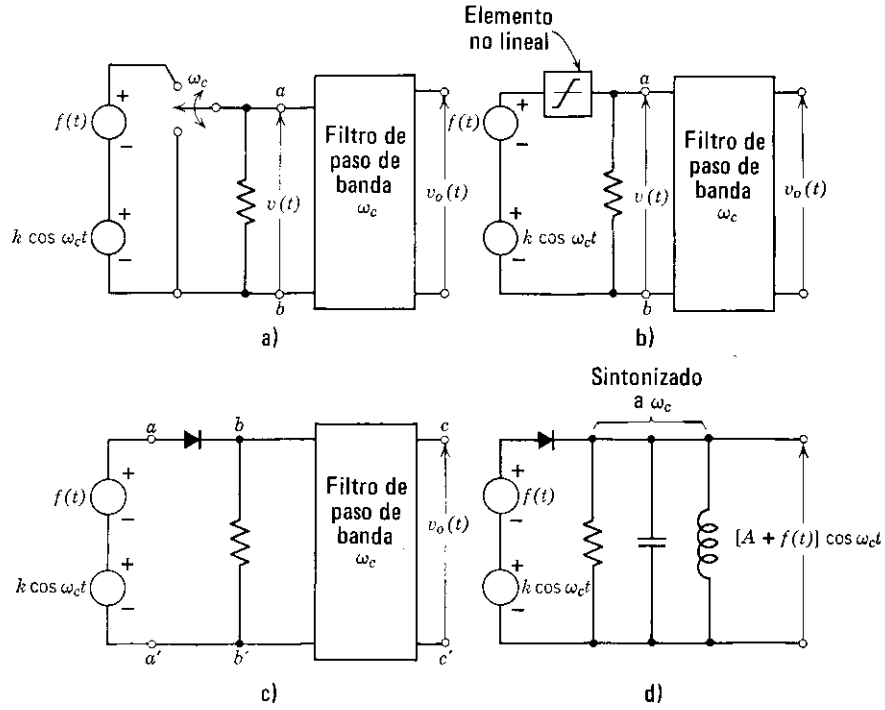


Figura 3.10 Generación de una señal de AM.

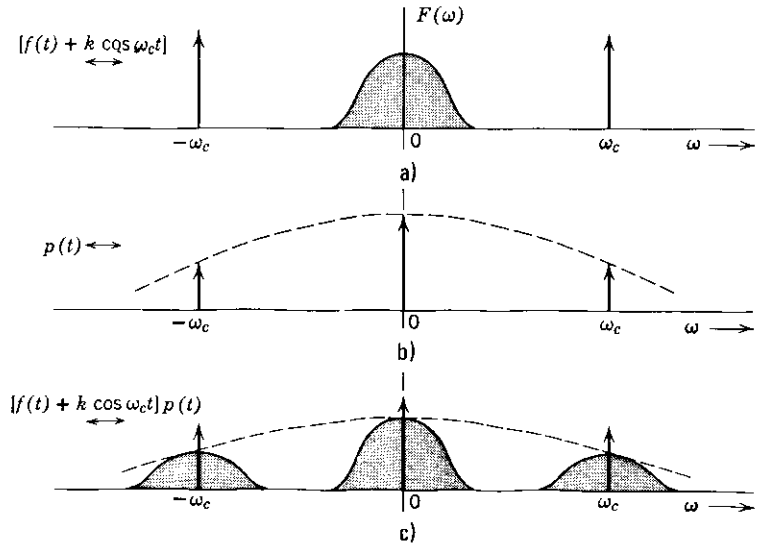


Figura 3.11

resistencia R, de la figura 3.10b, se cumple una relación de serie de potencias entre el voltaje y la corriente,

$$i = ae + be^2 \tag{3.15}$$

entonces se puede demostrar fácilmente que la señal $v(t)$ consta de términos que representan la señal modulada y términos indeseables que se eliminan mediante un filtro de paso de banda sintonizado en ω_c. Un diodo semiconductor se asemeja más al elemento no lineal que satisface la ecuación 3.15, que el diodo ideal.

Demodulación de las señales de AM

Se pueden detectar las señales de AM con las técnicas de detección síncrona que se examinaron en las señales de AM-PS. Sin embargo, para demodular las señales de AM, se pueden usar técnicas más simples. Clasificaremos los detectores de señales de AM en detectores rectificadores y detectores de envolvente. Ambos detectores parecen equivalentes, pero funcionan con principios enteramente diferentes. El detector rectificador opera bajo el principio de detección síncrona, mientras que el detector de envolvente es un circuito no lineal cuya salida tiende a seguir a la envolvente de la señal de entrada. Vamos a considerar individualmente cada detector.

Detector rectificador

Este circuito (figura 3.12) es esencialmente igual al modulador rectificador con la diferencia de que no necesita la señal portadora. El circuito del detector rectifica simplemente la señal modulada; la señal rectificada es la original sin los ciclos negativos. Esto equivale a multiplicar los valores

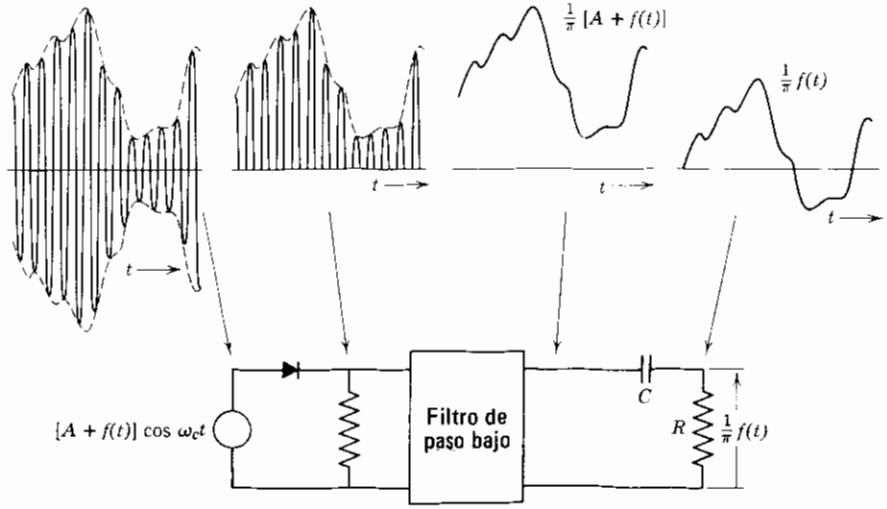


Figura 3.12 Detector rectificador.

positivos de la señal por uno y los valores negativos por cero. Por consiguiente, la rectificación equivale evidentemente a la multiplicación de la señal modulada por una onda rectangular $p(t)$ de frecuencia ω_c. Por lo tanto, se obtiene el espectro de la señal rectificada por medio de la convolución del espectro de la señal modulada con el de $p(t)$. Vemos el resultado de la convolución gráfica en la figura 3.13f. Es obvio, según la figura, que se puede recuperar la señal $f(t)$ si se hace pasar la señal rectificada por un filtro de paso bajo. La salida de un filtro de paso bajo todavía contiene un término de corriente directa (impulso en el origen), al que se elimina colocando un capacitor C a la salida del circuito (figura 3.12). La determinación analítica de la convolución de los espectros de $\varphi_{AM}(t)$ (ecuación 3.12b) y de $p(t)$ (ecuación 3.8) es sencilla. También podemos usar directamente el resultado de la ecuación 3.9:

$$\varphi_{AM}(t)p(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\Phi_{AM}(\omega) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n}\Phi_{AM}(\omega - n\omega_c) \tag{3.16}$$

Por la ecuación 3.12b, tenemos que

$$\Phi_{AM}(\omega) = \tfrac{1}{2}[F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)] + \pi A[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)] \tag{3.17}$$

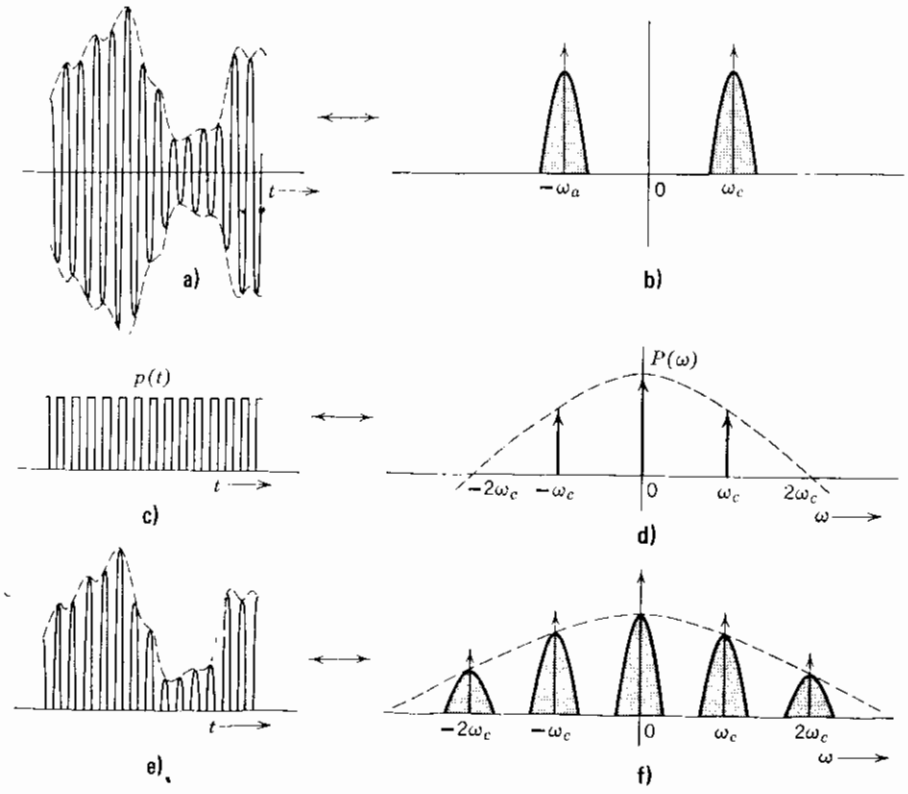


Figura 3.13

Al substituir la ecuación 3.17 en la ecuación 3.16 se obtiene todo el espectro que se muestra en la figura 3.13f. En este espectro, sólo nos interesa la componente de frecuencia baja (el espectro centrado en $\omega = 0$), dada por los términos correspondientes a $n = \pm 1$ en la suma de la ecuación 3.16. El lector puede comprobar fácilmente que la salida $e_0(t)$ está dada por

$$e_o(t) \leftrightarrow \frac{1}{\pi} F(\omega) + 2A\ \delta(\omega)$$

y

$$e_o(t) = \frac{1}{\pi}[A + f(t)] \tag{3.18}$$

Se puede duplicar la salida $e_0(t)$ de la ecuación 3.18 por medio de un rectificador de onda completa, en lugar del rectificador de media onda de la figura 3.12.

Nótese que la detección del tipo rectificador es esencialmente una detección síncrona, pues la operación de rectificación equivale a la multiplicación de la señal modulada por una señal periódica (onda rectangular) de frecuencia ω_c. Es importante darse cuenta de que la multiplicación se lleva a cabo sin señal portadora alguna. Esto es consecuencia del alto contenido de portadora en la señal modulada misma. Si no estuviera presente la portadora (como en el caso de la portadora suprimida), entonces la operación de rectificación no sería equivalente a la multiplicación de la señal de entrada por $p(t)$. En general, para una señal de AM, si no se satisface la condición de la ecuación 3.14, a saber:

$$[A + f(t)] > 0 \qquad \text{para cualquier valor de } t$$

entonces no se puede usar el detector de tipo rectificador; si se satisface la condición, los puntos en que la señal recibida $[A + f(t)] \cos \omega_c t$ cruza el eje horizontal están colocados periódicamente y el proceso de rectificación equivale a multiplicar la señal por $p(t)$; sin embargo, si no se satisface la condición $[A + f(t)] \not> 0$ para cualquier valor de t, la amplitud $A + f(t)$ cambia del signo positivo al negativo y viceversa. De esta manera, existirán otros puntos en que la señal modulada cruza el eje horizontal no necesariamente colocados periódicamente. Vemos que, con esa condición, la rectificación no equivale a la multiplicación por $p(t)$ y el método de la rectificación sirve para demodular estas señales. En esos casos, se puede recobrar la señal $f(t)$ mediante la detección síncrona, que requiere de una portadora local para la multiplicación en el receptor.

Lo tratado anteriormente también nos sugiere otra posibilidad de detección de señales con portadora suprimida (en general, señales que no satisfacen la condición de la ecuación 3.14). Podemos agregar a esas señales determinada cantidad de potencia de portadora con el objeto de satisfacer

$$[A + f(t)] > 0 \qquad \text{para cualquier valor de } t$$

para rectificar y filtrar esa señal y recobrar $f(t)$. Así, en lugar de usar la portadora para multiplicar la señal $f(t) \cos \omega_c t$, agregamos a la señal modulada una portadora con potencia suficiente para hacer posible su detección

con la técnica de detección por rectificación. Estudiaremos en detalle este tópico en la sección 3.6.

Detector de envolvente

En este tipo de detector la salida sigue la envolvente de la señal modulada. El detector de envolvente es esencialmente un circuito rectificador con un capacitor a través de las terminales de salida, como se muestra en la figura 3.14.

En el ciclo positivo de la señal de entrada, el capacitor C se carga al voltaje pico de esta señal. Cuando la señal de entrada es menor que este valor pico, hay un corte del diodo, debido a que el voltaje del capacitor (aproximadamente el valor pico) es mayor que el voltaje de la señal de entrada. El capacitor se descarga lentamente a través de la resistencia R. En el pico del siguiente ciclo positivo, la señal de entrada es más grande que el voltaje del capacitor y el diodo conduce. El capacitor se carga al valor pico de este nuevo ciclo y se descarga lentamente durante el período de corte, con un cambio muy pequeño en su voltaje de carga.

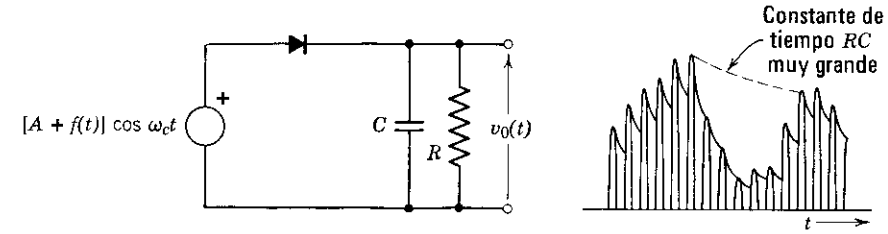


Figura 3.14 Detector de envolvente.

Durante cada ciclo positivo, el capacitor se carga al voltaje pico de la señal de entrada y permanece con este voltaje hasta el siguiente ciclo positivo. La constante de tiempo RC del circuito de salida se ajusta para que la disminución exponencial del voltaje del capacitor, siga aproximadamente la envolvente durante el período de descarga (véase el problema 9); el voltaje a través del capacitor ha adquirido un rizo indeseable de frecuencia ω_c, que se elimina con otro filtro de paso bajo.

Aparentemente, el detector de envolvente es un detector rectificador con un filtro de paso bajo proporcionado mediante el circuito R-C. Eso no es cierto. El detector rectificador es un sistema lineal de parámetros variables en el tiempo, mientras que el detector de envolvente es un sistema no lineal. Los dos sistemas funcionan a partir de principios completamente diferentes, aunque la salida final sea la misma. Se entiende fácilmente el motivo por el cual el rectificador seguido de un filtro produce la envolvente de la señal nodulada. La rectificación corta los ciclos positivos y el filtro de paso bajo produce la componente de frecuencia baja, que es el promedio de la señal restante (ciclos positivos). Se trata obviamente, de la envolvente de la señal modulada.

De lo que hemos estudiado, podemos deducir claramente que la salida del detector de envolvente es π multiplicado por la del detector rectificador (ecuación 3.18). Por lo tanto, el detector de envolvente no sólo es más simple que el detector rectificador, sino también más eficiente. En consecuencia, el empleo del detector de envolvente es casi universal en la detección de señales de AM. Todos los receptores comerciales de AM tienen detectores de envolvente.

Contenido de potencia de las bandas laterales y de la portadora en AM

En las señales de AM, la información no está contenida en la portadora de modo que la potencia transmitida en dicha señal representa un desperdicio. Resulta interesante encontrar el contenido relativo de potencia en la portadora y las bandas laterales (que contienen la información efectiva). La señal modulada está dada por:

$$\varphi_{\text{AM}}(t) = \underset{\text{portadora}}{A \cos \omega_c t} + \underset{\substack{\text{bandas}\\ \text{laterales}}}{f(t) \cos \omega_c t}$$

La potencia P_c en la portadora es el valor cuadrático medio de $A \cos \omega_c t$ y es claramente $A^2/2$:

$$P_c = \frac{A^2}{2}$$

La potencia P_s de las bandas laterales es el valor cuadrático medio de $f(t) \cos \omega_c t$, que es igual a la mitad del valor cuadrático medio de $f(t)$ (véase el ejemplo 2.1, ecuación 2.25):

$$P_s = \tfrac{1}{2}\overline{f^2(t)}$$

La potencia total P_t es $P_c + P_s$:

$$P_t = P_c + P_s = \tfrac{1}{2}[A^2 + \overline{f^2(t)}]$$

El porcentaje de la potencia total contenida en las bandas laterales es η, dado por

$$\eta = \frac{P_s}{P_t} \times 100\% = \frac{\overline{f^2(t)}}{A^2 + \overline{f^2(t)}} \times 100\% \qquad (3.19)$$

Nótese que para AM, $|f(t)|_{\text{máx}} \leqslant A$. En el caso especial en que $f(t)$ es, señal sinusoidal,

$$f(t) = mA \cos \omega_m t$$

m se llama índice de modulación, y debe ser menor o igual a la unidad ($m \leqslant 1$). En la figura 3.15 vemos dos señales con $m = 0.5$ y $m = 1$. En este caso,

$$\overline{f^2(t)} = \frac{(mA)^2}{2}$$

y

$$\eta = \frac{m^2}{2 + m^2} \times 100\% \qquad (3.20)$$

Con la condición de que $m \leqslant 1$, se ve fácilmente que

$$\eta_{\text{máx}} = \tfrac{1}{3} \times 100\% = 33.3\%$$

Entonces, en el máximo índice de modulación ($m = 1$), la eficiencia de la transmisión es del 33 %. Con esta condición, el 67 % de la potencia está contenido en la portadora y, como tal, representa un desperdicio. En valores de m menores que la unidad, la eficiencia es menor del 33 %. Nótese que, para AM-PS, no existe la portadora y la eficiencia es del 100 %.

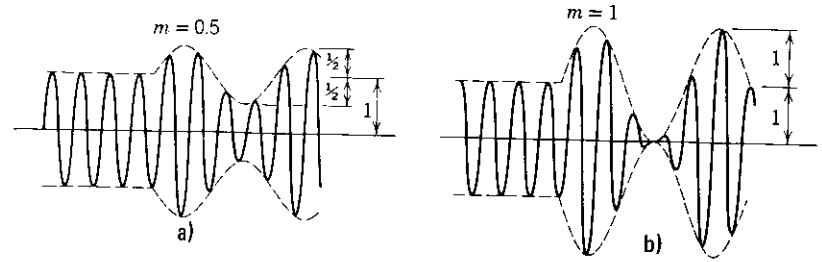


Figura 3.15

3.4 TRANSMISION DE BANDA LATERAL UNICA

En el proceso de modulación en amplitud, el espectro original $F(\omega)$ se traslada en $\pm \omega_c$, como se muestra en la figura 3.16b. La señal modulante ocupa el ancho de banda ω_m (figura 3.16a), mientras que la señal modulada ocupa un ancho de banda $2\omega_m$. Por lo tanto el precio que se paga por la traslación de frecuencia que hasta aquí hemos estudiado, implica un ancho de banda doble. Sin embargo, la situación no es irremediable.

La figura 3.16b nos muestra que, al transmitir el espectro completo, se transmite información redundante. El espectro $F(\omega)$ se ha trasladado a ω_c y a $-\omega_c$. Estos dos espectros son idénticos, y cada uno de ellos contiene toda la información acerca de $F(\omega)$. Se podría pensar entonces en transmitir sólo uno de ellos; sin embargo, esto es imposible pues, como se ha demostrado en el capítulo 1, el espectro de cualquier señal física, es función par de ω. Un espectro que no es simétrico con respecto al eje vertical que pasa por el origen no representa a una señal real y, en consecuencia, no se puede transmitir. Existe otra forma de resolver este problema.

Observamos que el espectro centrado en ω_c está compuesto por dos partes: una porción queda por encima de ω_c y se conoce como banda lateral superior y la otra queda por debajo de ω_c y se conoce como banda lateral inferior. De igual manera, el espectro centrado en $-\omega_c$ contiene bandas laterales superior e inferior (figura 3.16b); obsérvese en la figura 3.16b

que las dos bandas laterales superiores (o las dos inferiores) contienen la información completa de $F(\omega)$. En consecuencia, en lugar de transmitir el espectro completo de la figura 3.16b, es suficiente transmitir o bien las bandas laterales superiores o las inferiores (como se ilustra en las figuras 3.16c y d). Nótese que cada una de las dos bandas laterales superiores o

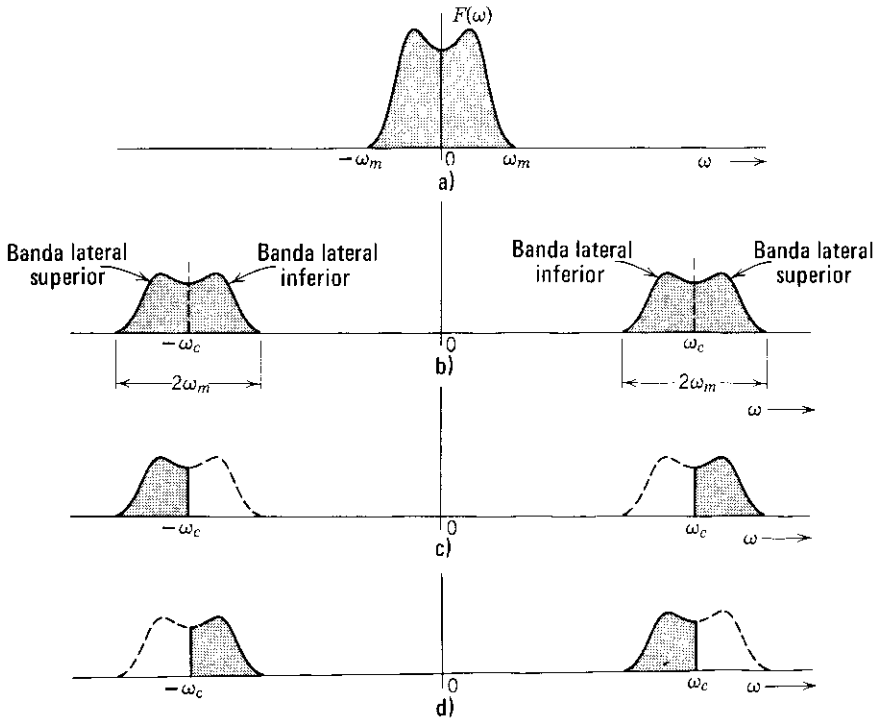


Figura 3.16

inferiores es función par de ω y por lo tanto, representa una señal real. Se puede recobrar la señal original $f(t)$ a partir de las bandas laterales superiores o inferiores por medio de la traslación apropiada de frecuencia. En este caso, para transmitir dichas bandas, necesitamos solamente la mitad del ancho de banda (ω_m). Este modo de transmisión se conoce como transmisión de banda lateral única (BLU), en contraste con la transmisión de banda lateral doble (BLD) que se estudió anteriormente.

Generación de señales de banda lateral única*

Para generar una señal de BLU sólo tenemos que eliminar una de las bandas laterales de las señales moduladas que obtuvimos con los moduladores balancea-

* Para más información acerca de las técnicas de BLU, se puede consultar una edición especial del IRE sobre la transmisión de BLU. Single Sideband Issue, *Proc. IRE*, Vol. 44, N.° 12, diciembre, 1956.

dos mencionados anteriormente. Se hace pasar la señal de amplitud modulada con portadora suprimida que se obtuvo con el modulador balanceado, por un filtro de paso de banda apropiado, que transmitirá las bandas laterales deseadas e impedirá el paso de las demás bandas laterales. Para que un filtro pueda desempeñar esta función deberá tener en la frecuencia ω_c, una característica muy cercana a la de un filtro ideal, es decir, una característica de corte pronunciada en ω_c con el objeto de rechazar todas las frecuencias situadas a un lado de ω_c y admitir todas las del otro lado. Desde un punto de vista práctico, es fácil diseñar un filtro con esa característica en frecuencias bajas. Por esta razón, se traslada el espectro $F(\omega)$ primero a una frecuencia menor $\pm\omega_{c_1}$, en donde se elimina una de las bandas laterales; después de esto el espectro se traslada desde $\pm\omega_{c_1}$ a la frecuencia superior que se busca $\pm\omega_c$. La traslación se puede llevar a cabo en pasos sucesivos. Se traslada el espectro $F(\omega)$ a una primera frecuencia baja $\pm\omega_{c_1}$, en donde se atenúa una de las bandas laterales. Debido a que la acción del filtro no es perfecta, el espectro con una sola banda en $\pm\omega_{c_1}$ aún contiene algunas bandas laterales residuales indeseables; entonces, este espectro se cambia a una frecuencia intermedia ω_{c_2}, en donde se le vuelve a filtrar para eliminar las bandas residuales. Finalmente, el espectro se lleva a la frecuencia superior deseada ω_c.

Se simplifica mucho el problema de filtrar cuando la señal modulante no tiene un contenido importante de componentes de frecuencia baja. En esos casos los filtros de BLU no necesitan tener una característica pronunciada a la frecuencia de corte, pues la potencia de las componentes que se encuentran en la región de transición (centradas en la portadora) es despreciable. Las señales de voz es un ejemplo de lo anterior en donde las componentes de baja frecuencia son de potencia relativamente baja. En cambio, eso no sucede con las señales de televisión.

Método de desviación de fase

También se pueden generar señales de BLU con un método indirecto de desviación del espectro de fase. Para entender mejor, considérese primero el caso de una señal sinusoidal $f(t) = \cos \omega_s t$. Aquí $F(\omega)$ está representada por dos impulsos en $\pm\omega_s$ (figura 3.17a). La señal modulada, cuya portadora es $\cos \omega_c t$, está dada por $\cos \omega_s t \cos \omega_c t$ y su espectro $F(\omega)$ está desplazado en $\pm\omega_c$ (figura 3.17b). El espectro de BLU (banda lateral inferior) está dado por dos impulsos en $\pm(\omega_c - \omega_s)$, como vemos en la figura 3.17c. Es evidente que la señal que corresponde a este espectro de BLU (figura 3.17c) está dada por $\cos(\omega_c - \omega_s)t$. Por lo tanto, la generación de una señal de BLU, para el caso especial de $f(t) = \cos \omega_s t$ equivale a la generación de la señal $\cos(\omega_c - \omega_s)t$.

De la identidad trigonométrica, tenemos:

$$\cos(\omega_c - \omega_s)t = \cos \omega_s t \cos \omega_c t + \operatorname{sen} \omega_s t \operatorname{sen} \omega_c t$$

Así, se produce la señal de BLU deseada al sumar $\cos \omega_s t \cos \omega_c t$ y $\operatorname{sen} \omega_s t \operatorname{sen} \omega_c t$. Se genera fácilmente la función $\cos \omega_s t \cos \omega_c t$ con cualquier modulador balanceado de los estudiados anteriormente. Podemos expresar la función $\operatorname{sen} \omega_s t \operatorname{sen} \omega_c t$ como $\cos(\omega_s t - \pi/2) \cos(\omega_c t - \pi/2)$.

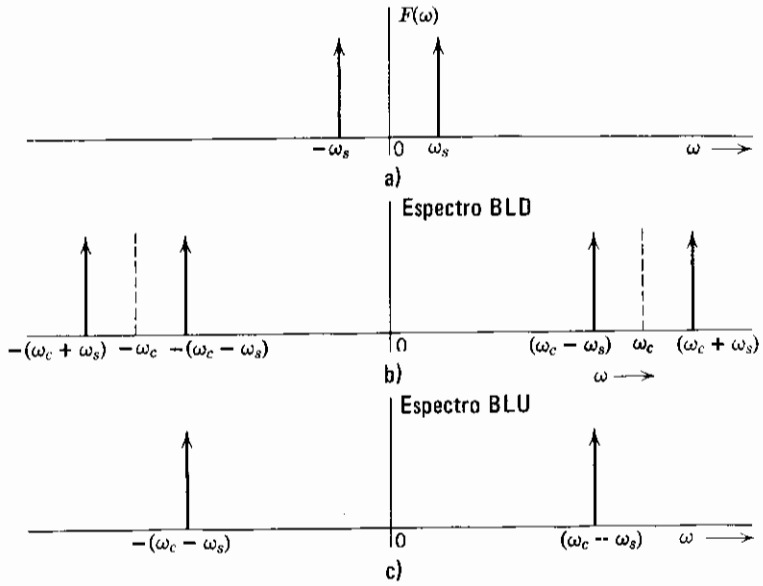


Figura 3.17

En consecuencia, esta señal puede producirse con un modulador balanceado siempre que se desplacen las fases de la señal $\cos \omega_s t$ y de la portadora en $-\pi/2$ (figura 3.18). Aunque se ha deducido este resultado para el caso especial de $f(t) = \cos \omega_s t$, también es válido para cualquier forma de onda. Esto se debe al hecho de que podemos expresar cualquier forma de onda como suma continua de señales sinusoidales (o exponenciales). Por lo tanto, la señal de BLU-PS que corresponde a $f(t)$ está dada por (figura 3.18)

$$\varphi_{\text{BLU}}(t) = f(t) \cos \omega_c t + f_h(t) \operatorname{sen} \omega_c t$$

en donde $f_h(t)$ es la señal que se obtiene al desviar la fase de cada componente de $f(t)$ en $-\pi/2$. El esquema de ese arreglo se muestra en la figura 3.18.

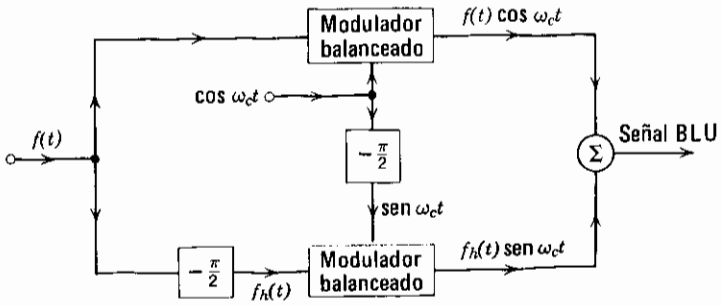


Figura 3.18 Método de desviación de fase para generar señales de BLU.

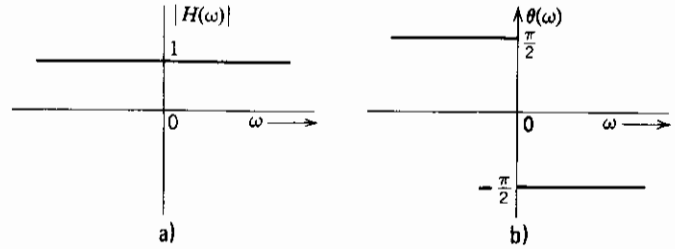


Figura 3.19

A continuación, se demostrará en forma rigurosa este resultado para cualquier señal $f(t)$. Un sistema que se emplea para desviar en $-\pi/2$ la fase de las componentes de frecuencia tiene una función de magnitud unitaria. Por tanto, las magnitudes de las componentes de frecuencia no se alteran, pero la fase de todas las componentes de frecuencia positiva queda desplazada en $-\pi/2$. Puesto que el espectro de fase es una función impar de ω, las fases de todas las componentes de frecuencia negativa están desplazadas en $+\pi/2$. Vemos el espectro de magnitud y de fase de un sistema de desviación de fase en la figura 3.19.

$$|H(\omega)| = 1$$

$$\theta(\omega) = \underline{/H(\omega)} = \frac{\pi}{2} - \pi u(\omega)$$

Por lo tanto, la función de transferencia $H(\omega)$ de este sistema de desviación de fase está dada por:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= |H(\omega)|\, e^{j\theta(\omega)} \\ &= e^{j[\pi/2 - \pi u(\omega)]} = j e^{-j\pi u(\omega)} \end{aligned} \tag{3.22}$$

y, si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

Entonces

$$f_h(t) \leftrightarrow j F(\omega) e^{-j\pi u(\omega)} \tag{3.23}$$

Del teorema de la modulación se deduce que:

$$f(t) \cos \omega_c t \leftrightarrow \tfrac{1}{2}[F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)] \tag{3.24a}$$

y, de las ecuaciones 3.23 y 1.116b:

$$f_h(t) \operatorname{sen} \omega_c t \leftrightarrow -\tfrac{1}{2}[F(\omega + \omega_c) e^{-j\pi u(\omega+\omega_c)} - F(\omega - \omega_c) e^{-j\pi u(\omega-\omega_c)}] \tag{3.24b}$$

y

$$\begin{aligned} [f(t) \cos \omega_c t + f_h(t) \operatorname{sen} \omega_c t] \leftrightarrow\ & \tfrac{1}{2} F(\omega - \omega_c)[1 + e^{-j\pi u(\omega-\omega_c)}] \\ & + \tfrac{1}{2} F(\omega + \omega_c)[1 - e^{-j\pi u(\omega+\omega_c)}] \end{aligned} \tag{3.25}$$

Nótese que

$$u(\omega - \omega_c) = \begin{cases} 0 & \omega < \omega_c \\ 1 & \omega > \omega_c \end{cases}$$

En consecuencia,

$$1 + e^{-j\pi u(\omega-\omega_c)} = \begin{cases} 2 & \omega < \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Pero esto, por definición es $2u(\omega_c - \omega)$. Por lo tanto,

$$1 + e^{-j\pi u(\omega-\omega_c)} = 2u(\omega_c - \omega) \tag{3.26a}$$

De igual manera

$$1 - e^{-j\pi u(\omega+\omega_c)} = 2u(\omega_c + \omega) \tag{3.26b}$$

Al substituir la ecuación 3.26 en la ecuación 3.25, obtenemos:

$$f(t)\cos\omega_c t + f_h(t)\,\text{sen}\,\omega_c t \leftrightarrow [F(\omega - \omega_c)u(\omega_c - \omega) + F(\omega + \omega_c)u(\omega + \omega_c)] \tag{3.27}$$

El espectro del segundo miembro de la ecuación 3.27 representa precisamente las bandas laterales inferiores de $[F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c)]$. El término $F(\omega - \omega_c)u(\omega_c - \omega)$ representa las bandas laterales inferiores de $F(\omega - \omega_c)$ debido a que $u(\omega_c - \omega) = 0$ para $\omega > \omega_c$, de modo que se suprime la banda lateral superior de $F(\omega - \omega_c)$. De igual manera, $F(\omega + \omega_c)u(\omega + \omega_c)$ representa la banda lateral inferior de $F(\omega + \omega_c)$, debido a que $u(\omega + \omega_c) = 0$ en $\omega < -\omega_c$ con lo cual se suprime la banda lateral superior de $F(\omega + \omega_c)$. Así, la señal de la ecuación 3.25 expresa la banda lateral inferior de la señal de BLU. El lector puede demostrar que, si en lugar de sumar, se resta $f_h(t)\,\text{sen}\,\omega_c t$ de $f(t)\cos\omega_c t$, la señal resultante es la banda lateral superior de la señal de BLU. Así, una señal de BLU-PS, $\varphi_{\text{BLU}}(t)$ queda expresada como

$$\varphi_{\text{BLU}}(t) = f(t)\cos\omega_c t \pm f_h(t)\,\text{sen}\,\omega_c t \tag{3.28}$$

en donde el signo positivo en el segundo miembro genera la banda lateral inferior de la señal de BLU y el signo negativo genera la banda lateral superior. La señal $f_h(t)$ es la respuesta del circuito de desviación de fase (figura 3.19) a la señal $f(t)$. Es fácil expresar $f_h(t)$ en términos de $f(t)$ por medio de la ecuación 3.23:

$$f_h(t) \leftrightarrow jF(\omega)e^{-j\pi u(\omega)}$$

Obsérvese que

$$e^{-j\pi u(\omega)} = \begin{cases} -1 & \omega > 0 \\ 1 & \omega < 0 \end{cases}$$

$$= -\text{sgn}\,(\omega)$$

En consecuencia

$$f_h(t) \leftrightarrow -jF(\omega)\,\text{sgn}\,(\omega) \tag{3.29}$$

Por la ecuación 1.113, tenemos

$$\frac{j}{\pi t} \leftrightarrow \text{sgn}\,(\omega)$$

Al aplicar el teorema de la convolución en el tiempo a la ecuación 3.29, se tiene*

$$f_h(t) = \frac{1}{\pi}f(t) * \frac{1}{t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau}\,d\tau \tag{3.30}$$

Demodulación de las señales de BLU-PS

Para recobrar a $f(t)$ a partir de la señal de BLU, tenemos que retrasladar el espectro de la figura 3.16c a su posición original ($\omega = 0$) lo cual se puede realizar fácilmente mediante la detección síncrona. La multiplicación de la señal de BLU por $\cos\omega_c t$ (detección síncrona) equivale a la convolución del espectro de la misma con el espectro de $\cos\omega_c t$ (dos impulsos en $\pm\omega_c$). Esto se muestra en la figura 3.20 con respecto a las bandas laterales superiores. Es claro que la convolución produce $F(\omega)$ y una señal adicional de BLU-PS que tiene una portadora de $2\omega_c$. Se puede eliminar la segunda parte mediante un filtro de paso bajo. Así, la demodulación de señales de BLU se lleva a cabo con la detección síncrona. Para obtener analíticamente ese resultado procedemos como sigue.

En la detección síncrona, la salida $e_d(t)$ del demodulador está dada por (de acuerdo con la ecuación 3.28)

$$e_d(t) = \varphi_{\text{BLU}}(t)\cos\omega_c t = f(t)\cos^2\omega_c t \pm f_h(t)\,\text{sen}\,\omega_c t\cos\omega_c t = \underbrace{\tfrac{1}{2}f(t)}_{\text{mensaje}} + \underbrace{[f(t)\cos 2\omega_c t \pm f_h(t)\,\text{sen}\,2\omega_c t]}_{\text{BLU con portadora } 2\omega_c} \tag{3.31}$$

La cantidad entre paréntesis en el segundo miembro de la ecuación 3.31 es idéntica a la señal de BLU de la ecuación 3.28, con la diferencia de que la frecuencia portadora es $2\omega_c$. Así, la detección síncrona de una señal de BLU produce la señal original $f(t)$ más otra señal de BLU con una portadora de $2\omega_c$ que puede eliminarse con un filtro apropiado para recobrar $f(t)$.

Se puede llevar a cabo la detección síncrona de las señales de BLU con cualquiera de los circuitos que se muestran en la figura 3.7. Para la detección síncrona hay que generar una portadora local de frecuencia ω_c con la fase correcta (en fase con la portadora de la señal recibida). Cualquier error en la frecuencia, o en la fase de la portadora local, origina una distorsión.

* La ecuación 3.30 define la transformada de Hilbert de $f(t)$. La función $f_h(t)$ es la transformada de Hilbert de $f(t)$. La función $f_h(t)$ también se conoce como función de cuadratura de $f(t)$ debido a que cada componente de frecuencia de $f(t)$ está en cuadratura de fase con la de $f_h(t)$, como se ve en la figura 3.19. La integral de la ecuación 3.30 es impropia y se permite la divergencia en $t = \tau$ al tomar el valor de la integral según el principio de Cauchy.

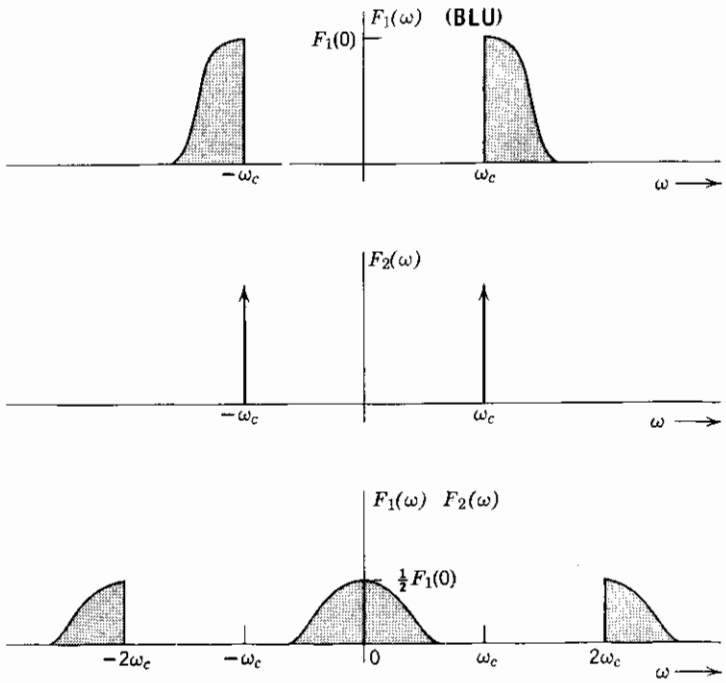


Figura 3.20 Demodulación de una señal de BLU.

La naturaleza de esta distorsión será objeto de estudio detallado en la sección 3.5.

Demodulación de BLU (con portadora de alta potencia)

Consideremos a continuación las señales de BLU con portadora de alta potencia. A esas señales se les llama señales de BLU (en contraste con las señales de BLU-PS) y se les expresa como:

$$\varphi(t) = A \cos \omega_c t + [f(t) \cos \omega_c t + f_h(t) \operatorname{sen} \omega_c t]$$

Se ve fácilmente que podemos recuperar $f(t)$ a partir de $\varphi(t)$ mediante la detección síncrona [al multiplicar $\varphi(t)$ por cos $\omega_c t$]. Sin embargo, la amplitud A de la portadora adicional es bastante grande, se recupera $f(t)$ con el detector de envolvente o rectificador. Esto se comprende mejor al expresar $\varphi(t)$ en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= [A + f(t)] \cos \omega_c t + f_h(t) \operatorname{sen} \omega_c t \\ &= e(t) \cos (\omega_c t + \theta)\end{aligned}$$

en donde

$$e(t) = \{[A + f(t)]^2 + f_h^2(t)\}^{1/2}$$

y

$$\theta(t) = -\tan^{-1}\left[\frac{f_h(t)}{A + f(t)}\right]$$

Es evidente que $e(t)$ es la envolvente de la señal BLU $\varphi(t)$. Si se aplica $\varphi(t)$ a la entrada del detector de envolvente, la salida será $e(t)$:

$$\begin{aligned}e(t) &= \{[A + f(t)]^2 + f_h^2(t)\}^{1/2} \\ &= A\left[1 + \frac{2f(t)}{A} + \frac{f^2(t)}{A^2} + \frac{f_h^2(t)}{A^2}\right]^{1/2}\end{aligned}$$

Si $A \gg |f(t)|$, entonces $A \gg |f_h(t)|$ y los términos $f^2(t)/A^2$ y $f_h^2(t)/A^2$ resultan despreciables; entonces:

$$e(t) \simeq A\left[1 + \frac{2f(t)}{A}\right]^{1/2}$$

Si se emplea el desarrollo del binomio y se desprecian los términos de orden más alto [ya que $f(t)/A \ll 1$], obtenemos:

$$\begin{aligned}e(t) &\simeq A\left[1 + \frac{f(t)}{A}\right] \\ &= A + f(t)\end{aligned}$$

Es evidente que, con portadora de alta potencia, la envolvente de $\varphi(t)$ tiene la forma de $f(t)$ y se puede demodular la señal con un detector de envolvente. La señal de video en la difusión de televisión se transmite por BLU con portadora de alta potencia.*

3.5 EFECTOS DE LOS ERRORES DE FRECUENCIA Y FASE EN LA DETECCION SINCRONA

Se pueden demodular las señales de AM mediante detectores rectificadores o de envolvente sin portadora local en el receptor. Debido al alto contenido de portadora en la señal transmitida en dichos sistemas, no es necesario generar una portadora local. Sin embargo, en AM-PS (BLD-PS y BLU-PS), hay que generar una portadora local en el receptor con el fin de producir detección síncrona. Lo ideal sería que la frecuencia de la portadora local fuese idéntica a la frecuencia de la portadora en el transmisor; de la misma manera, las fases de la portadora local y la portadora de referencia de la señal recibida deben ser iguales. Cualquier discrepancia en frecuencia y en fase de la portadora localmente generada da lugar a una distorsión en la salida del detector. Ya se ha observado el efecto del error causado por la diferencia en frecuencia de la portadora local (ecuación 3.4). Aquí, estudiaremos el tema con más detalle para las señales de BLD y BLU.

* El sistema de TV utiliza una forma ligeramente modificada de BLU, que se llama sistema de banda lateral residual. Lo estudiaremos plenamente en la sección 3.8.

1. BLD-PS

Sean $f(t)\cos\omega_c t$ la señal recibida y $\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \phi]$ la portadora local. En este caso los errores de la frecuencia y la fase de la portadora local son respectivamente $\Delta\omega$ y ϕ. La detección síncrona se lleva a cabo al multiplicar la señal recibida por la portadora local y hacer pasar el producto a través de un filtro de paso bajo como se ilustra en la figura 3.1f. El producto $e_d(t)$ está dado por:

$$\begin{aligned} e_d(t) &= f(t)\cos\omega_c t\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \phi] \\ &= \tfrac{1}{2}f(t)\{\cos[(\Delta\omega)t + \phi] + \cos[(2\omega_c + \Delta\omega)t + \phi]\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

El segundo término del segundo miembro representa la señal con el espectro centrado en una frecuencia alta $(2\omega_c + \Delta\omega)$ y se elimina mediante un filtro de paso bajo con frecuencia de corte ω_m (figura 3.1f). La salida del filtro está dada por

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}f(t)\cos[(\Delta\omega)t + \phi] \quad (3.33)$$

A partir de esta ecuación, es evidente que la señal de salida no es solamente $f(t)$ sino $f(t)$ multiplicada por otra función del tiempo; por lo tanto, la señal de salida está distorsionada. Nótese que, si $\Delta\omega$ y ϕ son cero (si no hay error de fase o de frecuencia), entonces

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}f(t)$$

Como era de esperarse.

Considérense los dos casos especiales siguientes:

1. $\Delta\omega = 0$ y $\phi \neq 0$ (error de fase solamente)
2. $\Delta\omega \neq 0$ y $\phi = 0$ (error de frecuencia solamente)

Si $\Delta\omega = 0$, la ecuación 3.33 se reduce a:

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}f(t)\cos\phi$$

Evidentemente, esta salida es proporcional a $f(t)$ cuando ϕ es una constante. La salida es máxima cuando $\phi = 0$ y es mínima (cero) cuando $\phi = \pm\pi/2$. Así, el error de fase en la portadora local causa una atenuación de la señal proporcional al coseno de dicho error. Sin embargo, no existe distorsión en la forma de onda de la señal, sino sólo atenuación, siempre y cuando ϕ sea constante. Desafortunadamente, como consecuencia de las variaciones en la trayectoria de propagación debidas a cambios aleatorios en las condiciones de la ionosfera, el error de fase ϕ por lo general varía en forma aleatoria con el tiempo. Esto conduce a variaciones del mismo tipo en la fase de la señal de entrada, que a su vez, causan que la diferencia de fase entre esta señal y la portadora local varíe aleatoriamente en función del

tiempo. Así, el factor de ganancia $\cos\phi$ en el receptor varía en forma aleatoria, lo cual es claramente indeseable.

En seguida, consideremos el caso para el cual $\phi = 0$ y $\Delta\omega \neq 0$. La ecuación 3.33 se transforma en:

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}f(t)\cos(\Delta\omega)t$$

Aquí, la salida no es una réplica atenuada de la señal original sino que está distorsionada. Puesto que $\Delta\omega$ suele ser pequeño, la salida es la señal $f(t)$ multiplicada por una sinusoide de frecuencia baja; $f(t)$ sufre una atenuación variable en el tiempo. Esto constituye un tipo de distorsión muy grave; en consecuencia, es importante que los osciladores locales estén sincronizados adecuadamente lo que se lleva a cabo con diferentes circuitos de retroalimentación. Se pueden obtener los errores de fase y de frecuencia necesarios para que funcione el circuito de retroalimentación a partir de un sistema como el de la figura 3.21. Aquí, la salida del oscilador local se divide en dos componentes en cuadratura (coseno y seno). La salida $e_1(t)$ es el producto de la señal de entrada $f(t)\cos\omega_c t$ por la portadora local $\cos(\omega_c t + \varphi)$ después de pasar por un filtro de paso bajo que elimina las componentes de frecuencias superiores a ω_m radianes por segundo.

$$f(t)\cos\omega_c t\cos(\omega_c t + \phi) = \underbrace{\tfrac{1}{2}f(t)\cos\phi}_{e_1(t)} + \underbrace{\tfrac{1}{2}f(t)\cos(2\omega_c t + \phi)}_{\text{eliminado por el filtro de paso bajo}}$$

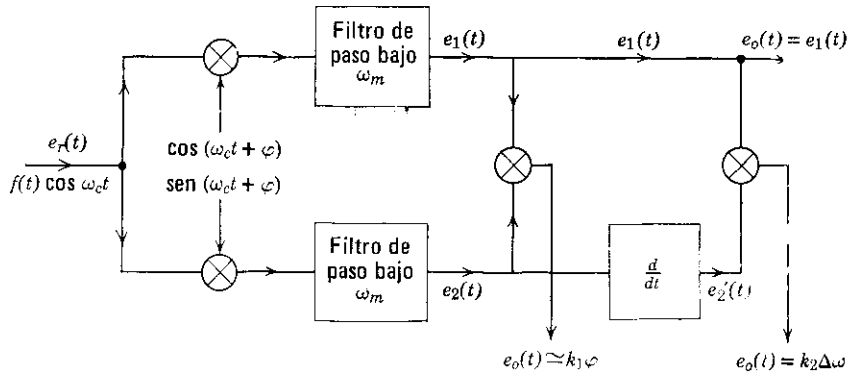


Figura 3.21

así

$$e_1(t) = \tfrac{1}{2}f(t)\cos\phi$$

De igual manera, vemos que

$$e_2(t) = \tfrac{1}{2}f(t)\operatorname{sen}\phi$$

El producto $e_1(t)e_2(t)$ está dado por

$$\begin{aligned} e_1(t)e_2(t) &= \tfrac{1}{4}f^2(t)\cos\phi\,\operatorname{sen}\phi \\ &= \tfrac{1}{8}f^2(t)\operatorname{sen}2\phi \\ &\simeq \tfrac{1}{4}f^2(t)\phi \quad \text{cuando } \phi \ll 1 \end{aligned}$$

Así, la salida es proporcional al error de fase ϕ. La polaridad de la salida depende de que el error de fase sea positivo o negativo. Esta señal actúa como voltaje de control para ajustar la fase del oscilador local. El circuito no sólo controla la fase, sino también la frecuencia del oscilador en un rango reducido.

Si diferenciamos la señal $e_2(t)$ y la multiplicamos después por $e_1(t)$, se puede demostrar que la salida $e_1(t)e_2(t)$ es proporcional al error de frecuencia. Esto se deduce del hecho de que el cambio instantáneo de frecuencia de una señal está dado por la rapidez del cambio de fase. Entonces, el error instantáneo de frecuencia de la señal $\cos(\omega_c t + \phi)$ es evidentemente $d\phi/dt$. Así, $\Delta\omega = d\phi/dt$. Se tiene que:

$$e_2'(t) = \frac{de_2}{dt} = \tfrac{1}{2}\left[f(t)\cos\phi\,\frac{d\phi}{dt} + f'(t)\operatorname{sen}\phi\right]$$

Para valores pequeños de ϕ, $\operatorname{sen}\phi \simeq 0$ y $\cos\phi \simeq 1$:

$$e_2'(t) \simeq \tfrac{1}{2}f(t)\frac{d\phi}{dt} = \tfrac{1}{2}(\Delta\omega)f(t)$$

y

$$\begin{aligned} e_1(t)e_2'(t) &= \tfrac{1}{4}f^2(t)\cos\phi\,(\Delta\omega) \\ &\simeq \tfrac{1}{4}f^2(t)\,(\Delta\omega) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el producto es proporcional al error de frecuencia $\Delta\omega$.

A medida que el circuito de control ajusta los errores de frecuencia y de fase, se logra finalmente la sincronización adecuada y $e_1(t)$ será la salida que se busca:

$$e_1(t) = \tfrac{1}{2}f(t)$$

y la salida $e_2(t) = 0$.

2. BLU-PS

La señal de BLU a la entrada del receptor está dada por* (ecuación 3.28):

$$\varphi_{\text{BLU}}(t) = f(t)\cos\omega_c t + f_h(t)\operatorname{sen}\omega_c t$$

* Aquí, se considera la banda lateral inferior de BLU; sin embargo, lo dicho también se aplica a la banda lateral superior.

Sea $\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \phi]$ la portadora local. El producto de la señal de entrada y de la portadora local es $e_d(t)$, dado por:

$$\begin{aligned} e_d(t) &= \varphi_{\text{BLU}}(t)\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \phi] \\ &= [f(t)\cos\omega_c t + f_h(t)\operatorname{sen}\omega_c t]\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \phi] \\ &= \tfrac{1}{2}f(t)\{\cos[(\Delta\omega)t + \phi] + \cos[(2\omega_c + \Delta\omega)t + \phi]\} \\ &\quad - \tfrac{1}{2}f_h(t)\{\operatorname{sen}[(\Delta\omega)t + \phi] - \operatorname{sen}[(2\omega_c + \Delta\omega)t + \phi]\} \end{aligned}$$

Los términos de frecuencia $2\omega_c + \Delta\omega$ representan términos de doble frecuencia de portadora, que se pueden eliminar con un filtro de paso bajo (figura 3.20a). La salida de este filtro es $e_o(t)$,

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}f(t)\cos[(\Delta\omega)t + \phi] - f_h(t)\operatorname{sen}[(\Delta\omega)t + \phi] \qquad (3.36)$$

Obsérvese que, si $\Delta\omega$ y ϕ son cero, la salida es

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}f(t)$$

como era de esperarse. Resulta interesante comparar el efecto de los errores de frecuencia y de fase entre los sistemas de BLD y de BLU. Si $\Delta\omega = 0$, observamos que en BLD la señal no se distorsiona, aunque está atenuada por un factor $\cos\phi$. Sin embargo, en la señal de BLU cuando $\Delta\omega = 0$, la salida está dada por

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}[f(t)\cos\phi - f_h(t)\operatorname{sen}\phi] \qquad (3.37)$$

Es evidente que la salida tiene una señal indeseable $f_h(t)$, que no puede eliminarse mediante un filtro. Se demostrará a continuación que ésta es una distorsión de fase. Si todas las frecuencias de $f(t)$ se desplazan en fase en ϕ radianes, el resultado será $e_o(t)$, como lo define la ecuación 3.37. Esto se ve fácilmente si se toma la transformada de Fourier de dicha ecuación.

$$E_o(\omega) = \tfrac{1}{2}[F(\omega)\cos\phi - F_h(\omega)\operatorname{sen}\phi]$$

Pero, por la ecuación 3.23, $F_h(\omega) = jF(\omega)e^{-j\pi u(\omega)}$. Por lo tanto.

$$\begin{aligned} E_o(\omega) &= \tfrac{1}{2}F(\omega)[\cos\phi - je^{-j\pi u(\omega)}\operatorname{sen}\phi] \\ &= \begin{cases} \tfrac{1}{2}F(\omega)e^{j\phi} & \omega > 0 \\ \tfrac{1}{2}F(\omega)e^{-j\phi} & \omega > 0 \end{cases} \end{aligned} \qquad (3.38)$$

Por la ecuación 3.38, vemos claramente que se puede obtener $e_o(t)$ a partir de $f(t)$ al cambiar en ϕ radianes las fases de todas las componentes de frecuencia (nótese que, en frecuencias negativas, el cambio de fase es $-\phi$, debido a la propiedad de antisimetría del espectro de fase). Así, el error en la fase de la portadora local produce una distorsión de fase a la salida del detector; esta señal es una forma distorsionada de $f(t)$, en la que cada

componente de frecuencia de $f(t)$ sufre un desplazamiento constante de fase. La distorsión por desplazamiento de fase generalmente no es muy grave en la comunicación de voz debido a que el oído humano es relativamente poco sensible a las distorsiones de fase. La distorsión cambia la calidad de la voz, pero ésta sigue siendo aún inteligible; sin embargo, en la transmisión de música y de señales de video, la distorsión de fase resulta intolerable.

Si ponemos $\phi = 0$ en la ecuación 3.36, vemos que el efecto del error de frecuencia en BLU es similar al observado en BLD (para valores pequeños de $\Delta\omega$).

3.6 TECNICAS DE REINSERCION DE PORTADORA PARA LA DETECCION DE SEÑALES CON PORTADORA SUPRIMIDA

Se mencionó anteriormente la posibilidad de detectar señales con portadora suprimida mediante la reinserción de la portadora en el receptor. En general esta técnica se aplica tanto al sistema BLD-PS como al BLU-PS; después de haber reinsertado una cantidad suficiente de portadora, se puede emplear la detección con rectificador o la detección de envolvente. Es necesario sincronizar adecuadamente la fase y la frecuencia de la portadora que se reinserta con las de la portadora del transmisor, para evitar distorsión. Consideraremos las señales de BLD-PS y de BLU-PS por separado.

1. BLD-PS

La señal recibida es $f(t)\cos\omega_c t$. Sea $A\cos(\omega_c t + \phi)$ la portadora que se reinserta. Entonces, la señal resultante $r(t)$ está dada por:

$$r(t) = f(t)\cos\omega_c t + A\cos(\omega_c t + \phi) \tag{3.39}$$

$$= [f(t) + A\cos\phi]\cos\omega_c t - [A\,\text{sen}\,\phi]\,\text{sen}\,\omega_c t$$

$$= \sqrt{[A + f(t)]^2 - 2Af(t)[1 - \cos\phi]}\cos(\omega_c t + \theta) \tag{3.40}$$

$$= e(t)\cos(\omega_c t + \theta) \tag{3.41}$$

en donde

$$e(t) = \{[A + f(t)]^2 - 2Af(t)[1 - \cos\phi]\}^{1/2} \tag{3.42}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{A\,\text{sen}\,\phi}{f(t) - A\cos\phi}\right]$$

Es evidente, por la ecuación 3.41, que $e(t)$ (ecuación 3.42) es la envolvente de $r(t)$.

Si $\phi = 0$, entonces la envolvente $e(t)$ se reduce a

$$e(t) = A + f(t)$$

En consecuencia, se puede recobrar $f(t)$ a partir de $r(t)$ mediante la detección por rectificación o de envolvente. Nótese que, en este caso,

$$r(t) = [A + f(t)]\cos\omega_c t$$

Por supuesto, ésta es la señal de AM que se puede detectar con la técnica antes mencionada, siempre y cuando $[A + f(t)] > 0$ para todo t.

Si el error de fase ϕ, no es cero, aparece distorsión. Al volver a ordenar la ecuación 3.42, obtenemos

$$e(t) = A\left\{1 + \frac{2f(t)}{A}\cos\phi + \left[\frac{f(t)}{A}\right]^2\right\}^{1/2}$$

Si $A \gg |f(t)|$, entonces

$$e(t) \simeq A + f(t)\cos\phi \tag{3.43}$$

La componente deseada de la señal en la salida, es $f(t)\cos\phi$. Si ϕ es constante, dicha componente no sufre distorsión en la salida, sino una atenuación por el factor $\cos\phi$. Este es el mismo resultado que el que se obtiene mediante la técnica de detección síncrona.

Consideraremos a continuación el caso del error de frecuencia, $\phi = 0$ y $\Delta\omega \neq 0$. Aquí

$$r(t) = f(t)\cos\omega_c t + A\cos[\omega_c t + (\Delta\omega)t]$$

Obsérvese que esta ecuación es idéntica a la ecuación 3.39, con la diferencia de que, en esta última, se ha reemplazado ϕ por $(\Delta\omega)t$. En consecuencia, en relación con la ecuación 3.43, tenemos

$$e(t) \simeq A + f(t)\cos(\Delta\omega)t \quad \text{cuando} \quad A \gg |f(t)|$$

La distorsión vuelve a ser idéntica a la observada en la detección síncrona cuando existe un error en frecuencia de la portadora del oscilador local.

2. BLU-PS

Consideremos primero la portadora local con error de fase solamente.

$$r(t) = \varphi_{\text{BLU}}(t) + A\cos(\omega_c t + \phi)$$

$$= [f(t)\cos\omega_c t + f_h(t)\,\text{sen}\,\omega_c t] + A\cos(\omega_c t + \phi)$$

$$= [A\cos\phi + f(t)]\cos\omega_c t + [f_h(t) - A\,\text{sen}\,\phi]\,\text{sen}\,\omega_c t$$

$$= e(t)\cos(\omega_c t + \theta)$$

en donde

$$e(t) = [A^2 + 2Af(t)\cos\phi - 2Af_h(t)\,\text{sen}\,\phi + f^2(t) + f_h^2(t)]^{1/2} \tag{3.44}$$

y

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{A \operatorname{sen} \phi - f_h(t)}{A \cos \phi + f(t)}\right]$$

Si

$$A \gg |f(t)|$$

entonces

$$A \gg |f_h(t)|$$

y

$$e(t) \simeq A + f(t) \cos \phi - f_h(t) \operatorname{sen} \phi$$

El empleo del detector rectificador o del detector de envolvente producirá $e(t)$. Al bloquear la constante A mediante un capacitor, la salida resultante $e_o(t)$ estará dada por:

$$e_o(t) = f(t) \cos \phi - f_h(t) \operatorname{sen} \phi \tag{3.45}$$

Esta salida es idéntica a la de la ecuación 3.37 (excepto por un factor constante). Ya se ha visto en la sección 3.5 que, en la ecuación 3.45, $e_o(t)$ representa la señal original $f(t)$ con distorsión de fase. Así, el error de fase de la portadora local en la técnica de reinserción de portadora da lugar a una distorsión idéntica a la que se observó en la técnica de detección síncrona. El lector puede demostrar, de manera parecida, que el efecto del error de frecuencia en la portadora local en la técnica de reinserción, es idéntico al observado en la técnica de detección síncrona.

Nótese que, cuando $\phi = 0$, la ecuación 3.45 se reduce a:

$$e_o(t) = A + f(t)$$

Entonces, si se inserta una portadora de alta potencia en una señal BLU-PS, se puede realizar la demodulación mediante el detector rectificador o de envolvente. En lugar de reinsertar la portadora en el receptor, se puede agregar una potencia suficiente de portadora en el transmisor. La señal de BLU recibida, con alta potencia de portadora, puede demodularse mediante la detección de envolvente (o de rectificador) en la misma forma que las señales de AM. Obtenemos la señal de BLU con alta potencia de portadora a partir de una señal de AM, si suprimimos una de sus bandas laterales. Este modo de transmisión BLU con portadora de alta potencia tiene las ventajas de ambos sistemas: el de BLU y el de AM, es decir, requiere solamente de la mitad del ancho de banda necesario en AM. Al mismo tiempo, posee las ventajas de simplicidad del detector de envolvente. Se emplea, con una ligera modificación, en la transmisión de señales de televisión (véase la sección 3.8).

De lo anterior, concluimos que una señal con portadora suprimida se puede demodular al reinsertar en el receptor una portadora de suficiente potencia y al utilizar posteriormente un detector rectificador o de envolvente. Es de esperarse que se obtiene el mismo resultado con señales de BLD, pues la adición de una portadora de potencia suficiente a una señal de BLD-PS la convierte en una señal de AM. El resultado no es tan obvio en las señales de BLU-PS. Cualitativamente, puede explicarse como sigue: cuando a una señal de BLU-PS se le agrega una portadora de alta potencia, la portadora domina la señal resultante y, en esencia la señal original de BLU-PS viaja en esta portadora. Por lo tanto, la señal resultante tiene cruces con cero aproximadamente iguales a los de la portadora; el empleo de la rectificación en este caso equivale a multiplicar la señal por una onda cuadrada $p(t)$. Esto, evidentemente, equivale a la detección síncrona.

También se ha demostrado que los errores de fase y de frecuencia en la portadora que se reinserta dan lugar a distorsiones parecidas a las observadas en las técnicas de detección síncrona.

3.7 COMPARACION DE DIVERSOS SISTEMAS DE AM

Hemos estudiado diferentes aspectos de los sistemas de AM (BLD y BLU) y de AM-PS (BLD-PS y BLU-PS). Resulta interesante comparar estos sistemas desde diferentes puntos de vista.

El sistema de AM tiene ventajas sobre el sistema de AM-PS en el extremo receptor. Los detectores requeridos en AM son relativamente más simples (detectores rectificadores o de envolvente) que los empleados en los sistemas con portadora suprimida. Por esta razón, todos los sistemas comerciales de comunicación emplean AM. Además, las señales de AM son más fáciles de generar a niveles altos de potencia, en comparación con las señales de portadora suprimida. Los moduladores balanceados que se utilizan para estas últimas son un poco difíciles de diseñar.

La ventaja que tienen los sistemas con portadora suprimida sobre los de AM consiste en que requieren de menos potencia para transmitir la misma información. Por eso el transmisor es menos costoso que en el caso de AM; sin embargo, los receptores son más complejos, pues deben generar la portadora local con la fase y frecuencia correctas. En los sistemas de comunicación de punto a punto, en donde sólo hay unos cuantos receptores por transmisor, se puede justificar esta complejidad en el receptor.

Sin embargo, el efecto de desvanecimiento selectivo (debido a la propagación por multitrayectorias), resulta mucho más grave en AM que en AM-PS. El desvanecimiento aparece debido a que la señal llega al receptor por más de una trayectoria de propagación, cada una de diferente longitud. Esto causa que las fases de las diferentes señales recibidas difieran entre sí. La señal resultante es la suma de todas las señales de las trayectorias diferentes. Las ondas sufren, a lo largo de su trayectoria, reflexiones en la ionosfera y en la superficie terrestre. Las condiciones ionosféricas cambian aleatoriamente con el tiempo y producen cambios aleatorios en la longitud de la trayectoria. Por lo tanto, las fases de las señales que llegan por las diferentes trayectorias al receptor cambian aleatoriamente. A este fenómeno se le conoce como *desvanecimiento*. El desvanecimiento también es sensible a las frecuencias y, debido a esto, sus efectos son aún más grandes. Así, la portadora y cada una de las bandas laterales experimentan diferentes intensidades de desvanecimiento. Este efecto, que se llama *desvanecimiento selectivo*, afecta las distintas bandas laterales en diferentes cantidades y cau-

sa distorsión. También afecta la relación entre la magnitud de la portadora y la de las bandas laterales. Dicho desvanecimiento puede ser más grave en la portadora que en las bandas laterales, al grado que ya no se satisfaga la condición (3.14). Al detectar esa forma de onda un detector de envolvente (o rectificador), quedará fuertemente distorsionada. El efecto del desvanecimiento selectivo se vuelve más severo en frecuencias altas; por lo tanto, en frecuencias altas se prefieren los sistemas con portadora suprimida.

A continuación, se compara el sistema de BLD-PS con el de BLU-PS. Encontramos que casi siempre se prefiere el de BLU por tener las siguientes ventajas sobre el de BLD:

1. El ancho de banda que se necesita en BLU es la mitad del necesario para señales de BLD.*

2. El desvanecimiento selectivo que se mencionó anteriormente afecta las relaciones de fase de las dos bandas laterales en BLD. Esto produce distorsión en la salida del demodulador. Puesto que en BLU sólo hay una banda lateral, esta posibilidad no existe. En condiciones de propagación de largo alcance, los efectos del desvanecimiento selectivo resultan más perjudiciales en BLD que en BLU.

Es por esto que se prefiere el sistema de BLU-PS. Este sistema se emplea en comunicaciones de largo alcance y frecuencia alta, particularmente en el rango de audio en donde las distorsiones de fase no tienen importancia relativa. Los equipos empleados en la banda de aficionados son de BLU.

Sin embargo, la transmisión en BLU tiene una desventaja con respecto a BLD. La generación de señales de BLU de alto nivel es más difícil que la de señales de BLD (véase la sección 3.4). Esta desventaja se supera al emplear la transmisión de banda lateral residual. Este modo de transmitir es, en realidad, una transacción entre el de BLU y el de BLD; combina las ventajas de los dos sistemas y elimina sus desventajas. A continuación examinaremos este modo de transmisión.

3.8 TRANSMISION DE BANDA LATERAL RESIDUAL

Se mencionó en la sección 3.3 que las señales de BLU resultan relativamente difíciles de generar. Si se emplean técnicas de filtrado para generar señales de BLU, al eliminar una de las bandas laterales de una señal de BLD, el filtro necesario debe tener una característica de corte muy pronunciada. Como esto es difícil, se busca un compromiso entre el sistema de BLU y el de BLD, que se conoce como transmisión de banda lateral residual. Aquí, en lugar de eliminar completamente una banda lateral (como en BLU), se admite un corte gradual de una banda lateral, como se muestra en la figura 3.22d. La característica de corte es tal que la supresión parcial de la banda lateral transmitida (banda lateral superior de la figura 3.22d) en la vecindad de la portadora está compensada exactamente por la transmisión parcial de la parte correspondiente de la banda lateral suprimida (banda

* El empleo de la multicanalización en cuadratura (véase el problema 3 al final del capítulo), puede eliminar esta diferencia. Sin embargo, debido a las condiciones no ideales del canal de paso de banda en BLD, el método produce más diafonía (interferencia entre canales) que la que se obtiene con la multicanalización por división de frecuencia en BLU.

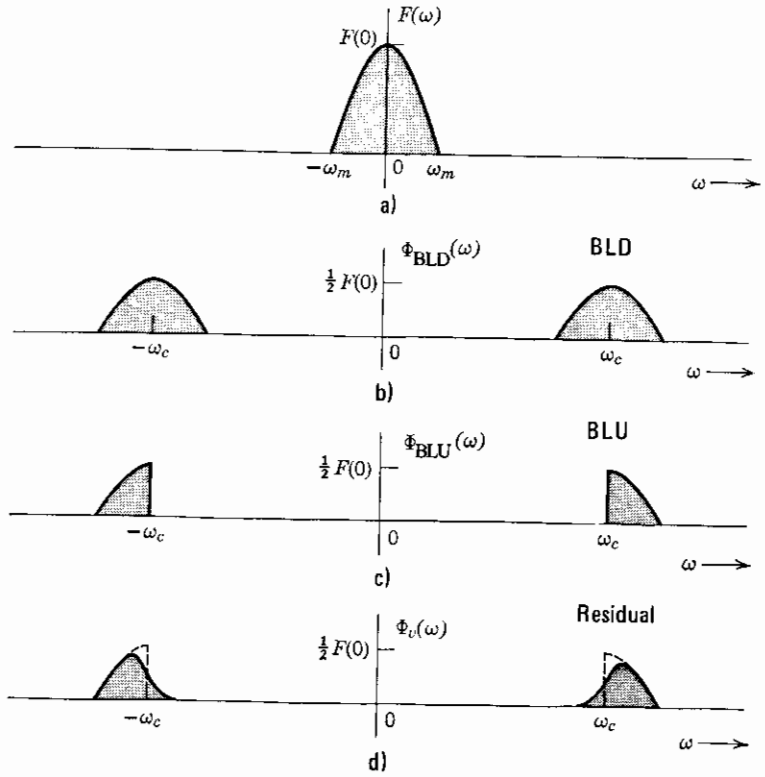


Figura 3.22

lateral inferior de la figura 3.22d). Gracias a este arreglo, se puede recuperar la señal deseada mediante un detector apropiado. Si con las bandas laterales residuales se transmite una portadora libre de alta potencia, se puede recobrar la señal en el receptor con un detector de envolvente (o rectificador). En el caso de bandas laterales residuales con portadora suprimida, se puede recuperar la señal mediante la detección síncrona (o por reinserción de la portadora y la consecuente detección de la envolvente).

Encontraremos a continuación las características de filtro apropiadas que se necesitan para producir la señal de banda lateral residual a partir de una señal de BLD.

Sea $H(\omega)$ la función de transferencia del filtro necesario (figura 3.23). Si $f(t)$ es la señal mensaje y $F(\omega)$ es su transformada de Fourier, entonces $\Phi_v(\omega)$, el espectro de la señal residual $\varphi_v(t)$, está dado por (figura 3.22d)

$$\Phi_v(\omega) = \tfrac{1}{2}[F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)]H(\omega) \qquad (3.46)$$

Se puede recobrar la señal original $f(t)$ a partir de $\varphi_v(t)$ con la detección síncrona. La señal residual de entrada $\varphi_v(t)$ se multiplica antes por $\cos \omega_c t$. El producto $e_d(t)$ es

$$e_d(t) = \varphi_v(t) \cos \omega_c t \leftrightarrow \tfrac{1}{2}[\Phi_v(\omega + \omega_c) + \Phi_v(\omega - \omega_c)]$$

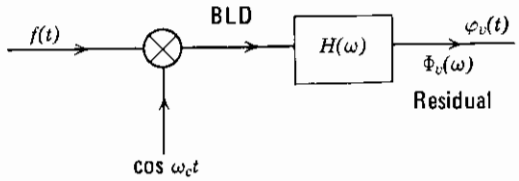


Figura 3.23

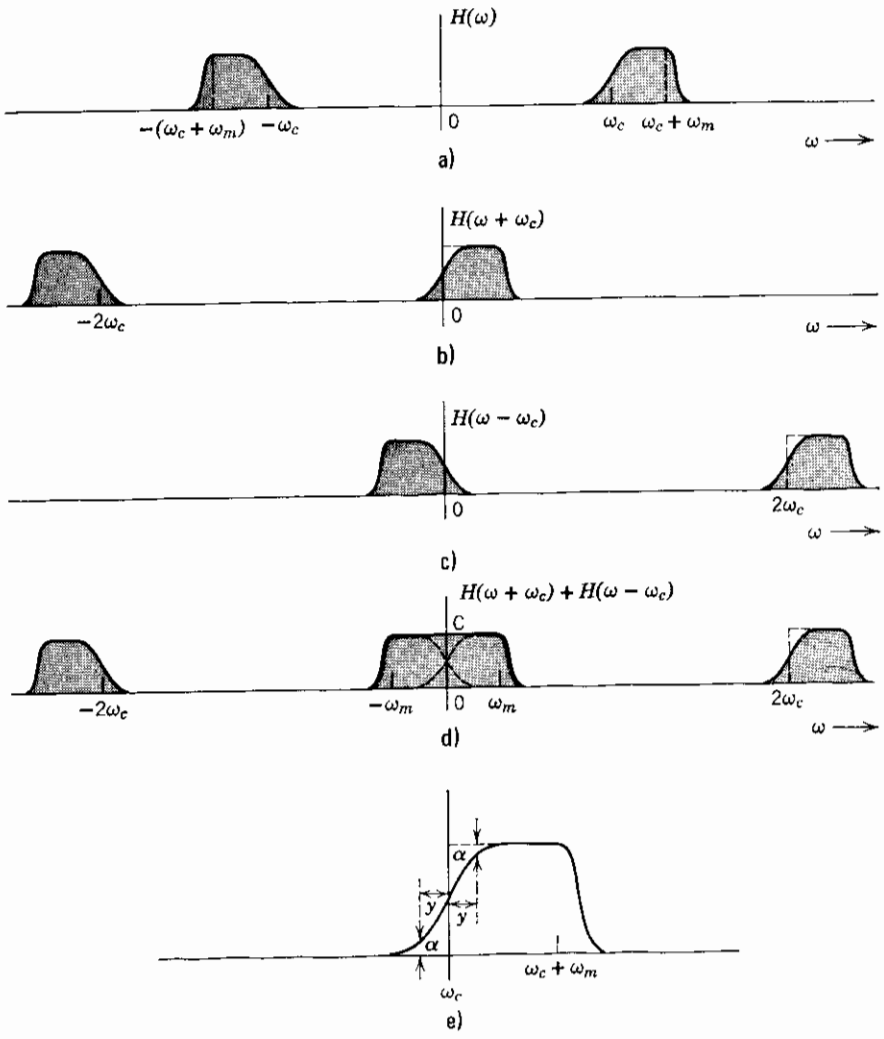


Figura 3.24

Al substituir la ecuación 3.46 en la anterior, obtenemos:

$$e_d(t) \leftrightarrow \tfrac{1}{4}\{[F(\omega + 2\omega_c) + F(\omega)]H(\omega + \omega_c) + [F(\omega) + F(\omega - 2\omega_c)]H(\omega - \omega_c)\}$$

Los términos $F(\omega + 2\omega_c)$ y $F(\omega - 2\omega_c)$ representan $F(\omega)$ trasladado a $\pm 2\omega_c$ y quedan eliminados con un filtro de paso bajo. La salida resultante $e_o(t)$ está dada por:

$$e_o(t) \leftrightarrow \tfrac{1}{4}F(\omega)[H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c)] \qquad (3.47)$$

En una recepción sin distorsión, necesitamos tener:

$$e_o(t) \leftrightarrow kF(\omega)$$

Por lo tanto, la función de transferencia $H(\omega)$ debe cumplir con:

$$H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c) = C \qquad \text{(constante)} \qquad (3.48)$$

En la ecuación 3.47, observamos que, como $F(\omega) = 0$ cuando $|\omega| > \omega_m$, la ecuación 3.48 necesita cumplirse solamente para $|\omega| < \omega_m$. Entonces

$$H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c) = C \qquad |\omega| < \omega_m \qquad (3.49)$$

Los términos $H(\omega + \omega_c)$ y $H(\omega - \omega_c)$ representan $H(\omega)$ trasladado respectivamente en $-\omega_c$ y en ω_c, desde el origen. Esto se ilustra en las figuras 3.24b y c. La suma de los dos términos debe ser constante en $|\omega| < \omega_m$. Se ve fácilmente en la figura 3.24 que esto será posible sólo si la característica de corte del filtro, alrededor de la portadora, tiene simetría complementaria (que se muestra en la figura 3.24e).

Hemos hecho ver que se puede recobrar la señal a partir de una señal de banda lateral residual con portadora suprimida mediante la detección síncrona. Se puede demostrar que, si se agrega una portadora de alta potencia a la señal de banda lateral residual, la detección se puede llevar a cabo con un detector de envolvente (o rectificador). Esto es fácil de explicar cualitativamente. Si la amplitud de la portadora es muy grande comparada con $\varphi_v(t)$, la señal combinada tendrá cruces con cero aproximadamente en los mismos puntos que la portadora y, en consecuencia, para la rectificación de esa señal se requerirá de la multiplicación por una onda cuadrada $p(t)$. Esto, por supuesto, equivale a la detección síncrona.

La banda lateral residual reúne las ventajas del sistema BLU y del BLD y elimina sus desventajas. Prácticamente, requiere el mismo ancho de banda que el de BLU (la mitad del de BLD) y se puede obtener a partir de señales de BLD con filtros relativamente más simples con características de corte gradual. Dicho sistema es relativamente inmune al desvanecimiento selectivo. Si se agrega una portadora de alta potencia a la señal residual, se le puede demodular mediante el detector de envolvente; las bandas laterales residuales combinan todas las ventajas de AM (BLU y BLD). En los sistemas de difusión de la televisión, las señales de video se transmiten mediante bandas laterales residuales. Esto reduce el ancho de banda de 8 MHz. (en BLD o AM) a 5 MHz. También se transmite una cantidad considerable de

portadora con las bandas laterales residuales. Esto hace posible la demodulación de la señal mediante el detector de envolvente en el receptor.

3.9 MULTICANALIZACION POR DIVISION DE FRECUENCIA

Según lo estudiado hasta aquí de la modulación, se aprecia la utilidad que representa en la transmisión simultánea de varias señales. Supongamos que se desea enviar n señales simultáneamente por un medio de transmisión, cada una de las cuales está limitada en banda a ω_m radianes por segundo. Por ejemplo, consideremos el sistema de AM, aun cuando se puede decir lo mismo para otros modos de transmisión. Las n señales modulan a las portadoras $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, de manera tal que cada portadora queda separada de la adyacente en por lo menos $2\omega_m$ radianes por segundo. Cada una de

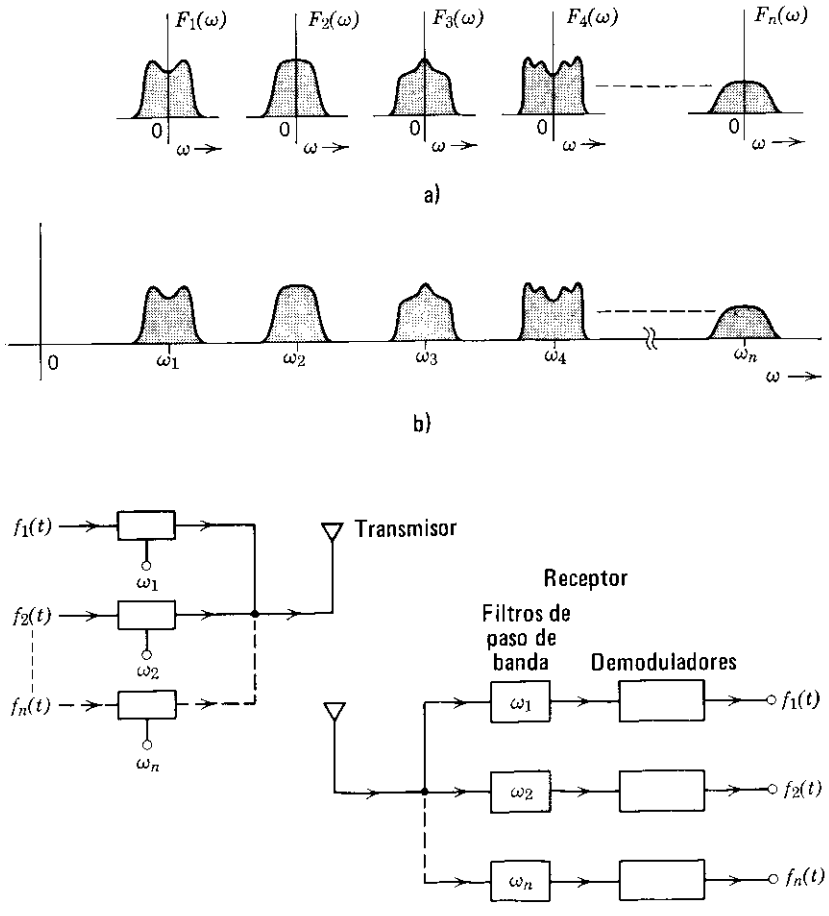


Figura 3.25

las señales moduladas tiene un ancho de banda de $2\omega_m$ y está centrada en las frecuencias $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. (Existe un espectro similar para frecuencias negativas). Esto se indica en las figuras 3.25a y b. La figura 3.25a nos muestra el espectro de cada una de las señales y la figura 3.25b el espectro total de las señales moduladas en el transmisor. En el receptor, se separan los diferentes espectros con filtros de paso de banda adecuados (figura 3.25c).

Después de filtrar, se demodulan las señales para obtener las originales. La difusión de radio y televisión es un ejemplo conocido de la multicanalización por división de frecuencia. Cada transmisor envía una señal modulada con una portadora que se encuentra separada por lo menos en $2\omega_m$ de las portadoras de otras estaciones transmisoras. En radiodifusión esto es aproximadamente 10 KHz. El receptor comercial capta cualquier señal deseada al sintonizarla adecuadamente, de modo que deja pasar la banda que se quiere y atenúa las demás frecuencias. A continuación, se demodula la señal para obtener la información deseada. Sin embargo, en casi todos los receptores comerciales de AM, la demodulación no se lleva a cabo directamente; en primer lugar, se traslada la señal modulada recibida a una frecuencia inferior fija conocida como frecuencia intermedia cuyo valor es de 455 KHz. La traslación se hace al modular la onda de entrada con una señal generada localmente, que difiere de la portadora transmitida en 455 KHz. Una vez trasladada a esta frecuencia intermedia, se le amplifica y demodula para obtener la señal deseada.

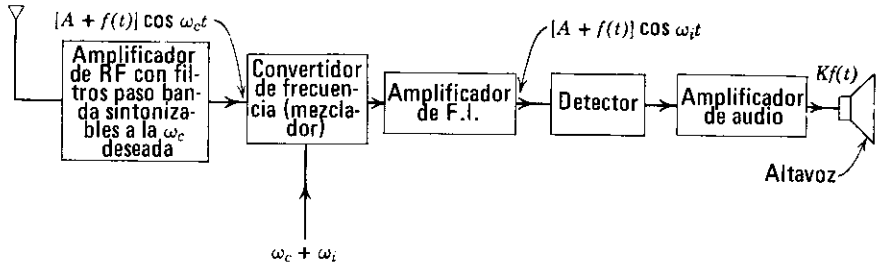

$[A + f(t)] \cos \omega_c t$
Amplificador de RF con filtros paso banda sintonizables a la ω_c deseada
Convertidor de frecuencia (mezclador)
$[A + f(t)] \cos \omega_i t$
Amplificador de F.I.
Detector
Amplificador de audio
$Kf(t)$
Altavoz
$\omega_c + \omega_i$

Figura 3.26 Diagrama a bloques del receptor superheterodino.

La ventaja de la conversión a una frecuencia intermedia consiste en que, para recibir estaciones, sólo es necesario sintonizar la primera etapa (y el oscilador local). Toda la amplificación se realiza a una frecuencia intermedia constante y no se requiere de sintonización en las etapas subsecuentes. Al proceso de traslación de frecuencia también se le llama heterodinación. Con el objeto de trasladar el espectro a una frecuencia intermedia fija, el oscilador local debe ser de una frecuencia superior o inferior a la de la portadora transmitida por 455 KHz. Generalmente, se escoge la frecuencia de la señal del oscilador local de modo que tenga valor más alto que la portadora de entrada. Debido a esto, a esos receptores se les conoce como *superheterodinos*. El diagrama de bloques de ese receptor está en la figura 3.26.

PROBLEMAS

1. Una señal BLD-PS está dada por:

$$\varphi(t) = f(t) \cos \omega_1 t$$

en donde ω_1 es la frecuencia de la portadora. Se desea cambiar la frecuencia de la portadora de ω_1 a ω_2 (esto se llama conversión de frecuencia). Demuéstrese que los circuitos del tipo modulador balanceado que se indican en las figuras 3.4, 3.5, y 3.6 son adecuados para ese fin al insertar $f(t) \cos \omega_1 t$ y $A \cos (\omega_2 \pm \omega_1)t$ en los puntos adecuados y utilizar filtros apropiados. Se supone que $A \gg |f(t)|$.

2. Podemos usar un circuito modulador balanceado también como detector síncrono. Si suponemos un modelo lineal del diodo (figura P-3.2a), encontrar el voltaje de salida $e_o(t)$ en el circuito de la figura P-3.2b, donde

$$\varphi_1(t) = f(t) \cos \omega_c t$$

$$\varphi_2(t) = A \cos \omega_c t$$

Supongamos que $A \gg |f(t)|$ para todo t. ¿Cómo puede recuperarse $f(t)$ a partir de $e_o(t)$? Este circuito también se emplea como discriminador de fase para medir la fase de una onda sinusoidal con respecto a la de otra. Demuéstrese que si:

$$\varphi_1(t) = \cos (\omega t + \theta)$$

$$\varphi_2(t) = A \cos \omega t$$

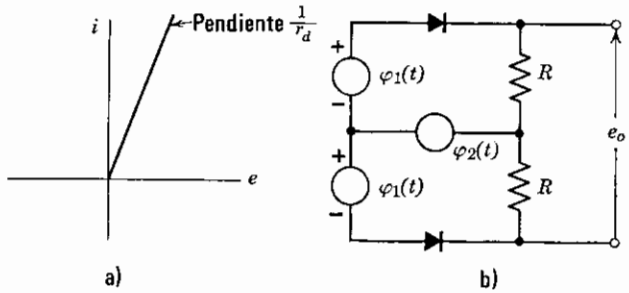


Figura P-3.2

entonces el voltaje de salida $e_o(t)$ contiene un término de corriente directa proporcional a $\cos \theta$.

3. Es posible transmitir simultáneamente dos diferentes señales en la misma portadora. Las dos señales modulan portadoras de la misma frecuencia pero con la fase en cuadratura como se muestra en la figura P-3.3. Demuéstrese que se pueden recobrar las señales mediante la detección síncrona de la señal recibida con portadoras de la misma frecuencia pero con fase en cuadratura (figura P-3.3). Este método se conoce como *multicanalización en cuadratura.*

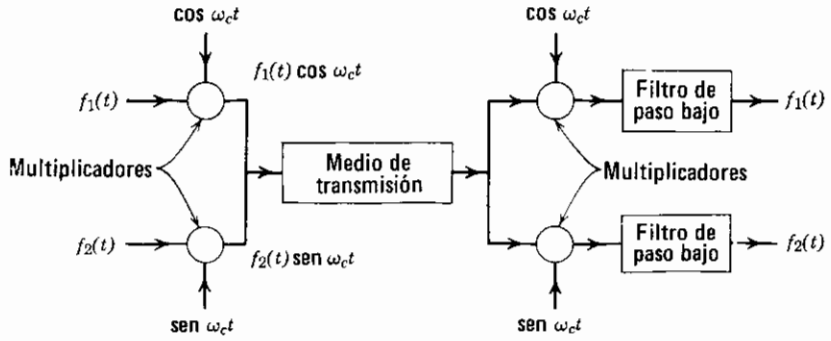


Figura P-3.3

4. *a*) Explicar cualitativamente lo que sucede cuando se emplea un detector de envolvente (o un detector rectificador) para demodular una señal BLD-PS.

b) La figura P-3.4 nos muestra una señal $f(t)$ de amplitud modulada BLD-PS que alimenta a un detector de envolvente. Encontrar la salida del detector.

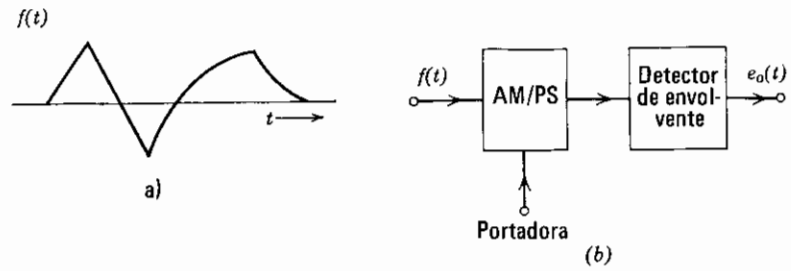


Figura P-3.4

5. Una señal modulante $f(t)$ es una sinusoide simple dada por:

$$f(t) = A \cos (2000\pi t)$$

Representar gráficamente las señales correspondientes BLD-PS y BLU-PS en una frecuencia de portadora de 10 KHz. Representar gráficamente la señal de AM para un índice de modulación de 0.75.

6. El circuito puente es de uso común en mediciones. El puente resistivo sirve para medir cantidades que hacen variar linealmente a una resistencia. Un medidor de esfuerzos, por ejemplo, es un dispositivo en el cual un elemento sensible al esfuerzo está adherido al cuerpo bajo tensión. Entonces, la resistencia del elemento varía en

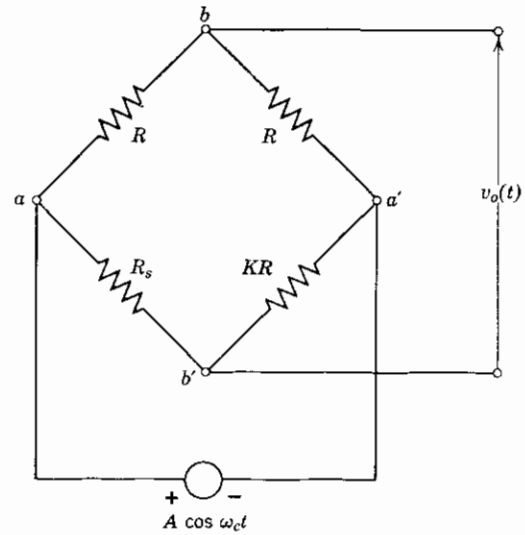


Figura P-3.6

proporción con el esfuerzo. De la misma manera, algunos elementos son sensibles a la temperatura y su resistencia varía linealmente con ella (por ejemplo, un termistor). El puente resistivo de la figura P-3.6 tiene tres resistores fijos; el cuarto resistor es el que varía en proporción a la cantidad que se va a medir. Supongamos que el resistor tiene un valor estático de KR. El valor del resistor R_s está dado por:

$$R_s = KR[1 + \alpha f(t)]$$

en donde $f(t)$ es la cantidad que se va a medir (por ejemplo esfuerzo o temperatura) y α es la constante de proporcionalidad. En las terminales aa', se conecta una fuente sinusoidal $A \cos \omega_c t$. Encontrar la salida en las terminales bb'. ¿Qué tipo de modulación es ésta? Proponer el tipo de demodulación que podría usarse a la salida. Se supone que $\alpha f(t) \ll 1$.

7. Demostrar que el sistema de la figura P-3.7 puede demodular señales de AM. Este es el arreglo de rectificador de ley cuadrática de onda completa. Demostrar que el filtro de paso bajo de este arreglo debe tener una frecuencia de corte de $2\omega_m$, en

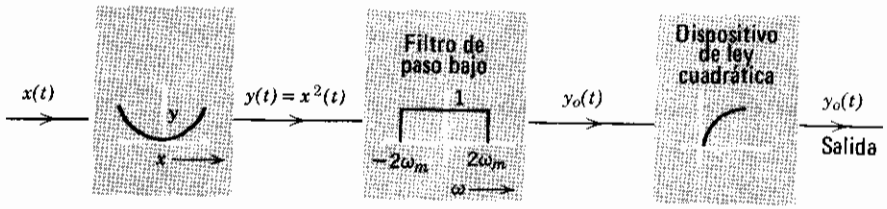


Figura P-3.7

donde ω_m es la máxima frecuencia de la señal mensaje $f(t)$. En general, demostrar que este arreglo actúa como detector de envolvente y, en consecuencia, no puede demodular señales con portadora suprimida.

8. Demostrar que, en la figura P-3.7, si la primera etapa es un rectificador lineal de onda completa con características como las de la figura P-3.8, entonces la onda de AM se puede demodular sin el dispositivo de ley cuadrática final.

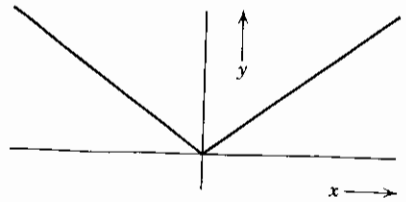


Figura P-3.8

9. El capacitor C de un detector de envolvente debe ser lo suficientemente grande para eliminar el rizo a la frecuencia de la portadora, que aparece en la señal demodulada. Por otra parte, si C es muy grande, la constante de tiempo RC del circuito R-C aumenta y deja de conservarse la envolvente de la señal modulada. Analícese cuidadosamente el efecto de valores muy bajos y muy altos de la constante de tiempo.

a) Determinar el valor máximo de la constante de tiempo que permitirá al detector seguir la envolvente de la señal modulada que se indica en la figura P-3.9. Supongamos

que el período de la señal modulante es 10^{-3} segundos y que el período de la portadora es mucho menor que 10^{-3} segundos. (*Sugerencia:* Tómese la aproximación al decaimiento exponencial del circuito R-C mediante los dos primeros términos de la serie de Taylor e iguálese la rapidez de descarga del circuito R-C a la rapidez de decaimiento de la envolvente.)

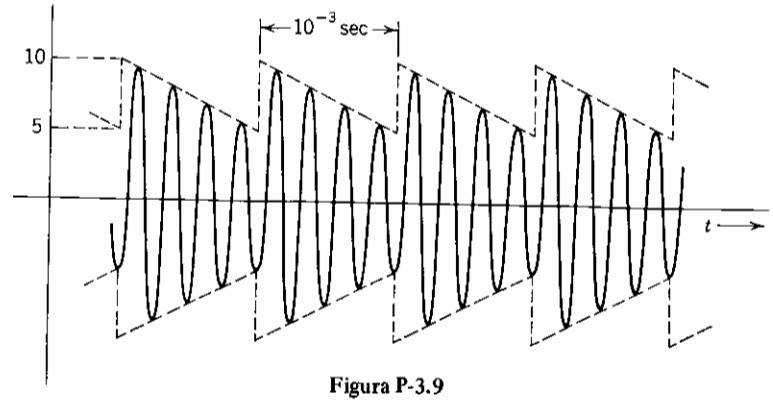


Figura P-3.9

b) Si la señal modulante fuese una señal sinusoidal de frecuencia ω_s, ¿como se determinaría el máximo valor de la constante de tiempo que tenga la propiedad de permitir que el detector siga la envolvente?

10. Hacer las gráficas de las formas de onda de aa' bb' y cc' del modulador del tipo de interrupción que se muestra en la figura 3.10c. Explicar qué condiciones debe satisfacer la amplitud k de la señal sinusoidal y de la señal de modulación $f(t)$ para que la salida en las terminales cc' sea señal de AM. Se supone que la impedancia de entrada del filtro de paso de banda es infinita.

11. Supongamos que la señal $f(t)$ está limitada en banda a ω_m radianes por segundo. Determinar si la señal $f^2(t)$ es también de banda limitada y, siendo este el caso, encontrar su frecuencia máxima. ¿Qué se puede decir acerca del espectro de $f^n(t)$ en

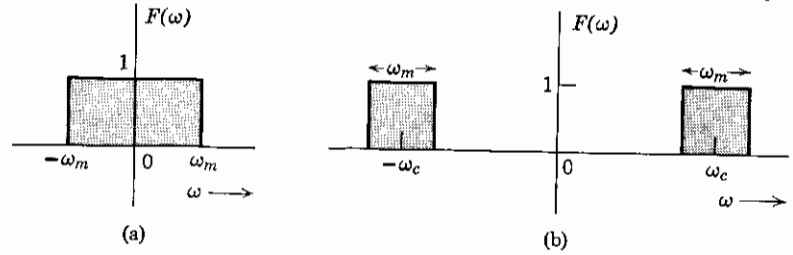


Figura P-3.11

general? (*Sugerencia:* Emplear el teorema de la convolución.) En la figura P-3.11 vemos los espectros de dos señales de banda limitada. Encuéntrese el espectro de $f^2(t)$ en cada caso y elabórese su gráfica.

12. En la figura P-3.12 se ilustra una señal modulante periódica $f(t)$. En el caso de modulación en amplitud AM determinar la amplitud mínima de la portadora. Hacer la gráfica, para esta amplitud de la onda de AM cuando la frecuencia de la portadora es de 100 KHz. Encontrar el espectro de frecuencia de la onda de AM y elaborar las gráficas de la onda correspondiente BLD-PS y su espectro.

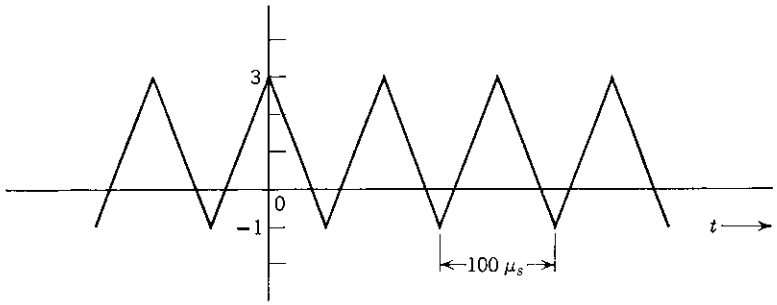


Figura P-3.12

13. La detección síncrona de una señal de AM-PS se puede llevar a cabo al multiplicar la señal modulada recibida por un tren de pulsos $p(t)$ de frecuencia ω_c, como se ve en la figura 3.7. El resultado de esta multiplicación es la señal $f(t)\cos\omega_c tp(t)$. Deducir la expresión analítica de la función de densidad espectral de esta señal y demostrar que se puede recuperar la señal $f(t)$ en la salida con un filtro de paso bajo. (*Sugerencia:* Emplear las ecuaciones 3.8 y 3.11.)

14. Una estación de radiodifusión transmite una señal de BLD-PS con potencia (valor cuadrático medio) de P watts con el fin de cubrir determinada región. ¿Cuál sería la potencia necesaria para cubrir la misma región con la misma intensidad si, en lugar de esta estación, se emplea una de BLU-PS? Se supone que se usa demodulación síncrona con una portadora generada localmente, con la misma intensidad en ambos casos.

15. La figura 3.12 nos enseña el detector rectificador de media onda. Dibujar el arreglo correspondiente al detector rectificador de onda completa. Construir las gráficas de la señal entrante de AM, la señal rectificada y la salida final del filtro de paso bajo en este arreglo, así como los espectros de frecuencia correspondientes. (*Sugerencia:* La rectificación de onda completa de AM equivale a multiplicar la señal por una onda cuadrada de valor medio cero. Esta es una onda cuadrada bipolar.)

16. Se tiene una onda sinusoidal $\cos^3\omega_c t$ distorsionada. Para obtener una señal BLD-PS, se multiplica una señal modulante $f(t)$ por esta forma de onda portadora distorsionada. Encontrar el espectro del producto $f(t)\cos^3\omega_c t$, y trazar su gráfica. Explicar cómo se obtiene la señal modulada que se busca $f(t)\cos\omega_c t$, a partir de este producto.

17. Una señal modulante $f(t)$ de banda limitada a 5 KHz está multiplicada por la señal triangular periódica de la figura P-3.17a. Encuéntrese el espectro del producto y

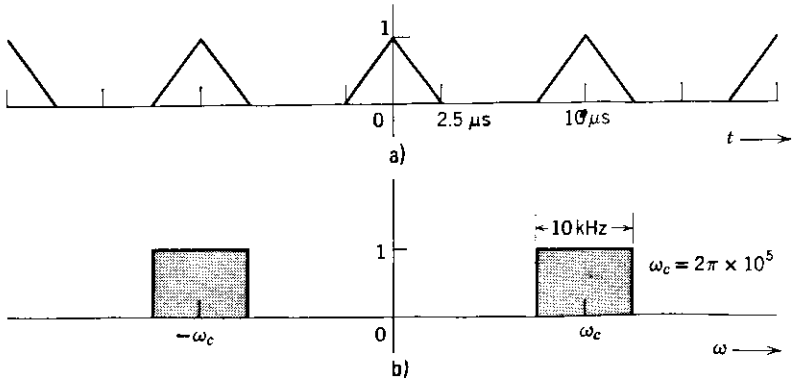


Figura P-3.17

trácese su gráfica. Para obtener la señal modulada, se transmite el producto por un filtro ideal de paso de banda con una frecuencia central de 100 KHz (figura P-3.17b). La salida de este filtro es $Af(t)\cos\omega_c t$. Determínese la constante A.

18. Considérese la señal de AM

$$\varphi_{am}(t) = (1 + A\cos\omega_m t)\cos\omega_c t$$

en donde la frecuencia de la señal mensaje $\omega_m = 5$ KHz, la frecuencia de la portadora $\omega_c = 100$ KHz y la constante $A = 15$. Determinar si a esta señal se le puede demodular con un detector de envolvente ¿Cuál será la salida de dicho detector? Encontrar el espectro de frecuencia en la salida del detector de envolvente.

19. Verificar que la salida $v_O(t)$ de la figura 3.10c es una señal de AM si el elemento compuesto formado por el diodo y el resistor R en serie tiene una relación v-i

$$i = ae + be^2$$

en donde i es la corriente del diodo y e es el voltaje correspondiente a través del elemento compuesto diodo-resistor. Se supone que la impedancia de entrada del filtro de paso de banda es infinita.

20. La señal modulante $f(t)$ está dada por

$$f(t) = \cos(2000\pi t) + \cos(4000\pi t)$$

Encontrar la expresión de la señal de BLU-PS correspondiente cuando la frecuencia de la portadora es de 10 KHz.

21. Encuentre la salida del cambiador de fase de la figura 3.19 si la señal de entrada es $A\cos(\omega_c t + \theta)$.

22. La señal modulante $f(t)$ es la señal periódica de la figura P-3.12. Encontrar la expresión correspondiente a la señal de BLU-PS cuando la portadora tiene una frecuencia de 100 KHz.

23. La señal de banda lateral residual se genera cuando se transmite una onda de AM a través de un filtro de banda lateral residual. Si la función de transferencia

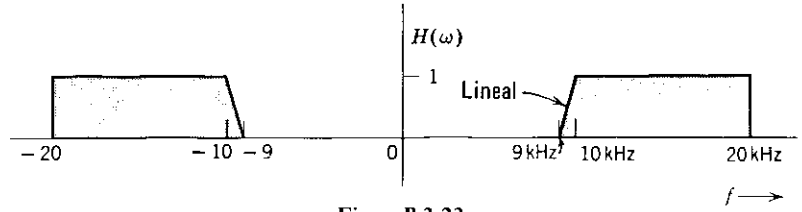


Figura P-3.23

de este filtro es como la de la figura P-3.23, encontrar la expresión para la señal de banda lateral residual resultante cuando la señal modulante $f(t)$ está dada por:

$$f(t) = \begin{array}{ll} a) & A\ \text{sen}\ (100\pi t) \\ b) & A\ [\text{sen}\ (100\pi t) + \cos(200\pi t)] \\ c) & A\ \text{sen}\ (100\pi t)\cos(200\pi t) \end{array}$$

La frecuencia de la portadora es de 10 KHz y su amplitud es de $4A$: Construir la gráfica del espectro de la señal de banda lateral residual resultante en cada caso.

24. Si en el problema 3.23 la señal modulante $f(t)$ está dada por:

$$f(t) = \begin{array}{ll} a) & Sa\,(200\pi t) \\ b) & Sa^2\,(200\pi t) \end{array}$$

Dibújese la gráfica del espectro de la señal de banda lateral residual en cada caso. (Se supone que la portadora se suprime.)

CAPITULO 4

Sistemas de comunicación: Modulación angular

En el caso de señales de AM, la amplitud de la portadora se modula con la señal $f(t)$ y, por lo tanto, la información queda contenida en la variación de amplitud de la portadora. Como una señal sinusoidal se describe mediante tres variables –amplitud, frecuencia y fase– existe también la posibilidad de llevar esa información cuando varían o bien la frecuencia o la fase. Sin embargo, por definición, una sinusoide representa un tren de ondas de amplitud, frecuencia y fase constantes, y un cambio de cualquiera de estas tres variables será contradictorio con la definición de señal sinusoidal. Deberemos, por lo tanto, extender el concepto de señal sinusoidal a una función generalizada cuya amplitud, frecuencia y fase puedan variar en función del tiempo. Ya hemos estudiado el concepto de amplitud variable en relación con las señales de AM. A continuación se considerarán variaciones de frecuencia y fase

Para entender el concepto de variación de frecuencia es preciso definir la frecuencia instantánea. La figura 4.1a ilustra una señal sinusoidal $\varphi(t)$ de frecuencia constante ω_0 para $t < T$. En $t = T$ la frecuencia cambia repentinamente a $2\omega_0$ y conserva este valor hasta $t = 2T$, donde vuelve a cambiar a ω_0. Aquí, los cambios de frecuencia son bruscos, como se muestra en la figura 4.1b y resulta fácil entender el concepto de variación de frecuencia. La función $\varphi(t)$ es una señal sinusoidal de frecuencia ω_0 en los intervalos $2nT < t < (2n + 1)T$ y de un valor $2\omega_0$ en los intervalos $(2n + 1)T < t < (2n + 2)T$ (n entero).

Ahora bien, podría preguntarse lo que ocurriría si, en lugar de variaciones bruscas, se tuviera una variación gradual de la frecuencia, como se indica en la figura 4.1d. En este caso, la frecuencia de la señal cambia continuamente con rapidez uniforme entre ω_0 y $2\omega_0$ dentro del intervalo T; por lo tanto, la frecuencia es diferente a cada instante. En sentido estricto, la señal $f(t)$ no puede representarse mediante una expresión sinusoidal ordinaria, por tratarse de una variación continua de frecuencia. Por esto, precisamos definir una función sinusoidal generalizada

$$f(t) = A \cos \theta(t) \tag{4.1}$$

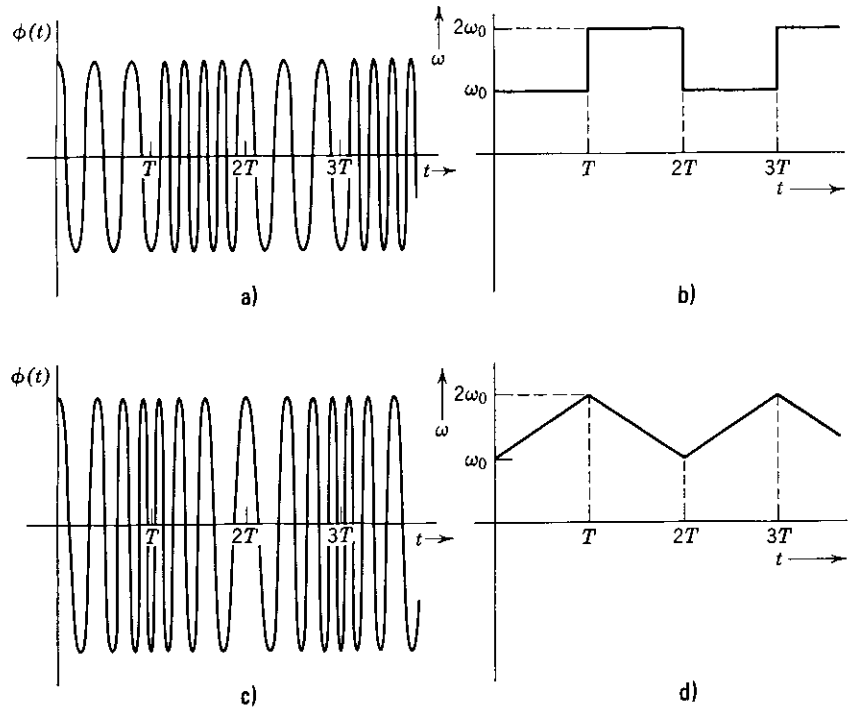


Figura 4.1 El concepto de frecuencia instantánea.

en donde θ es el ángulo de la señal sinusoidal en función de t. Para una función sinusoidal ordinaria de frecuencia fija,

$$f(t) = A \cos (\omega_c t + \theta_0)$$

Entonces

$$\theta(t) = \omega_c t + \theta_0$$

y

$$\omega_c = \frac{d\theta}{dt} \tag{4.2}$$

La frecuencia angular ω_c es constante y está dada por la derivada del ángulo $\theta(t)$; en general, no necesita ser constante. Definamos $d\theta/dt$ como la frecuencia instantánea ω_i que varía con el tiempo. En esta forma, establecemos una relación entre el ángulo $\theta(t)$ y la frecuencia instantánea ω_i:

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\theta = \int \omega_i \, dt \tag{4.3}$$

Ya resulta fácil entender la posibilidad de transmitir información $f(t)$ haciendo variar el ángulo $\theta(t)$ de una portadora. Tales técnicas de modulación, donde se hace variar el ángulo de la portadora en alguna forma con una

señal modulante $f(t)$, se conocen como *modulación angular*. Los dos métodos de uso común son: *modulación en fase* (MF) y *modulación en frecuencia* (FM). Si el ángulo $\theta(t)$ varía linealmente con $f(t)$, entonces

$$\theta(t) = \omega_c t + \theta_0 + k_p f(t) \tag{4.4}$$

donde k_p es constante, y la forma obtenida constituye la modulación en fase. Por lo tanto, una señal $A \cos [\omega_c t + \theta_0 + k_p f(t)]$ representa una portadora modulada en fase. Obsérvese que la frecuencia instantánea ω_i de tal señal está dada por

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = \omega_c + k_p \frac{df}{dt} \tag{4.5}$$

Entonces, en este tipo de modulación la frecuencia instantánea varía linealmente con la derivada de la señal modulante. Sin embargo, si dicha frecuencia instantánea varía directamente en función de la señal modulante, se tiene lo que se conoce como frecuencia modulada. De esta manera, para una portadora modulada en frecuencia, ω_i está dada por

$$\omega_i = \omega_c + k_f f(t) \tag{4.6}$$

y

$$\theta(t) = \int \omega_i \, dt$$

$$= \omega_c t + k_f \int f(t) \, dt + \theta_0 \tag{4.7}$$

y la señal $A \cos [\omega_c t + \theta_0 + k_f \int f(t) \, dt]$ es una portadora de frecuencia modulada.

De lo anterior es fácil ver que aun siendo MF y FM formas diferentes de la modulación angular, son similares. En MF, el ángulo varía linealmente con la señal modulante mientras que en FM varía linealmente con la integral de la señal modulante. Si se integra primero la señal de información $f(t)$ y se usa para modular una portadora en frecuencia, el resultado es una onda modulada en fase. De hecho, en uno de los métodos para generar señales de FM (sistema indirecto de Armstrong) se integra $f(t)$ y luego se utiliza para modular en fase a una portadora. MF y FM están relacionadas, pues cualquier variación en la fase de una onda produce una variación en frecuencia y viceversa, de modo que no es necesario estudiar por separado ambas formas de modulación angular. En este capítulo sólo estudiaremos con algunos pormenores la modulación en frecuencia, y la exposición será también válida para el caso de modulación en fase. Nótese que la amplitud se mantiene constante en la modulación angular. Las figuras 4.1a y c son ejemplos de portadoras de FM.

Si denotamos respectivamente por $\varphi_{MF}(t)$ y $\varphi_{FM}(t)$ las señales de MF y FM, entonces

$$\varphi_{MF}(t) = A \cos [\omega_c t + k_p f(t)]$$

$$\varphi_{FM}(t) = A \cos \left[\omega_c t + k_f \int f(t) \, dt \right] \tag{4.8}$$

en donde $f(t)$ es la señal mensaje. En las ecuaciones anteriores se supone, sin perder generalidad, que la fase inicial θ_0 es cero.

Son muy conocidas las ventajas de la representación exponencial de ondas sinusoidales; por eso expresaremos la señal sinusoidal de la expresión (4.1) en su forma exponencial:

$$A \cos \theta(t) \sim Ae^{j\theta(t)}$$

en donde queda entendido que siempre nos referiremos a la parte real de la forma exponencial:

$$A \cos \theta(t) = \text{Re}\,[Ae^{j\theta(t)}]$$

Usaremos la notación $\hat{\varphi}(t)$ para la representación exponencial de $\varphi(t)$.

Así pues, si

$$\varphi(t) = A \cos \theta(t)$$

entonces

$$\hat{\varphi}(t) = Ae^{j\theta(t)}$$

y

$$\varphi(t) = \text{Re}\,\hat{\varphi}(t)$$

De acuerdo con esta notación las portadoras de MF y FM de la ecuación 4.8 pueden expresarse de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\text{MF}}(t) &= Ae^{[\omega_c t + k_p f(t)]} \\ \hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) &= Ae^{[\omega_c t + k_f \int f(t)\,dt]} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Por conveniencia, sea

$$\int f(t)\,dt = g(t)$$

Esto conduce a

$$\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) = Ae^{j[\omega_c t + k_f g(t)]} \tag{4.10}$$

4.1 FM DE BANDA ANGOSTA

La expresión general de la portadora de FM está dada por la ecuación 4.10. La frecuencia instantánea ω_i es

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = \omega_c + k_f \frac{dg}{dt} = \omega_c + k_f f(t)$$

la cual, obviamente, es proporcional a una señal mensaje $f(t)$. El término $k_f f(t)$ representa la desviación de la frecuencia de la portadora de su valor inicial estático, ω_c. Por lo tanto, la constante k_f controla dicha desviación. Para valores pequeños de k_f, la desviación de frecuencia es reducida y el espectro de la función de FM tendrá un ancho de banda angosto. Si k_f es

grande, el ancho de banda será proporcionalmente mayor. Considérese primero el caso de banda angosta. Si k_f es tan pequeña que $k_f g(t) \ll 1$ para todo t, entonces

$$e^{jk_f g(t)} \simeq 1 + jk_f g(t)$$

y

$$\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) \simeq A[1 + jk_f g(t)]e^{j\omega_c t}$$

y

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = \text{Re}\,[\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t)] = \underbrace{A \cos \omega_c t}_{\text{portadora}} - \underbrace{Ak_f g(t) \text{ sen } \omega_c t}_{\text{banda lateral}} \tag{4.11}$$

Obsérvese que, en AM, la señal se expresa como (ecuación 3.12a):

$$\varphi_{\text{AM}}(t) = A \cos \omega_c t + f(t) \cos \omega_c t \tag{4.12}$$

mientras que la señal de FM de banda angosta como

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = A \cos \omega_c t - Ak_f g(t) \text{ sen } \omega_c t \tag{4.13}$$

De la misma manera, la señal de MF estaría dada por

$$\varphi_{\text{MF}}(t) = A \cos \omega_c t - Ak_p f(t) \text{ sen } \omega_c t \tag{4.14}$$

Cada señal tiene un término de portadora y las bandas laterales que están centradas en $\pm\,\omega_c$. Si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

y

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$$

entonces, ya que

$$g(t) = \int f(t)\,dt$$

se deduce de la propiedad de integración en el tiempo (ecuación 1.119b) que,

$$g(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega) \tag{4.15}$$

Por lo tanto,

$$G(\omega) = \frac{1}{j\omega} F(\omega) \tag{4.16}$$

Así, si $F(\omega)$ está limitado en banda a ω_m, entonces también $G(\omega)$ estará limitado en banda a ω_m. El espectro de frecuencia de $\varphi_{\text{FM}}(t)$ de la portadora de FM de la ecuación 4.11 se puede encontrar mediante la ecuación 1.116b. En consecuencia, si

entonces $\varphi_{\text{FM}}(t) \leftrightarrow \Phi_{\text{FM}}(\omega)$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{FM}}(\omega) &= \pi A[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ &\quad + \frac{jAk_f}{2}\,[G(\omega - \omega_c) - G(\omega + \omega_c)] \end{aligned} \tag{4.17}$$

Comparando los espectros de FM (ecuación 4.17) y de AM (ecuación 3.12b) se aprecian las similitudes y las diferencias entre los 2 tipos de modulación. En ambos casos existen un término de portadora y una componente de banda lateral centrada en $\pm\omega_c$. Sin embargo, el espectro de banda lateral en FM tiene una diferencia de fase de $\pi/2$ con respecto a la portadora, mientras que el de AM está en fase con la portadora. El espectro $G(\omega) = (1/j\omega)F(\omega)$ y por lo tanto, si $F(\omega)$ está limitado en banda a ω_m, $G(\omega)$ también está limitado a ω_m. Así, una señal de FM de banda angosta (o MF de banda angosta) ocupa el mismo ancho de banda ($2\omega_m$) que una señal de AM. Recuérdese, sin embargo, que a pesar de las similitudes manifiestas, las señales de AM y FM tienen formas de onda muy diferentes. En una señal de AM, la frecuencia es constante y la amplitud varía con el tiempo mientras que, en una señal de FM, la amplitud es constante y lo que varía con el tiempo es la frecuencia.

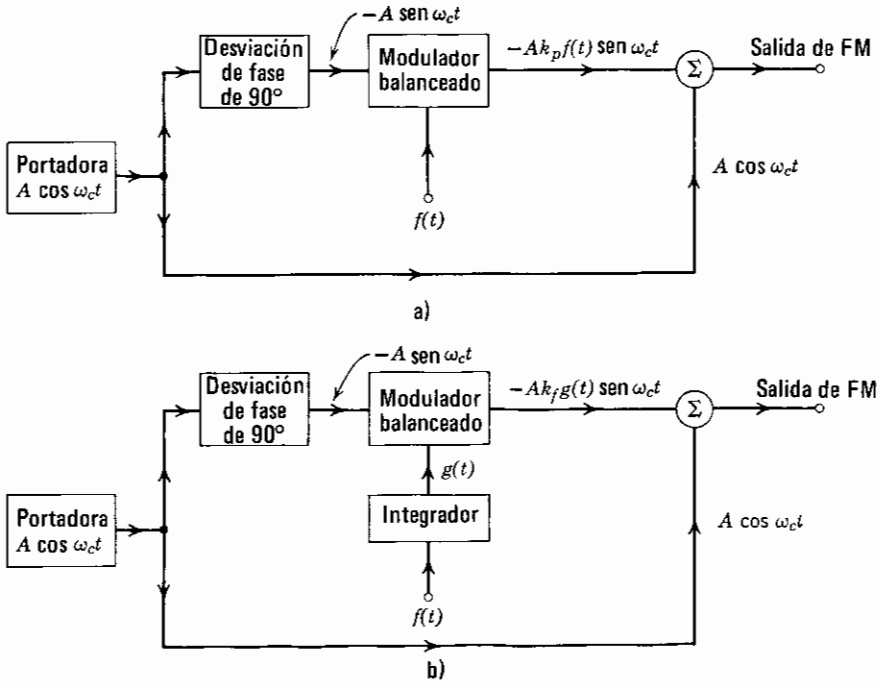


Figura 4.2 Generación de señales de MF y de FM de banda angosta mediante moduladores balanceados.

Las ecuaciones 4.13 y 4.14 sugieren un posible método para generar señales de FM y MF de banda angosta por medio de moduladores balanceados. En la figura 4.2 se ilustra el diagrama a bloques de tales sistemas.

4.2 FM DE BANDA ANCHA

Si las desviaciones de la frecuencia portadora son grandes, es decir, si se elige la constante k_f tan grande que no se satisfaga la condición $k_f g(t) \ll 1$,

el análisis de señales de FM se complica mucho al considerar una señal modulante general, $f(t)$. No es posible determinar una expresión precisa para el ancho de banda, debido a que FM es una modulación no lineal (véanse las secciones 4.3 y 4.5). Se obtendrá primero sobre bases heurísticas la expresión del ancho de banda de una señal de FM y, después, se verificará este resultado para algunas señales. Se demostrará a continuación que el ancho de banda W de una señal de FM está dado aproximadamente por

$$W = 2[k_f |f(t)|_{\text{máx}} + 2\omega_m] \qquad \text{(en rps)}$$

en donde ω_m es el ancho de banda de $f(t)$. Obsérvese que

$$\omega_i = \omega_c + k_f f(t)$$

Por lo que $k_f|f(t)|_{\text{máx}}$ representa la desviación máxima denotada por $\Delta\omega$, de la frecuencia de la portadora. En este caso el ancho de banda W es:

$$W = 2[\Delta\omega + 2\omega_m] \qquad \text{(en rps)} \qquad (4.18)$$

Para obtener este resultado, nos aproximamos a la señal mensaje mediante una señal en forma escalonada como la de la figura 4.3a. Si $f(t)$ está limitada en banda a f_m Hz, es razonable suponer que la señal es constante en un período de muestreo de Nyquist de $1/2f_m$ segundos. Siendo esta la aproximación, la portadora de FM constará de pulsos sinusoidales de frecuencia constante y duración de $1/2f_m$ segundos.

Obsérvese el cambio repentino de frecuencia en cada instante de muestreo. Tal pulso se representa en la figura 4.3b. Se puede obtener el espectro de cada pulso utilizando el par 13 (tabla 1.1B) y el teorema de modulación (véase también la figura 1.32). En la figura 4.3c se indica el espectro de un pulso típico. En ella puede verse que el espectro de este pulso ocupa la banda $\omega_i - 2\omega_m$ a $\omega_i + 2\omega_m$ en donde ω_i es la frecuencia del pulso sinusoidal. En este caso $\omega_i = \omega_c + k_f f(t_k)$ siendo t_k el instante k de muestreo. Entonces el espectro está en la región desde $\omega_c + k_f f(t_k) - 2\omega_m$ hasta $\omega_c + k_f f(t_k) + 2\omega_m$. Claramente, todo el espectro de FM quedará en el intervalo desde $\omega_c - k_f|f(t)|_{\text{máx}} - 2\omega_m$ hasta $\omega_c + k_f|f(t)|_{\text{máx}} + 2\omega_m$ y el ancho de banda está dado por

$$\begin{aligned} W &\simeq 2k_f\,|f(t)|_{\text{máx.}} + 4\omega_m \\ &= 2(\Delta\omega + 2\omega_m) \qquad \text{(en rps)} \end{aligned}$$

Para FM de banda ancha $\Delta\omega \gg \omega_m$ y $W \simeq 2\,\Delta\omega$. Por lo tanto, se concluye que el ancho de banda en FM es aproximadamente el doble de la desviación de frecuencia $\Delta\omega$. Este resultado es de esperarse; si la frecuencia de portadora ω_c tiene una desviación máxima $\Delta\omega$, entonces la frecuencia de la señal de FM varía desde $\omega_c - \Delta\omega$ hasta $\omega_c + \Delta\omega$. Así que una primera estimación es que esa señal contiene frecuencias dentro de este intervalo y por lo tanto el ancho de banda será $2\,\Delta\omega$.

Vamos a verificar esta conclusión en el caso de una señal modulante sinusoidal $f(t)$

$$f(t) = a \cos \omega_m t$$

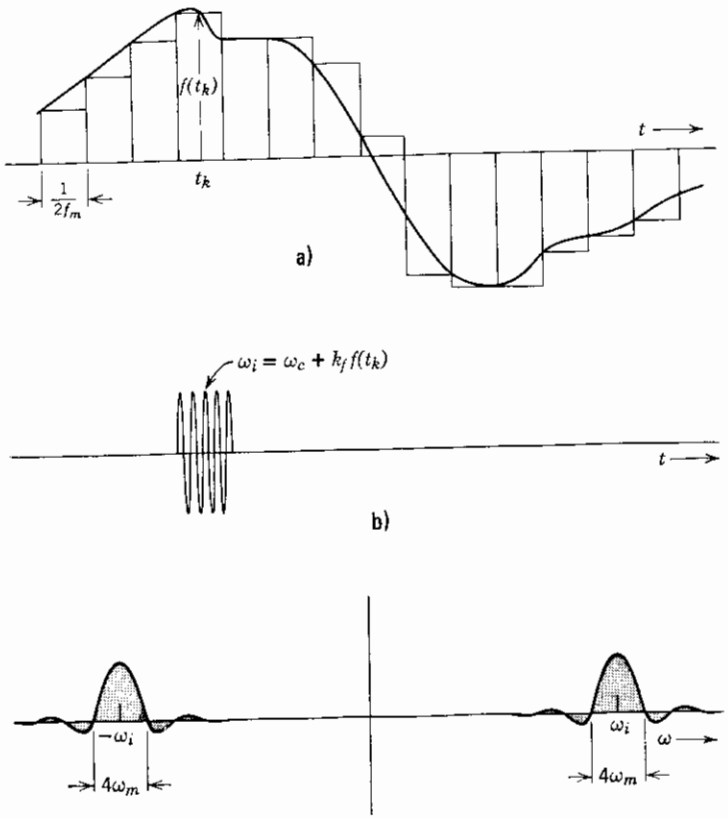


Figura 4.3

Supongamos que $f(t)$ se aplica en $t = 0$; entonces;

$$g(t) = \int f(t)\,dt = a\int_0^t \cos\,\omega_m t\,dt$$
$$= \frac{a}{\omega_m}\,\text{sen}\,\omega_m t \tag{4.19}$$

Puesto que la frecuencia instantánea ω_i está dada por (ecuación 4.6)

$$\omega_i = \omega_c + k_f f(t) = \omega_c + ak_f \cos\,\omega_m t \tag{4.20}$$

Por la ecuación 4.20, la máxima desviación de la frecuencia portadora es ak_f radianes por segundo:

$$\Delta\omega = ak_f \tag{4.21}$$

Substituyendo la ecuación 4.19 en la ecuación 4.10 y utilizando la ecuación 4.21, obtenemos

$$\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) = Ae^{j[\omega_c t + (\Delta\omega/\omega_m)\,\text{sen}\,\omega_m t]}$$

La cantidad $\Delta\omega/\omega_m$, relación entre la desviación máxima de la portadora y la señal de frecuencia ω_m, se llama *índice de modulación* m_f. Así pues,

$$\frac{ak_f}{\omega_m} = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = m_f \tag{4.22}$$

y

$$\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) = Ae^{j(\omega_c t + m_f\,\text{sen}\,\omega_m t)}$$
$$= Ae^{jm_f\,\text{sen}\,\omega_m t}e^{j\omega_c t} \tag{4.23}$$

El primer término exponencial de la ecuación 4.23 es obviamente una función periódica de período $2\pi/\omega_m$ que puede desarrollarse en serie de Fourier:

$$e^{jm_f\,\text{sen}\,\omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_m t}$$

en donde

$$C_n = \frac{\omega_m}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_m}^{\pi/\omega_m} e^{jm_f\,\text{sen}\,\omega_m t}e^{-jn\omega_m t}\,dt$$

Poniendo $\omega_m t = x$, obtenemos

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m_f\,\text{sen}\,x - nx)}\,dx$$

La integral del segundo miembro no se puede evaluar en forma cerrada; debe integrarse al desarrollar el integrando en una serie infinita. Esta integral ya se encuentra tabulada, y se denota por $J_n(m_f)$: es la función de Bessel de primera clase y de orden n.* En la figura 4.4a se muestran las gráficas de esta función. Así,

$$e^{jm_f\,\text{sen}\omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f)e^{jn\omega_m t} \tag{4.24}$$

Además, se puede demostrar que

$$J_n(m_f) = J_{-n}(m_f) \qquad n \text{ par}$$
$$J_n(m_f) = -J_{-n}(m_f) \qquad n \text{ impar} \tag{4.25}$$

Substituyendo la ecuación 4.24 en la 4.23, se tiene

$$\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) = Ae^{j\omega_c t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f)e^{jn\omega_m t}$$

* E. Jahnke y F. Emde, *Tables of Functions*, Dover Publications, New York, 1945.

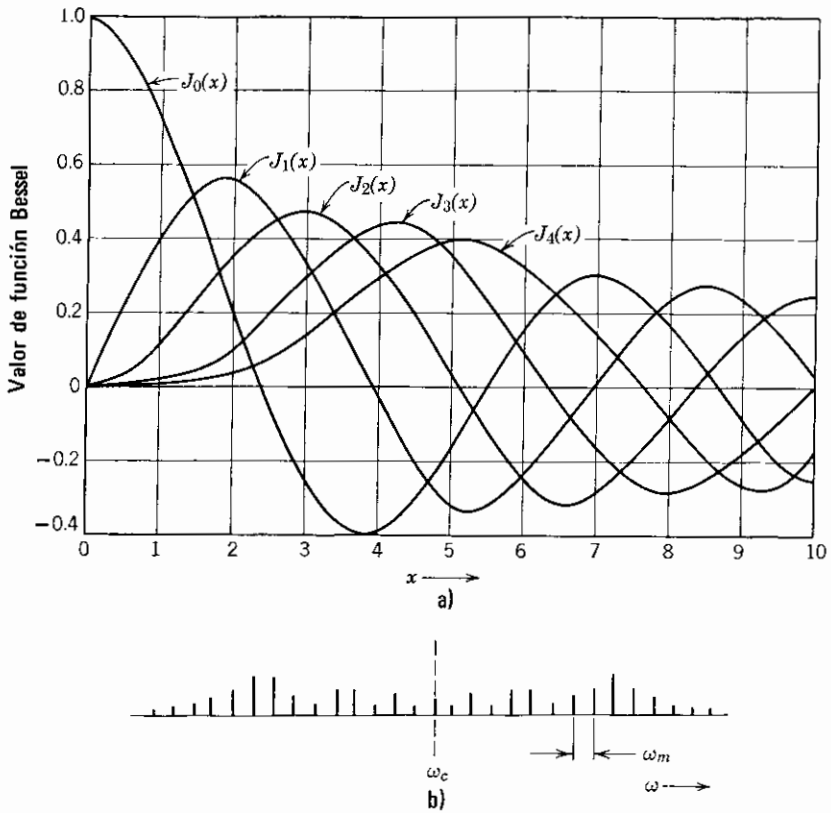


Figura 4.4 a) Función de Bessel de primera clase. b) Espectro de FM.

y

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f) \cos (\omega_c + n\omega_m)t \qquad (4.26a)$$

Si aprovechamos las propiedades de la ecuación 4.25, se puede expresar la ecuación 4.26a como

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{FM}}(t) = A\{&J_0(m_f) \cos \omega_c t + J_1(m_f)[\cos (\omega_c + \omega_m)t - \cos (\omega_c - \omega_m)t] \\ &+ J_2(m_f)[\cos (\omega_c + 2\omega_m)t + \cos (\omega_c - 2\omega_m)t] \\ &+ J_3(m_f)[\cos (\omega_c + 3\omega_m)t - \cos (\omega_c - 3\omega_m)t] \\ &+ \cdots + \cdots \end{aligned} \qquad (4.26b)$$

Aun cuando en la bibliografía comúnmente se emplea la ecuación 4.26b, se preferirá la ecuación 4.26a, que es más compacta.

Evidentemente, por la ecuación 4.26b, la señal modulante $f(t)$ de frecuencia ω_m da lugar a bandas laterales $(\omega_c \pm \omega_m)$, $(\omega_c \pm 2\omega_m)$, $(\omega_c \pm 3\omega_m), \ldots$, etc., como se ilustra en la figura 4.4b. Por lo tanto, una señal

de FM contiene un número infinito de componentes y su ancho de banda es infinito. Sin embargo, en la práctica, las amplitudes de las componentes espectrales de frecuencia superior son despreciables y la mayor parte de la energía de la señal de FM queda contenida en los componentes espectrales situados dentro de un ancho de banda finito. Esto se deduce fácilmente de la ecuación 4.4a. Para $m_f \ll 1$, sólo $J_0(m)$ y $J_1(m_f)$ tienen magnitudes significativas y las funciones de orden superior $J_2(m_f)$, $J_3(m_f), \ldots$, etc., resultan despreciables. En este caso, sólo tienen importancia las bandas laterales de primer orden. Esto corresponde, por supuesto, a la FM de banda angosta estudiada en la sección precedente.

Cuando $m_f = 2$, las funciones $J_5(2)$, $J_6(2), \ldots$, etc., tienen amplitudes despreciables y las componentes espectrales significativas en FM son ω_c, $\omega_c \pm \omega_m$, $\omega_c \pm 2\omega_m$, $\omega_c \pm 3\omega_m$ y $\omega_c \pm 4\omega_m$. El ancho de banda de las componentes significativas es $8\omega_m$. A medida que se incrementa m_f, las componentes de más alto orden adquieren importancia. Si se consideran como bandas laterales significativas aquellas cuya amplitud sea por lo menos el uno por ciento de la portadora no modulada, entonces, para todas las bandas laterales significativas, $J_n(m_f) > 0.01$. En la gráfica de las funciones de Bessel se indica el número de dichas bandas laterales en diferentes valores de m_f. Puede verse en tales gráficas, que $J_n(m_f)$ disminuye rápidamente cuando $n > m_f$. En general, $J_n(m_f)$ es despreciable para $n > m_f$. Esto es cierto sobre todo para valores de $m_f \gg 1$. Así pues, $m_f = n$ para FM de banda ancha en donde el número de bandas laterales significativas se puede considerar como el entero más cercano a m_f. El ancho de banda total W de la señal FM está dado por

$$W \simeq 2n\omega_m \simeq 2m_f\omega_m \qquad \text{(en rps)}$$

Pero

$$m_f = \frac{ak_f}{\omega_m} = \frac{\Delta\omega}{\omega_m}$$

Entonces

$$W \simeq 2m_f\omega_m = 2\,\Delta\omega \qquad \text{(en rps)} \qquad (4.27)$$

En realidad, $W = 2(\Delta\omega + 2\omega_m)$ es una expresión más exacta que $2\,\Delta\omega$. Por lo tanto, se tiene

$$W \simeq 2(\Delta\omega + 2\omega_m) \qquad (4.28)$$

Esta regla constituye una buena estimación en el caso de FM de banda ancha. Para sistemas de FM de banda angosta, donde $\Delta\omega \ll \omega_m$, el ancho de banda es aproximadamente $2\omega_m$ (el mismo que para AM, como se demostró en la sección 4.2); por eso, el ancho de banda requerido para la transmisión de una señal de FM es aproximadamente el doble de la máxima desviación de frecuencia de la portadora. En la figura 4.5 se ilustra la relación exacta entre la razón de W a $\Delta\omega$ y la desviación de la frecuencia de la portadora como función de m_f. A partir de esta figura resulta evidente que, para $m_f \gg 1$ el ancho de banda W es aproximadamente el doble de la desviación.

La Comisión Federal de Comunicaciones (FCC)* ha fijado en 75 KHz el máximo valor de Δf (desviación de frecuencia) para estaciones de FM de radiodifusión comercial. Por tanto, el ancho de banda requerido es aproximadamente 150 KHz.

Obviamente a partir de la figura 4.5, se deduce que, para FM de banda ancha, ($m_f \gg 1$) el ancho de banda necesario para transmitir tiende a $2\,\Delta\omega$ radianes por segundo o $2\,\Delta f$ Hz. Como

$$\Delta\omega = ak_f = m_f\omega_m$$

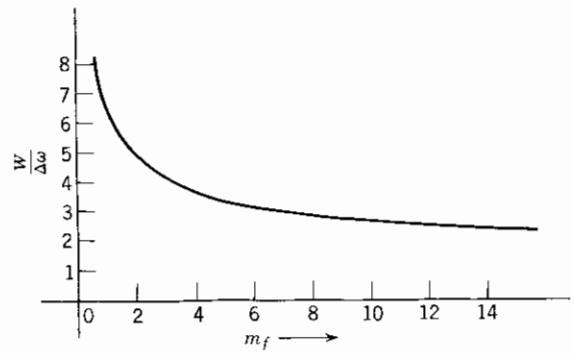


Figura 4.5 El ancho de banda de una señal de FM en función del índice de modulación. (De *Information Transmission, Modulation, and Noise*, por M. Schwartz, McGraw-Hill, New York, 1960.)

cuando crece m_f se incrementa proporcionalmente $\Delta\omega$, para un valor constante de ω_m. Esto se muestra en la figura 4.6a, donde ω_m es constante ($f_m = 5$ KHz), junto con los espectros de una señal de FM para $m_f = 1$, 2, 5 y 10 en los cuales las desviaciones de frecuencia (Δf) son respectivamente 5, 10, 25 y 50 KHz. Observe el lector que el ancho de banda es aproximadamente $2\,\Delta f$ para los valores más altos de m_f.

En la figura 4.6b se ilustra el caso de una desviación de frecuencia $\Delta\omega$ constante, cuando $m_f = \Delta\omega/\omega_m$ varía en función de ω_m. Aquí, $\Delta f =$ 75 KHz y m_f varía de 10 a 5 cuando f_m varía de 7.5 a 15 KHz. En cualquier caso, el ancho de banda B aproximado es

$$B \simeq 2\,\Delta f = 150 \text{ KHz}$$

4.3 MODULACION POR MULTIPLICIDAD DE FRECUENCIA

En la sección 4.2 se estudió el caso específico de una señal modulante de una sola frecuencia. A continuación ampliaremos el estudio al caso de multiplicidad de frecuencia. Primero se considerarán sólo 2 frecuencias, y

* Nota del traductor: Siglas inglesas de la Federal Communications Commission.

después se generalizarán los resultados a cualquier número de ellas. Considérese

$$\begin{aligned} f(t) &= a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t \\ \omega_i &= \omega_c + k_f f(t) \\ &= \omega_c + k_f(a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t) \end{aligned}$$

La máxima desviación de frecuencia es, obviamente,

$$\Delta\omega = (a_1 + a_2)k_f$$

y

$$\begin{aligned} \theta(t) = \int \omega_i\, dt &= \omega_c t + \frac{a_1 k_f}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t + \frac{a_2 k_f}{\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t \\ &= \omega_c t + m_1 \operatorname{sen} \omega_1 t + m_2 \operatorname{sen} \omega_2 t \end{aligned}$$

en donde

$$m_1 = \frac{a_1 k_f}{\omega_1} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \frac{a_2 k_f}{\omega_2}$$

También

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) &= Ae^{j\theta(t)} = Ae^{j(\omega_c t + m_1 \operatorname{sen}\omega_1 t + m_2 \operatorname{sen}\omega_2 t)} \\ &= Ae^{j\omega_c t}(e^{jm_1 \operatorname{sen}\omega_1 t})(e^{jm_2 \operatorname{sen}\omega_2 t}) \end{aligned} \tag{4.29}$$

Las exponenciales de los paréntesis son, obviamente, funciones periódicas con períodos respectivos $2\pi/\omega_1$ y $2\pi/\omega_2$. Estas exponenciales pueden representarse como serie de Fourier mediante funciones de Bessel (véase la ecuación 4.24). Entonces

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) &= Ae^{j\omega_c t}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_1)e^{jn\omega_1 t}\right]\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m_2)e^{jk\omega_2 t}\right] \\ &= A\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_n(m_1)J_k(m_2)e^{j(\omega_c + n\omega_1 + k\omega_2)t} \end{aligned} \tag{4.30}$$

y

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_n(m_1)J_k(m_2)\cos[(\omega_c + n\omega_1 + k\omega_2)t] \tag{4.31}$$

Este resultado indica que cuando $f(t)$ se compone de dos frecuencias ω_1 y ω_2, el espectro de FM contiene las bandas laterales $(\omega_c \pm n\omega_1)$ y $(\omega_c \pm k\omega_2)$ que corresponden a dichas frecuencias. Nótese el contraste entre este comportamiento y el observado en AM, donde cada nueva frecuencia de la señal modulante produce sus propias bandas laterales. No existen términos de modulación cruzada y, por eso, se dice que AM es una modulación lineal mientras que FM es una de modulación no lineal. Se tratará con más detalles el tema en la sección 4.5.

Los resultados para dos frecuencias obtenidos en esta sección pueden aplicarse al caso de un número cualquiera de ellas.

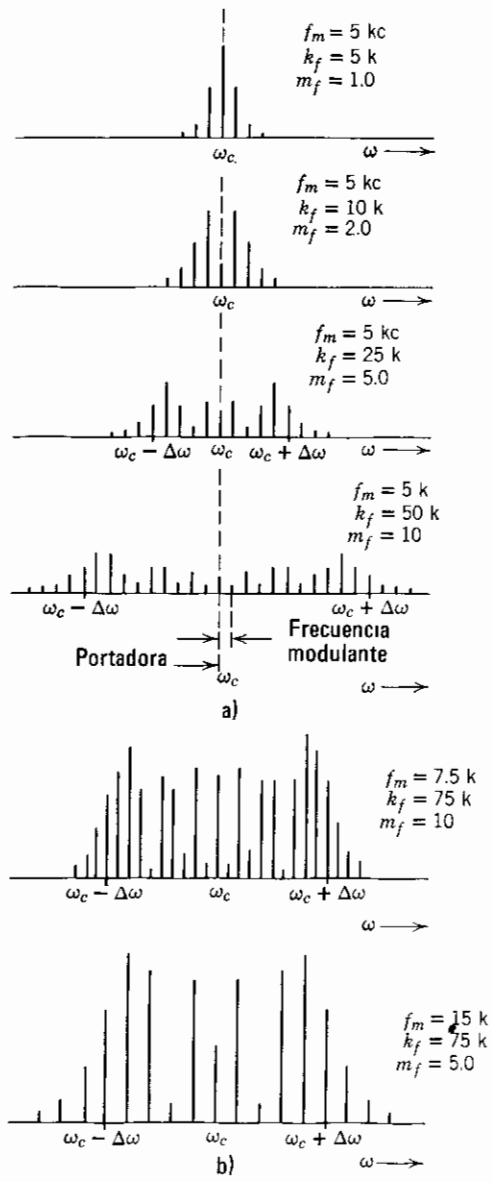


Figura 4.6

4.4 MODULACION CON ONDA RECTANGULAR

Se considerará aquí otro caso particular de FM en que la señal modulante $f(t)$ es una onda rectangular como la de la figura 4.7a. El método es muy general y aplicable a cualquier señal modulante periódica. Para una onda rectangular (figura 4.7a), la frecuencia instantánea de la señal de FM está dada por

$$\omega_i = \omega_c + k_f f(t)$$

y la fase $\theta(t)$ por

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \int \omega_i \, dt \\ &= \omega_c t + k_f \int f(t) \, dt \\ &= \omega_c t + \psi(t)\end{aligned}$$

en donde

$$\psi(t) = k_f \int f(t) \, dt$$

se muestra en la figura 4.7b. Esta es una función periódica triangular de período T.

Obsérvese que la desviación máxima $\Delta\omega$ de la frecuencia portadora en este caso es k_f pues $|f(t)|_{\text{máx}} = 1$. Por lo tanto,

$$k_f = \Delta\omega$$

y

$$\psi(t) = \begin{cases} (\Delta\omega)t & -\dfrac{T}{4} < t < \dfrac{T}{4} \\ (\Delta\omega)\left[\dfrac{T}{2} - t\right] & \dfrac{T}{4} < t < \dfrac{3T}{4} \end{cases} \tag{4.32}$$

y

$$\psi(t) = \psi(t \pm nT)$$

También

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) &= Ae^{j\theta(t)} \\ &= Ae^{j\psi(t)}e^{j\omega_c t}\end{aligned}$$

La función $e^{j\psi(t)}$ es por sí misma función periódica de período T y puede expresarse por medio de una serie de Fourier como

$$e^{j\psi(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_s t} \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

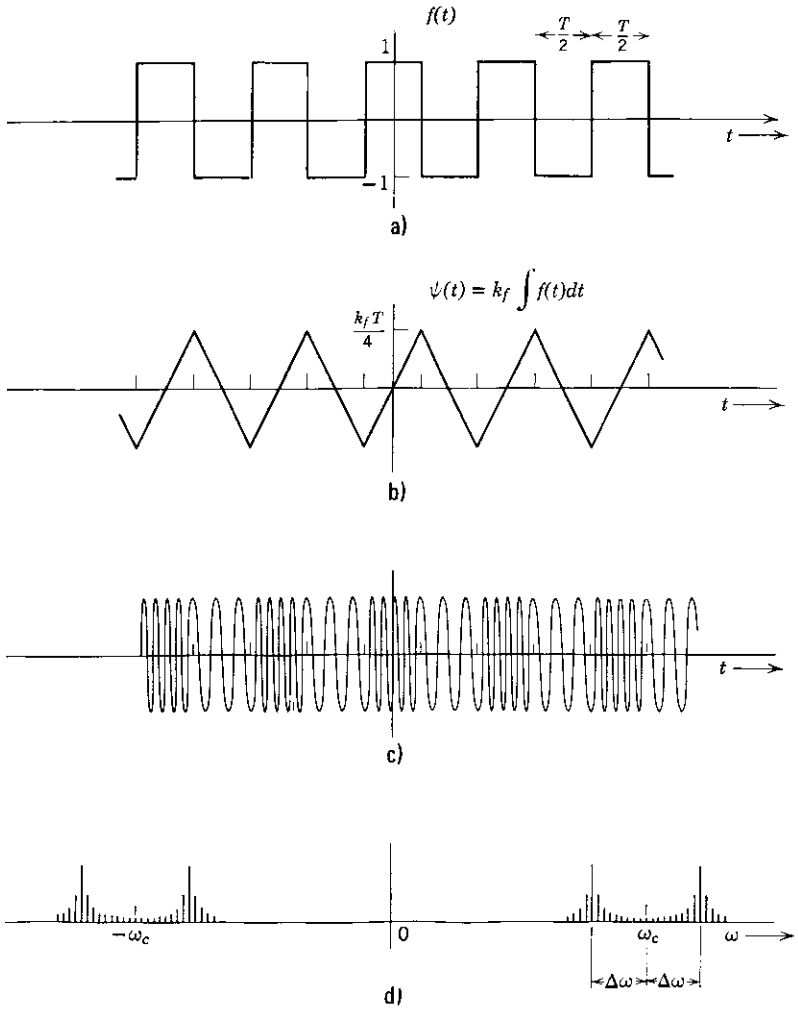


Figura 4.7

en donde

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{3T/4} e^{j\psi(t)}\, e^{-jn\omega_s t}\, dt$$

Substituyendo la ecuación 4.32 en esta ecuación e integrando,

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\left\{Sa\left[\frac{\pi}{2}(\beta - n)\right] + (-1)^n Sa\left[\frac{\pi}{2}(\beta + n)\right]\right\} \qquad (4.33)$$

en donde

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_s}$$

Por lo tanto,

$$\hat{\varphi}_{\mathrm{FM}}(t) = Ae^{j\psi(t)}e^{j\omega_c t}$$
$$= A\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{j(\omega_c + n\omega_s)t}$$

y

$$\varphi_{\mathrm{FM}}(t) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n \cos(\omega_c + n\omega_s)t$$

El espectro de frecuencia de $\varphi_{\mathrm{FM}}(t)$ se muestra en la figura 4.7d. El método que hemos explicado es general y puede aplicarse a cualquier señal modulante $f(t)$ periódica y con valor medio cero.

4.5 MODULACION LINEAL Y NO LINEAL

En el caso de las señales de AM, las bandas laterales se rigen por el principio de superposición. Así, pues, si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dan lugar a sendas bandas laterales φ_1 y φ_2, la señal compuesta $f_1(t) + f_2(t)$ producirá $\varphi_1 + \varphi_2$. No existe intermodulación o bandas laterales de producto cruzado como se observa en FM. Por esta razón AM se llama modulación del tipo lineal.*

La modulación lineal se presta a la manipulación matemática y la generalización. Se puede encontrar el espectro de una señal modulada con la suma de dos señales modulantes calculando el espectro individual de cada señal para sumarlos posteriormente. Esto es muy útil para calcular el ruido en sistemas de comunicación. En los sistemas lineales de modulación, el efecto del ruido presente en el canal puede calcularse suponiendo que la señal es cero. Esto no sucede con la modulación no lineal, en la que surgen términos de modulación cruzada. Por estas razones resulta interesante aproximarse a la modulación no lineal por medio de un modelo lineal. El caso es análogo al del análisis de un sistema no lineal aproximable por otro lineal en un rango limitado de amplitudes de señal. Se demostrará ahora que FM se comporta aproximadamente lineal para un índice de modulación pequeño.

Linealización de una señal de FM para un índice de modulación pequeño

Para un índice de modulación pequeño, FM presenta un comportamiento aproximadamente lineal. Considérese de nuevo el caso de una señal modulante $f(t)$ con 2 frecuencias ω_1 y ω_2. La señal de FM está dada por la ecuación 4.29. Si m_1 y $m_2 \ll 1$, entonces, para $f(t)$,

$$f(t) = a_1 \cos\omega_1 t + a_2 \cos\omega_2 t$$
$$\hat{\varphi}_{\mathrm{FM}}(t) \simeq A(1 + jm_1 \operatorname{sen}\omega_1 t)(1 + jm_2 \operatorname{sen}\omega_2 t)e^{j\omega_c}$$
$$\simeq A(1 + jm_1 \operatorname{sen}\omega_1 t + jm_2 \operatorname{sen}\omega_2 t)e^{j\omega_c t} \qquad (4.34)$$

* Una definición general de la modulación lineal es: La señal modulada es una función de la señal modulante $f(t)$. Sea $\varphi[f(t)]$ la señal modulada; entonces, la modulación es lineal si $\{d/d[f(t)]\}\{\varphi[f(t)]\}$ es independiente de $f(t)$. De no ser así, es una modulación no lineal. El lector puede verificar fácilmente, de acuerdo con esta definición, que AM es lineal y que FM no lo es.

Observe que si

$$f_1(t) = a_1 \cos \omega_1 t \qquad \text{y} \qquad m_1 \ll 1$$

entonces

$$\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) = Ae^{jm_1 \operatorname{sen} \omega_1 t} e^{j\omega_c t}$$
$$\simeq A[1 + jm_1 \operatorname{sen} \omega_1 t] e^{j\omega_c t}$$

Si

$$f_2(t) = a_2 \cos \omega_2 t \qquad \text{y} \qquad m_2 \ll 1$$

entonces

$$\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) \simeq A(1 + jm_2 \operatorname{sen} \omega_2 t) e^{j\omega_c t}$$

Es fácil ver que, bajo las condiciones m_1, $m_2 \ll 1$, las bandas laterales debidas a la señal modulante $f_1(t) + f_2(t)$ son la suma de las bandas laterales producidas individualmente por $f_1(t)$ y a $f_2(t)$. Por lo tanto, para un índice de modulación pequeño se puede suponer que FM es lineal. Con tal suposición, resultan despreciables los términos de modulación cruzada.

4.6 ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE LA MODULACION EN FASE

Se ha observado que, para las portadoras moduladas en ángulo, el ancho de banda de la señal resultante es aproximadamente el doble de la desviación máxima de la frecuencia portadora. Así, si la desviación se mantiene constante, el espectro de la señal modulada tiene un ancho de banda constante.

La frecuencia instantánea ω_i, para señales de FM, está dada por la ecuación 4.20

$$\omega_i = \omega_c + ak_f \cos \omega_m t$$

La desviación de la portadora es $\Delta\omega = ak_f$ y es independiente de la frecuencia ω_m de la señal modulante. Por lo tanto, para señales de FM, el ancho de banda es aproximadamente $2\Delta\omega = 2ak_f$. Por otra parte, para la modulación en fase,

$$\theta(t) = \omega_c t + ak_p \cos \omega_m t$$

y

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = \omega_c - ak_p \omega_m \operatorname{sen} \omega_m t \tag{4.35}$$

Evidentemente, por la ecuación 4.35, la desviación máxima en MF no es constante, sino que está dada por $ak_p\omega_m$ y varía linealmente con ω_m. Entonces, el ancho de banda necesario para la transmisión de una portadora modulada en ángulo no es constante y depende en grado considerable de la forma de onda de la señal modulante.

Sin embargo, en la práctica es más fácil generar una señal de MF que una señal de FM. Se demostró antes que para obtener FM, primero se integra la señal modulante y después se modula en fase la portadora. Por lo mismo, en muchos sistemas, se generan las señales de FM usando generadores de MF los cuales utilizan la señal integrada $[\int f(t)\,dt]$ para la modulación en fase.

4.7 CONTENIDO DE POTENCIA DE LA PORTADORA Y LAS BANDAS LATERALES EN PORTADORAS MODULADAS EN ANGULO

Se ha demostrado que la potencia total contenida en una portadora modulada en amplitud es función del índice de modulación m. En una portadora modulada en ángulo, su amplitud siempre es constante e independiente del índice de modulación m_f. Por lo tanto, es de esperar que la potencia de una portadora modulada en ángulo sea constante e independiente del grado de la modulación. Así sucede en realidad. Considérese la ecuación 4.26a:

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f) \cos (\omega_c + n\omega_m)t$$

Entonces, la señal de FM es función periódica expresada como suma discreta de componentes sinusoidales. La potencia de $\varphi_{\text{FM}}(t)$ es igual a la suma de las potencias de las componentes individuales.* Así,

$$\overline{\varphi_{\text{FM}}^2(t)} = \frac{A^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(m_f)$$

Puede demostrarse† que la suma del segundo miembro es 1 para todos los valores de m_f. Por lo tanto,

$$\overline{\varphi_{\text{FM}}^2(t)} = \frac{A^2}{2}$$

La potencia de la portadora sin modular cos $\omega_c t$ es también $A^2/2$; por lo tanto, la potencia de una señal de FM es igual a la correspondiente a la portadora sin modular; sin embargo, la señal modulada tiene componentes de portadora y de banda lateral, como lo expresa la ecuación 4.26b. En esta ecuación, $AJ_0(m_f)$ representa la amplitud de la componente portadora y $AJ_n(m_f)$ representa la amplitud de la banda lateral de orden n. Podemos reducir $J_0(m_f)$ hasta donde sea posible, si elegimos m_f adecuadamente. De hecho, $J_0(m_f) = 0$ para $m_f = 2.405$, 5.52, etc. (véase la figura 4.4a); por eso, la potencia en la componente de portadora puede hacerse tan pequeña como se desee. En tal situación, la mayor cantidad de potencia está contenida en las componentes de banda lateral. Así pues, mediante la elección adecuada de m_f, se puede tener una eficiencia de transmisión cercana al 100 %. Obsérvese que, a medida que m_f aumenta crece el número de bandas laterales y $J_0(m_f)$ disminuye, de manera que se incrementa la eficiencia de la transmisión.

* Esto se deduce del teorema de Parseval (ecuación 1.34).

† G. N. Watson, *Treatise on Theory of Bessel Functions*, p. 31. Cambridge, 1922.

4.8 CARACTERISTICAS DE REDUCCION DE RUIDO DE LA MODULACION ANGULAR

De lo estudiado anteriormente, es obvio que para una señal modulante dada, el ancho de banda necesario para transmitir una onda modulada en ángulo es mucho mayor que el requerido por una onda de AM. Por ejemplo, si f_m es de 10 KHz, entonces el ancho de banda de la onda de AM es de 20 KHz, mientras que para la onda de FM sería aproximadamente de 150 KHz para $\Delta f = 75$ KHz. Para la FM de banda angosta sería aproximadamente de 200 KHz. Bajo ninguna circunstancia el ancho de banda en FM sería menor a 20 KHz. Esto constituye definitivamente una gran desventaja del sistema de FM. Por esta razón, cuando se descubrió el sistema (alrededor de 1920),* se le atribuía poca utilidad práctica por mal aprovechamiento del espectro. Después, el Mayor Edwin H. Armstrong, un brillante ingeniero cuyas aportaciones al campo de sistemas de radio son comparables a las de Hertz y Marconi,† demostró que esto era falso.

En la actualidad, sabemos que FM produce una mejor discriminación del ruido y de señales interferentes. En el capítulo 7 se demostrará que la razón de señal a ruido se mejora en 6 db por cada incremento de uno a dos en la ocupación del ancho de banda. Con la FM de banda ancha, la reducción de interferencia del ruido en 30:1 (alrededor de 1000:1 en potencia) no presenta dificultad alguna. De la teoría de la comunicación se puede deducir la propiedad de reducción de ruido en los sistemas de FM. En el capítulo 8 se demostrará que, en general, se incrementa la razón de señal a ruido de una señal dada, al aumentar el ancho de banda. Por otra parte, si la razón tolerable es menor, entonces la señal puede transmitirse con un sistema de menor ancho de banda.

Debe recordarse que la propiedad de discriminación del ruido en modulación angular es significativa sólo cuando el ancho de banda requerido para transmitir es mayor, es decir, cuando k_f es grande. En FM de banda angosta, el ancho de banda necesario es el mismo que en AM y la mejoría en la razón de señal a ruido no es significativa.

4.9 GENERACION DE SEÑALES DE FM

Las señales de FM se pueden generar directamente al modular en frecuencia la portadora (FM directa) o integrar primero la señal modulante y modular después en fase la portadora (FM indirecta).

FM indirecta

Debido a la facilidad de generar señales de MF, éstas se utilizan con frecuencia para generar indirectamente ondas de FM. Puede verse fácilmente,

* J. Carson, "Notes on the Theory of Modulation", *Proc. I.R.E.*, 10, 57-64 (Feb. 1922).

† E. H. Armstrong, "A Method of Reducing Disturbances in Radio Signalling by a System of Frequency Modulation", *Proc. I.R.E.*, 24 (May 1936).

por la ecuación 4.8, que, si se alimenta una señal $\int f(t)\,dt$ a la entrada de un generador de MF, la salida es una señal de FM. Ya hemos usado este principio para generar FM de banda angosta (figura 4.2). El generador de FM ilustrado en la figura 4.2b es, esencialmente, un generador de MF de banda angosta al que se aplica una señal $\int f(t)\,dt$, para producir una onda de FM de banda angosta. Ahora bien, podemos convertir esta onda de FM en una señal de FM de banda ancha por medio de un multiplicador de frecuencia, un dispositivo no lineal que multiplica la frecuencia de la señal de entrada; por ejemplo, un dispositivo sencillo de ley cuadrática puede multiplicar la frecuencia por el factor 2. Para tal dispositivo, la entrada $e_i(t)$ y la salida $e_o(t)$ están relacionadas por

$$e_o(t) = [e_i(t)]^2$$

Si

$$e_i(t) = \varphi_{\text{FM}}(t) = \cos\left(\omega_c t + k_f \int f(t)\,dt\right)$$

entonces

$$e_o(t) = \cos^2\left(\omega_c t + k_f \int f(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(2\omega_c t + 2k_f \int f(t)\,dt\right)\right]$$

Es obvio que tanto la frecuencia portadora como el índice de modulación en la señal de salida, son el doble de los valores correspondientes de la señal de entrada. En general, si se utiliza un dispositivo de ley n-ésima la portadora y el índice de modulación se multiplicarían por n. Este es el llamado método indirecto de Armstrong (figura 4.8) para la obtención de FM de banda ancha a partir de un generador de MF de banda angosta.

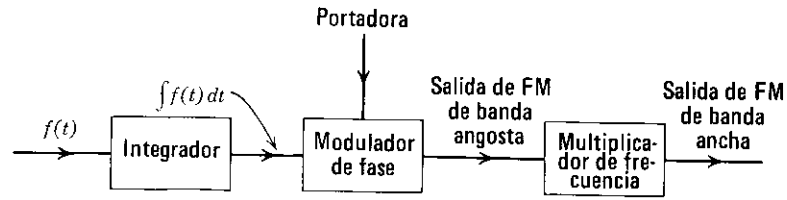


Figura 4.8 Representación en bloques de la generación indirecta de FM.

FM directa

Aquí la señal modulante hace variar directamente la frecuencia portadora. En general, se usan osciladores electrónicos y se hace variar, en proporción a $f(t)$, uno de los elementos reactivos (L o C) de los circuitos entonados que determinan la frecuencia. Si L y C son la inductancia y la capacitancia del circuito entonado del oscilador, la frecuencia de oscilación ω_i, es

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Si uno de los elementos L o C varía linealmente con $f(t)$ puede demostrarse que, para pequeñas variaciones, la frecuencia instantánea ω_i del oscilador cambia también en forma lineal, en proporción con $f(t)$. Supóngase que el capacitor C varía en función de $f(t)$ en la siguiente forma

$$C = C_0 + af(t) = C_0\left[1 + \frac{a}{C_0}f(t)\right]$$

y

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{LC_0}\left[1 + \frac{a}{C_0}f(t)\right]^{1/2}}$$

Si $(a/C_0)f(t) \ll 1$, entonces

$$\omega_i \simeq \frac{1}{\sqrt{LC_0}}\left[1 - \frac{a}{2C_0}f(t)\right]$$

$$= \omega_c + k_f f(t)$$

en donde

$$\frac{1}{\sqrt{LC_0}} = \omega_c \qquad \text{y} \qquad \frac{-a\omega_c}{2C_0} = k_f$$

Obviamente, la salida del oscilador es la señal de FM deseada. De manera semejante puede demostrarse que, si se mantiene C constante y L varía con $f(t)$, se puede obtener una señal de FM.

Modulador de diodo de reactancia

La reactancia variable puede obtenerse a partir de un circuito cuya impedancia terminal sea una reactancia proporcional a la señal modulante; por ejemplo, la capacitancia de un diodo con polarización inversa es función del voltaje en sus terminales. Al aplicar entonces la señal modulante de voltaje $f(t)$ a través de tal diodo con polarización inversa, se puede hacer variar la capacitancia de la unión de la manera deseada.

Modulador de reactor saturable

En un modulador de reactor saturable, el inductor varía en función de la onda modulante $f(t)$. La permeabilidad del núcleo de ferrita de tal reactor es función del campo magnético externo, el cual puede producirse haciendo pasar una corriente por otra bobina devanada sobre el núcleo. La corriente, proporcional a la señal modulante, pasa a través de esta bobina y causa una variación proporcional a $f(t)$ en la reactancia de la bobina principal. Este método para generar FM resulta muy conveniente debido a su simplicidad y al hecho de que, para la radiodifusión en FM, la desviación de frecuencia

requerida de ± 75 KHz se puede obtener de este dispositivo sin necesidad de multiplicación posterior de frecuencia.

Para el estudio de otras técnicas refiérase el lector a la obra de Panter.*

Modulador de tubo de reactancia

La impedancia terminal del llamado circuito con tubo de reactancia, cuyo diagrama esquemático se ilustra en la figura 4.9a, aparece como reactancia variable (inductiva o capacitiva) proporcional a la señal modulante $f(t)$. El circuito equivalente se muestra en la figura 4.9b. Como r_p generalmente es muy alta, puede despreciarse. De dicha figura, se tiene

$$I = g_m E_g + \frac{V_p}{Z_1 + Z_2} \tag{4.36}$$

y

$$E_g = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_p \tag{4.37}$$

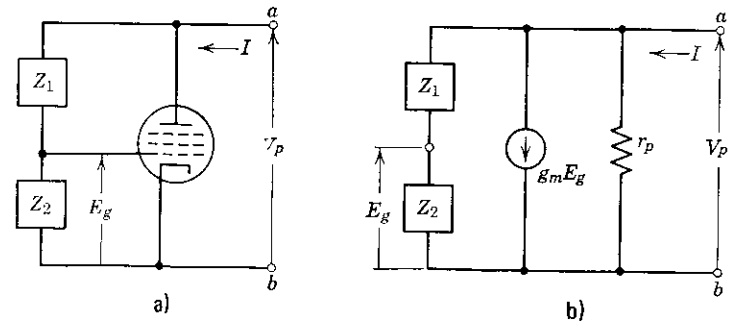


Figura 4.9

Substituyendo la ecuación 4.37 en la 4.36,

$$I = \left(\frac{g_m Z_2 + 1}{Z_1 + Z_2}\right) V_p$$

Por lo que, la admitancia Y_{ab}, vista a través de las terminales ab, es

$$Y_{ab} = \frac{I}{V_p} = \frac{1 + g_m Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Generalmente, $|g_m Z_2| \gg 1$, y si $Z_1 \gg Z_2$, entonces

$$Y_{ab} \simeq \frac{g_m Z_2}{Z_1}$$

* P. F. Panter, *Modulation Noise and Spectral Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1965.

La transconductancia g_m del tubo es función del voltaje de reja. Si se aplica a ésta una señal proporcional a $f(t)$,

$$g_m = g_{m_0} + bf(t)$$

y

$$Y_{ab} = \frac{[g_{m_0} + bf(t)]Z_2}{Z_1}$$

Por esta ecuación, es evidente que si hacemos $Z_1 = 1/j\omega C_1$ y $Z_2 = R$, entonces Y_{ab} representa la admitancia correspondiente a una capacitancia que varía en función del tiempo:

$$C = C_0 + \beta f(t)$$

En cada uno de estos casos, la frecuencia portadora y el índice de modulación se mantienen con un valor pequeño. El valor deseado de la portadora se puede obtener mediante la multiplicación y la traslación adecuada de frecuencia. La multiplicación de frecuencia también aumenta el índice de modulación m_f.

La modulación en frecuencia también puede obtenerse a partir de dispositivos controlados por voltaje tales como los klystrons y los multivibradores. En estos dispositivos, la frecuencia de oscilación puede controlarse al aplicar voltaje en determinados puntos. En el klystron reflex, la frecuencia de oscilación es una función del voltaje de reflector,* por lo que dicha frecuencia se puede modular aplicando $f(t)$ al reflector. En los multivibradores, se controla la frecuencia de oscilación por medio del voltaje en la terminal de control (la reja de control en los tubos de vacío o la base en un transistor).

4.10 DEMODULACION DE SEÑALES DE FM

Para recuperar la señal modulante $f(t)$ a partir de la señal modulada de FM, deberá disponerse de un circuito cuya salida varíe linealmente con la frecuencia de la señal de entrada. Por lo tanto, los detectores de FM son dispositivos sensibles a la frecuencia, y también se llaman *discriminadores de frecuencia.* En general, un discriminador de frecuencia consiste en un circuito cuya ganancia varía linealmente en función de la frecuencia. En esta forma, la señal de FM se convierte en una señal de AM por medio de este circuito sensible a la frecuencia. En consecuencia, la señal de AM resultante se demodula con un detector de envolvente usando un diodo y un circuito *R-C.*

En la figura 4.10 se representan varios tipos simples de discriminadores de frecuencia. En la figura 4.10a, el primer circuito *R-L* convierte la señal de FM en señal de AM, la cual se detecta mediante un diodo y un segundo circuito *R-C* (detector de envolvente). En la figura 4.10c, la señal de FM se convierte en una de AM por medio de un circuito entonado que opera ligeramente fuera de sintonía en ω_c, como se indica en la figura 4.10d. En el circuito entonado el voltaje varía en forma aproximadamente lineal con la

* H. A. Atwater, *Introduction to Microwave Theory,* McGraw-Hill, New York, 1962

frecuencia, como se ve en dicha figura. La señal de AM resultante se detecta mediante un detector de envolvente (figura 4.10c). El discriminador *R-L*

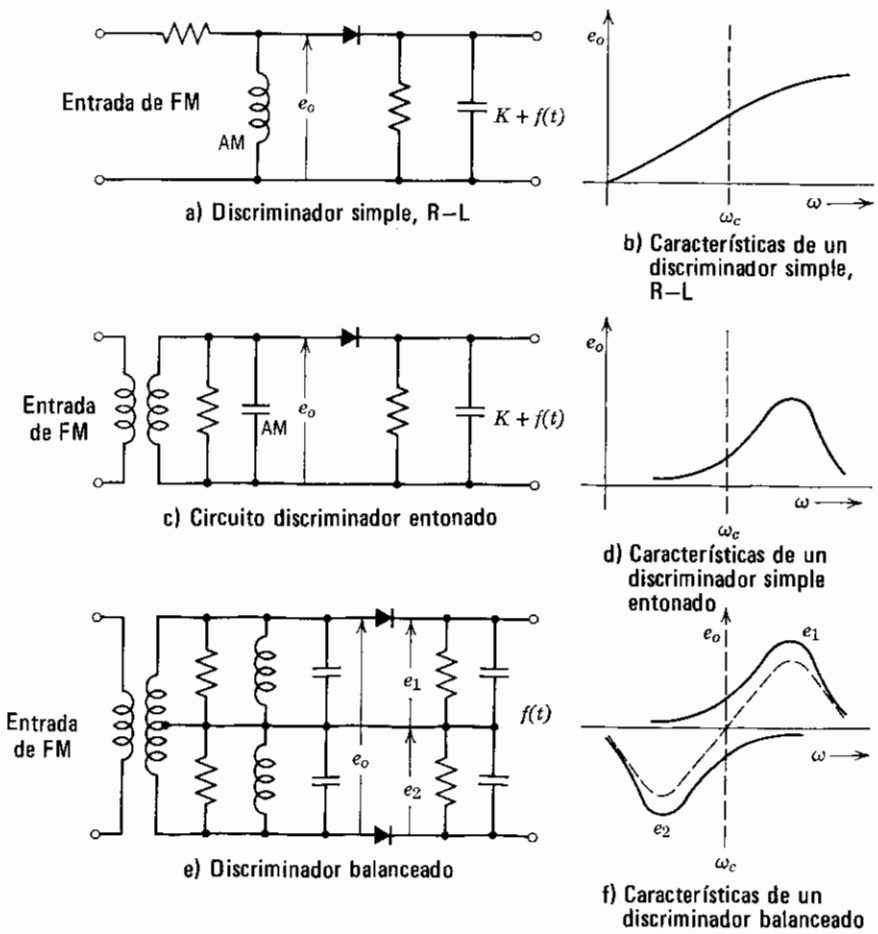


Figura 4.10

en la figura 4.10a tiene sensibilidad baja. El circuito simple entonado de la figura 4.10c tiene mayor sensibilidad pero sus características no son muy lineales con respecto a la frecuencia. El discriminador balanceado de la figura 4.10c tiene sensibilidad alta, así como buena linealidad; sus circuitos entonados superior e inferior se han sintonizado respectivamente en valores arriba y abajo de la frecuencia portadora.

En la figura 4.10f se muestran los voltajes e_1 y e_2 en función de la frecuencia. La salida resultante $e_o(t)$ se muestra mediante la línea punteada. Este discriminador proporciona una linealidad excelente en comparación con el simplemente entonado, debido a que se elimina la distorsión causada por las armónicas pares; además, cualquier distorsión procedente de la modu-

lación residual de amplitud, presente en la señal de FM de entrada, también queda eliminada por el balance del circuito.

PROBLEMAS

1. Si en la modulación (MF o FM) la señal modulante es una simple sinusoide ($A \cos \omega_m t$), demostrar que no existe manera alguna para determinar, a partir de la señal recibida, si ésta es de FM o de MF.

2. Una portadora de 10 MHz se modula en fase con una señal sinusoidal de 10 KHz y amplitud unitaria. La desviación máxima de fase es 10 radianes para la amplitud unitaria de la señal modulante. Calcular el ancho de banda aproximado de la señal de MF. Si la frecuencia de la señal modulante cambia a 5 KHz, encontrar el nuevo ancho de banda de la señal de MF. Si la frecuencia es la original (10 KHz), pero la amplitud se duplica, encontrar el ancho de banda de la señal de MF.

3. Una portadora de 100 MHz se modula en frecuencia con una señal sinusoidal de 10 KHz de manera tal que la desviación máxima de frecuencia es de 1 MHz. Determinar el ancho de banda aproximado de la señal de FM en este caso y en el caso de una amplitud doble de la señal modulante.

4. Una portadora de 100 MHz se modula en fase con una señal sinusoidal de 10 KHz mediante un modulador que tiene $k_p = 100$. Determinar el ancho de banda aproximado de la señal de MF si la señal modulante tiene amplitud unitaria, y también en los casos de amplitud y la frecuencia dobles.

5. Una señal modulante $a \cos \omega_m t$ modula en fase una portadora de alta frecuencia. La constante de desviación de fase es k_p (ecuación 4.8). Encontrar todas las relaciones posibles entre la máxima desviación de frecuencia $\Delta\omega$, la máxima desviación de fase $\Delta\varphi$, la constante de desviación de fase k_p, la frecuencia de la señal modulante ω_m y la amplitud a.

6. Una portadora de 10 MHz es modulada en fase por una señal sinusoidal de 10 KHz y de amplitud unitaria, siendo la desviación máxima de fase de 2 radianes; calcular el ancho de banda de la señal de MF. (Obsérvese que en este caso la desviación de frecuencia es muy pequeña, por lo que debería usarse la gráfica de la figura 4.5 para el cálculo del ancho de banda).

7. La ecuación siguiente representa una onda modulada en ángulo

$$\varphi(t) = 10 \cos (2 \times 10^6 \pi t + 10 \cos 2000\pi t)$$

Encontrar:

a) La potencia de la señal modulada.
b) La máxima desviación de frecuencia.
c) La máxima desviación de fase.
d) El ancho de banda.

Determinar si es una portadora modulada en frecuencia o en fase.

8. Se modula en frecuencia una portadora con señal sinusoidal $f(t)$. La constante de modulación $k_f = 30{,}000$. Encontrar la potencia contenida en la portadora y la potencia total contenida en todas las bandas laterales en cada uno de los casos siguientes:

a) $f(t) = \cos 5000t$
b) $f(t) = 2 \text{ sen } 2500t$
c) $f(t) = \frac{1}{2} \cos 2500t$
d) $f(t) = 2.405 \cos 30{,}000t$
e) $f(t) = 10 \text{ sen } (1000t + \theta)$
f) $f(t) = 5.52 \text{ sen } (30{,}000t + \varphi)$

9. Bosquejar las portadoras de FM y MF cuando la señal modulante $f(t)$ es como la de la figura P 4.9.

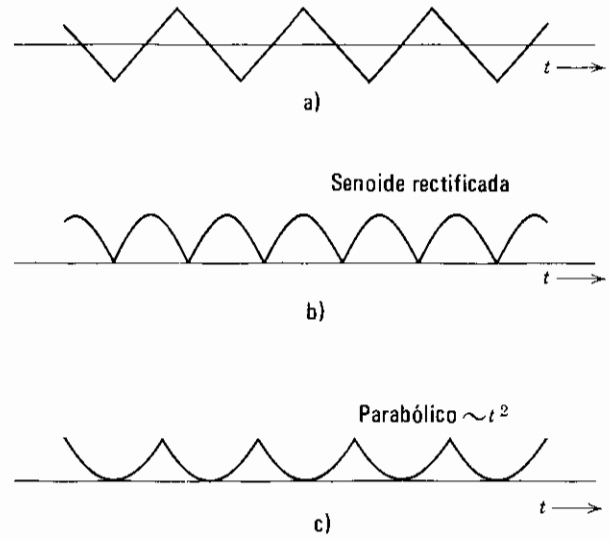


Figura P-4.9

10. En cada una de las señales periódicas modulantes de la figura P-4.9, encontrar el espectro de la portadora de FM así como la potencia contenida en la portadora y en las bandas laterales.

11. En cada una de las señales modulantes de la figura P-4.9, encontrar el espectro de la señal de MF.

12. Una portadora de 100 MHz se modula en fase con la señal $f(t)$, representada en la figura P 4.12. La constante k_p del sistema modulante es 10^6. *a*) Bosquejar la portadora modulada. *b*) Encontrar y bosquejar el espectro de la portadora modulada, si

1) $A = 2 \times 10^{-3}$ $\quad T = 2 \times 10^{-3}$
2) $A = 10^{-3}$ $\quad T = 2 \times 10^{-3}$
3) $A = 2 \times 10^{-3}$ $\quad T = 10^{-3}$
4) $A = 10^{-3}$ $\quad T = 10^{-3}$

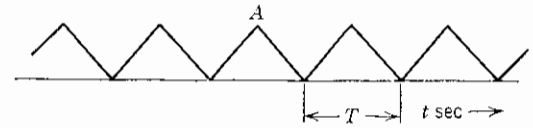


Figura P-4.12

CAPITULO 5

Sistemas de comunicación: Modulación por impulsos

El teorema de muestreo estudiado en la sección 1.16 proporciona las bases teóricas para las técnicas de modulación por pulsos. Se demostró que una señal de banda limitada, sin componentes espectrales de frecuencia superior a f_m Hz, queda completamente especificada mediante sus valores en intervalos uniformemente espaciados de $1/2f_m$ segundos. En lugar de transmitir la señal en forma continua sólo es necesario transmitirla en un número finito de instantes ($2f_m$ por segundo). La información de la muestra puede transmitirse por modulación de pulsos. A continuación se estudiarán varias formas de este tipo de modulación.

5.1 MODULACION POR AMPLITUD DE PULSOS

En este tipo de modulación se transmiten pulsos cuya amplitud varía en proporción a los valores muestrales. Considérese, por conveniencia, la transmisión de muestras ideales (impulsos) como se indica en la figura 5.1. Las muestras se localizan a intervalos de $1/2f_m$ segundos. Según se observó en la sección 1.16, el espectro de la señal muestreada $f_s(t)$ está dado por la repetición periódica del espectro de $f(t)$, es decir, de $F(\omega)$ (figura 5.1e). Evidentemente, por la figura 5.1e, se puede recuperar $f(t)$ de la señal muestreada $f_s(t)$ al transmitir $f_s(t)$ a través de un filtro de paso bajo con frecuencia de corte f_m. El espectro de $f_s(t)$ es $F_s(\omega)$ dado por la ecuación 1.136:

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$T \leqslant \frac{1}{2f_m}$$

La figura 5.1 muestra el caso de $T = 1/2f_m$ (intervalo de Nyquist). En este caso, $\omega_0 = 2\omega_m$ y

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - 2n\omega_m) \qquad T = \frac{\pi}{\omega_m} \tag{5.1}$$

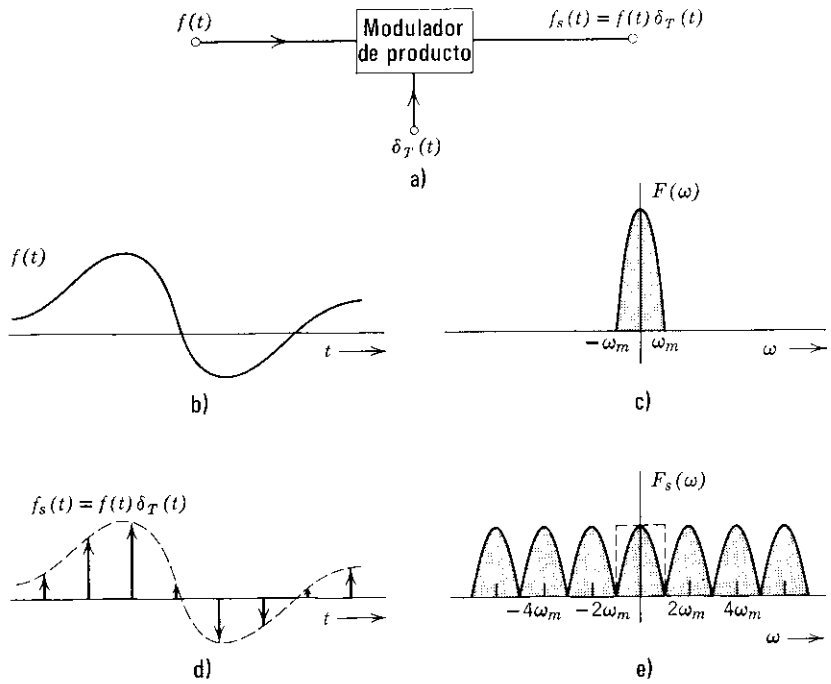


Figura 5.1

Muestreo natural

En el proceso que se acaba de mencionar se muestrea en ciertos instantes la función $f(t)$ con impulsos (muestreo instantáneo). De la figura 5.1e se ve que el espectro de tal señal, muestreada en forma ideal, ocupa todo el ancho de banda (de $-\infty$ a ∞), es decir, contiene componentes de todas las frecuencias. Sin embargo, en la práctica no se puede efectuar tal muestreo ideal pues no es posible generar verdaderos impulsos. En general, el muestreo se efectúa por medio de pulsos muy angostos de duración finita, por lo cual dicho muestreo no es instantáneo sino que ocurre en intervalos de tiempo finitos. Se investigará ahora el efecto de tal tipo de muestreo.

Supongamos que se muestrea con pulsos rectangulares periódicos de τ segundos de duración, repetidos cada T segundos. Denotaremos este tren de pulsos por $p_\tau(t)$ (figura 5.1c). Se tomará el intervalo de muestreo T como el intervalo de Nyquist, $1/2f_m$ segundos. En la figura 5.1d se ilustra el espectro $P_\tau(\omega)$ del tren de pulsos (ecuación 1.103, figura 1.34). La señal muestreada $f_s(t)$ es el producto de $f(t)$ y $P_\tau(t)$; entonces, $F_s(\omega)$, el espectro de $f_s(t)$, se obtiene de la convolución de $F(\omega)$ con $P_\tau(\omega)$, cuya obtención resulta fácil en forma gráfica, con el resultado mostrado en la figura 5.2f. Con el

muestreo no ideal se produce un espectro similar al del muestreo ideal de $f(t)$, pero con amplitud decreciente. Se puede obtener el mismo resultado analíticamente. En este caso, se tiene

$$f_s(t) = f(t)p_\tau(t)$$

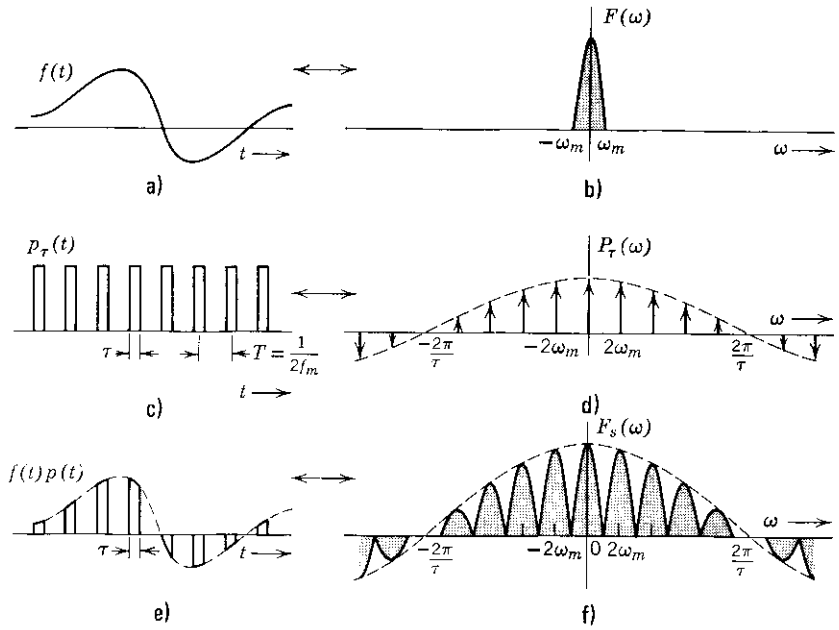


Figura 5.2 Modulación por pulsos (muestreo no ideal).

Entonces

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P_\tau(\omega) \tag{5.2}$$

De la ecuación 1.103 se deduce:

$$T = \frac{1}{2f_m} = \frac{\pi}{\omega_m}$$

y

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\omega_m$$

$$P_\tau(\omega) = 2A\tau\omega_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(n\tau\omega_m)\,\delta(\omega - 2n\omega_m) \tag{5.3}$$

Substituyendo la ecuación 5.3 en la 5.2 se obtiene

$$F_s(\omega) = \frac{A\tau\omega_m}{\pi} F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(n\tau\omega_m)\,\delta(\omega - 2n\omega_m)$$

$$= \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(n\tau\omega_m) F(\omega) * \delta(\omega - 2n\omega_m)$$

$$= \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(n\tau\omega_m) F(\omega - 2n\omega_m) \qquad (5.4)$$

Por la ecuación 5.4, el segundo miembro representa el espectro de $F(\omega)$ repetido cada $2\omega_m$ radianes por segundo con una variación de amplitud dada por $Sa(n\tau\omega_m)$; por consiguiente, esta ecuación representa el espectro de la figura 5.2f. Obsérvese que no es necesario que los pulsos de muestreo sean rectangulares, como los de la figura 5.2c. Es posible representar todas las muestras por cualquier otro tipo de pulsos $q(t)$; esto sólo causará una variación en la forma de la envolvente del espectro $F_s(\omega)$ de la figura 5.2f. [La envolvente se denotaría por $Q(\omega)$, la transformada de Fourier de $q(t)$.]

Por lo tanto, el muestreo no ideal de $f(t)$ resulta en una repetición de su espectro cuyas amplitudes van disminuyendo. La señal original puede recuperarse de la señal muestreada $f_s(t)$ usando un filtro de paso bajo con frecuencia de corte ω_m. El proceso de demodulación para la modulación por pulsos (muestreo no ideal) es el mismo que el de la modulación por impulsos (muestreo ideal). Nótese que, aun con el muestreo no ideal, se puede recuperar la señal sin distorsión alguna. El ancho de banda necesario para transmitir una señal muestreada en forma ideal (modulación por impulsos) es infinito, mientras que el necesario para la modulación por pulsos es finito, pues el espectro $F_s(\omega)$ (figura 5.2f) decrece en función de la frecuencia y el contenido de energía es despreciable en frecuencias superiores.

A medida que la duración de los pulsos aumenta, el espectro decae mas rápidamente y se reduce el ancho de banda necesario para transmitir. Por lo tanto, la modulación por pulsos (muestreo no ideal) es mejor que la modulación por impulsos (muestreo ideal). Sin embargo, la ventaja obtenida en el dominio de frecuencia se pierde en el dominio del tiempo. En la modulación por pulsos se precisa un mayor intervalo de tiempo para transmitir la señal muestreada que en la modulación por impulsos. Como los pulsos tienen una duración finita, sólo es posible transmitir simultáneamente un número finito de señales bajo la base de tiempo compartido (multicanalización por división de tiempo) mientras que, en el caso de la modulación por impulsos, es posible transmitir cualquier número de señales. El tipo de modulación por pulsos descrito se llama modulación por amplitud de pulsos (MAP), debido a que la señal muestreada representa en esencia el tren periódico de pulsos cuya amplitud es modulada por $f(t)$.

La señal muestreada recién explicada puede expresarse como el producto de $f(t)$ y un tren uniforme de pulsos:

$$f_s(t) = f(t) q_\tau(t)$$

$$= f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(t - nT)$$

en donde $q(t)$ representa los pulsos básicos de muestreo. Este muestreo se llama muestreo natural.

Muestreo instantáneo

En el muestreo natural se multiplica cada pulso de muestreo por $f(t)$ en el intervalo correspondiente; en consecuencia, cada pulso en la señal muestreada $f_s(t)$ tiene diferente forma de onda. Esto es obvio en la figura 5.2e, donde la parte superior de cada pulso toma la forma de la onda modulante $f(t)$ en el intervalo correspondiente. En cambio, considérese el muestreo instantáneo en el que todos los pulsos de la señal muestreada tienen la misma forma, pero con amplitudes proporcionales a los valores de las muestras correspondientes (figura 5.3). Obviamente, este tipo de señal de

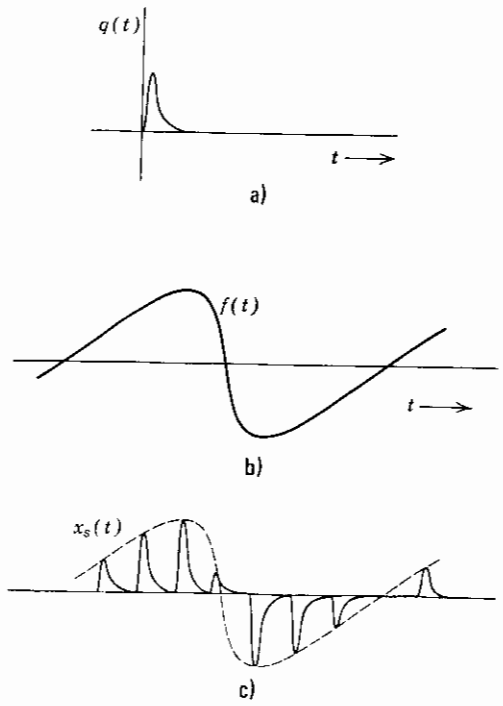


Figura 5.3

muestreo lleva la información de todas las muestras y, por lo tanto, contiene toda la información de $f(t)$ (siempre y cuando el intervalo de muestreo sea menor que $1/2f_m$ segundos). Nótese que el muestreo natural (figura 5.2) lleva la información de $f(t)$ que corresponde a la duración de cada pulso de muestreo mientras que en el muestreo instantáneo la información de $f(t)$ queda contenida sólo en los instantes de muestreo. Por eso se considera instantáneo este tipo de muestreo. Nótese que cabe considerar el muestreo con tren de impulsos (figura 5.1) natural o instantáneo.

Considérese que el pulso básico utilizado tiene una forma arbitraria $q(t)$ como se ve en la figura 5.3a. La señal muestreada se denotará por $x_s(t)$. Así, para el muestreo instantáneo,

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)q(t - nT) \tag{5.5}$$

Obsérvese que se ha reservado la notación $f_s(t)$ para cuando $f(t)$ está muestreada con un tren de impulsos unitarios.

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\delta(t - nT) \tag{5.6}$$

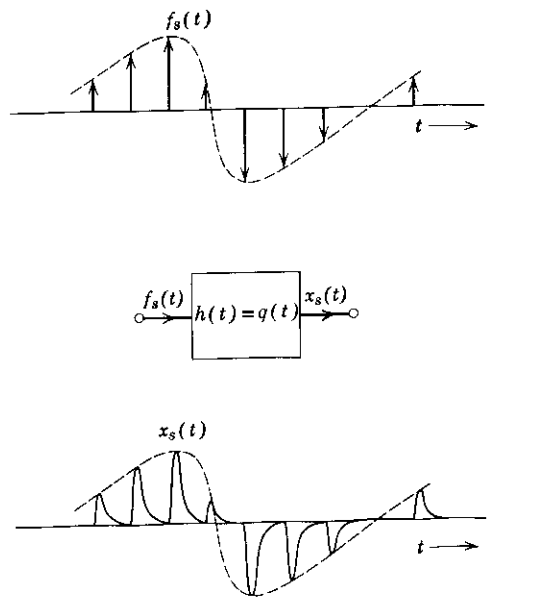


Figura 5.4

Vamos a encontrar el espectro de $x_s(t)$ para una forma arbitraria de pulso $q(t)$. Esto se deduce fácilmente del hecho de poder obtener $x_s(t)$ a partir de un sistema cuya respuesta al impulso unitario sea $q(t)$ y cuya señal de entrada sea la $f_s(t)$ de la ecuación 5.6 (o la figura 5.1d). Esto se indica en la figura 5.4. Así pues, si

$$q(t) \leftrightarrow Q(\omega)$$

entonces

$$x_s(t) \leftrightarrow F_s(\omega)Q(\omega)$$

Usando la ecuación 5.1 se obtiene

$$x_s(t) \leftrightarrow \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q(\omega)F(\omega - 2n\omega_m) \qquad T = \frac{\pi}{\omega_m} \tag{5.7}$$

De la ecuación 5.7, es evidente que el espectro de la función muestreada $x_s(t)$ se compone de la repetición periódica de $F(\omega)$, multiplicada por el espectro de $q(t)$ que es $Q(\omega)$. En la figura 5.5 se representa el caso de pulsos con la parte superior plana.

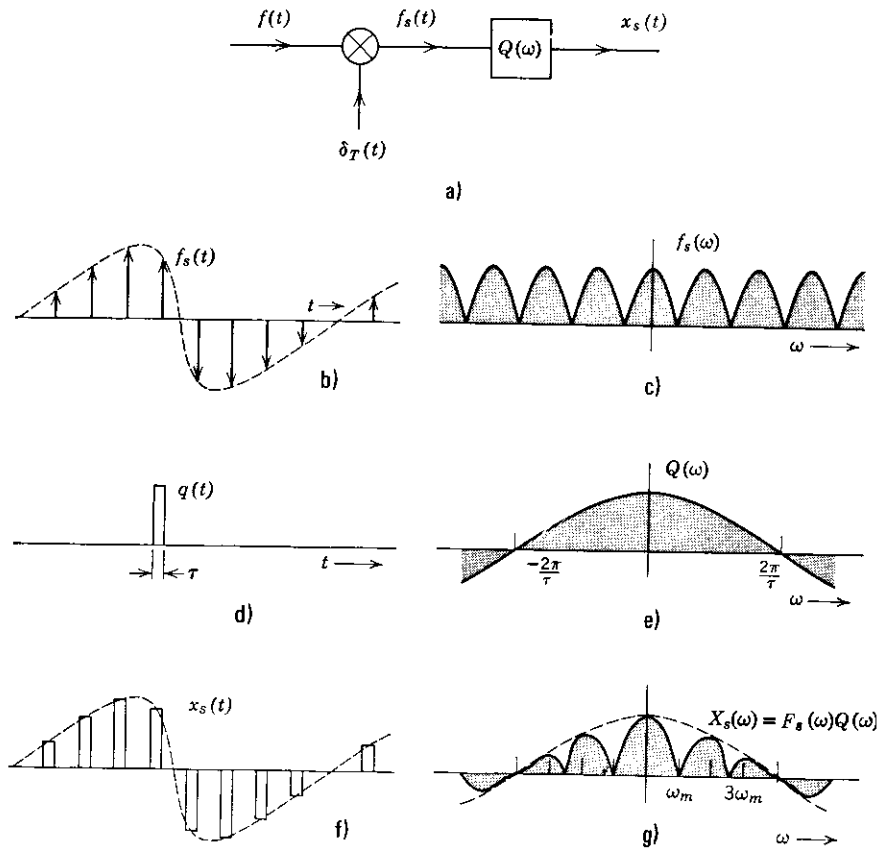


Figura 5.5

Nótese que el $X_s(\omega)$ [espectro de $x_s(t)$] en la figura 5.5g no es el mismo de la figura 5.2f, aun cuando pudiera parecerlo superficialmente. El espectro de la figura 5.2f consta de $F(\omega)$ repetido periódicamente con una disminución de amplitudes, sin perder su forma en cada ciclo. Por otra parte, como se indica en la figura 5.5g, $F(\omega)$ pierde su forma original y queda ponderada por el factor $Q(\omega)$. Para cada frecuencia existe un factor diferente; por eso, ninguno de los ciclos de la figura 5.5g tiene la forma de $F(\omega)$. Esto se deduce claramente de las ecuaciones 5.4 y 5.7. En la ecuación 5.4, el factor $Sa(n\tau\omega_m)$ es constante en un ciclo dado mientras que, según la ecuación 5.7, el factor $Q(\omega)$ es función de la frecuencia.

Recuperación de $f(t)$ del muestreo instantáneo

El espectro de la función muestreada $x_s(t)$ (figura 5.5g) es una forma distorsionada de $F(\omega)$, como fue el caso del muestreo natural (figura 5.2f). (Esto siempre es válido, excepto en el muestreo con un tren de impulsos.) Por lo tanto, no es posible recuperar $F(\omega)$ usando solamente un filtro de paso bajo cuyo espectro de salida sea $F(\omega)Q(\omega)$ si la frecuencia de corte fuera ω_m. Puede recuperarse la señal deseada $f(t)$ de la salida, haciéndola pasar por otro filtro con función de transferencia $1/Q(\omega)$ (figura 5.6a). Obsérvese que, como $F(\omega)$ es de banda limitada a ω_m radianes por segundo, será suficiente que el segundo filtro tenga una función de transferencia $1/Q(\omega)$ en el intervalo $(0, \omega_m)$. Fuera de este intervalo puede elegirse cualquier forma conveniente para el diseño. Se pueden combinar ambos filtros para formar un solo filtro compuesto cuya respuesta se muestra en la figura 5.6b. Evidentemente, la función de transferencia $H(\omega)$ será $1/Q(\omega)$ en el intervalo $(0, \omega_m)$ y cero fuera del mismo; por lo tanto $H(\omega)$ puede expresarse así:

$$H(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{Q(\omega)} & |\omega| < \omega_m \\ 0 & \text{De otra manera} \end{cases} \tag{5.8}$$

Cuando el pulso $q(t)$ es extremadamente angosto tiende a una función impulso y $Q(\omega)$ tiende a aplanarse; en otras palabras, $Q(\omega)$ tiende a volverse constante en el intervalo $(0, \omega_m)$. En tal caso, el filtro compuesto de la figura 5.6b se reduce a un filtro ideal de paso bajo con frecuencia de corte ω_m y la recuperación de $f(t)$ es idéntica a la correspondiente al caso de muestreo natural. Esto es de esperarse, pues si $q(t)$ es muy angosto, tiende a un impulso y la situación se aproxima a la del muestreo con un tren de impulsos.

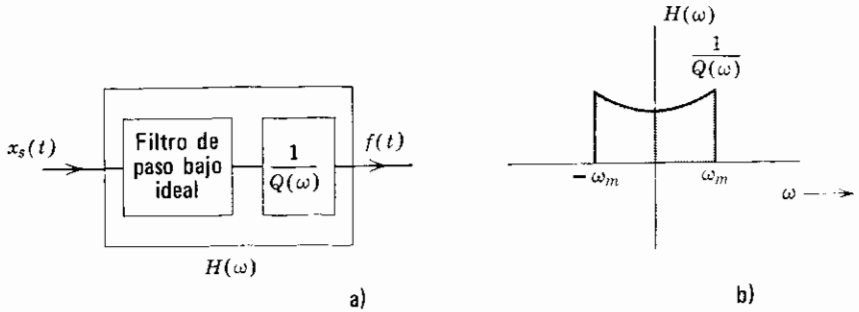


Figura 5.6

También se puede recuperar $f(t)$ a partir de $x_s(t)$, si se multiplica $x_s(t)$ por un tren de impulsos $\delta_T(t)$. Obviamente, esto produce $f_s(t)$, como se ilustra en la figura 5.7. Se puede, entonces, recuperar la señal $f(t)$ a partir de $f_s(t)$ mediante un filtro ideal de paso bajo.

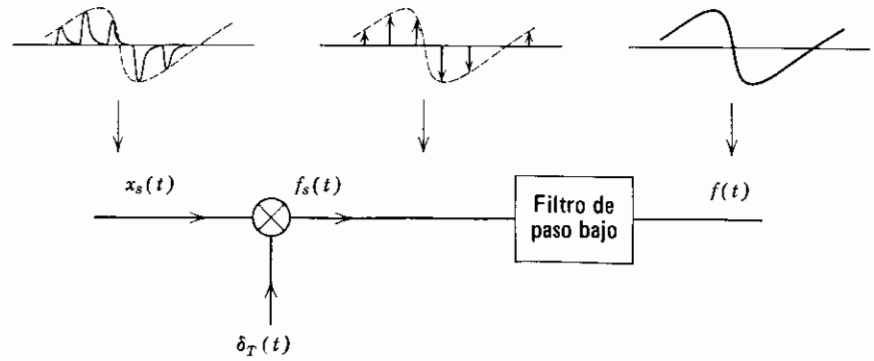


Figura 5.7

Transmisión de señales MAP

La señal de MAP puede transmitirse directamente por medio de un par de hilos. Las ondas electromagnéticas en el espacio libre no son capaces de transmitirla directamente, pues el espectro de MAP está concentrado en las frecuencias más bajas, lo que requeriría de antenas grandes, poco prácticas. Por lo tanto, el espectro se traslada a una frecuencia más alta por medio de una de las técnicas de modulación en amplitud estudiadas anteriormente. La señal se demodula en el receptor, retrasladando el espectro a su posición original. La salida del demodulador es el tren de pulsos $f_s(t)$, que pasa a través de un filtro de paso bajo para recuperar $f(t)$. Tales sistemas se llaman sistemas de MAP/AM.

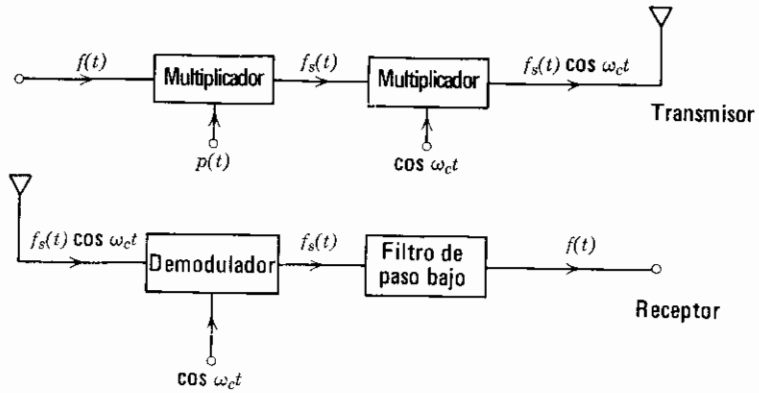


Figura 5.8 Representación en diagrama a bloques de MAP/AM.

El espectro de las señales de MAP también puede trasladarse con técnicas de modulación angular. En tal caso, los sistemas se conocen como de MAP/FM o de MAP/MF. En la figura 5.8 se representa a bloques el sistema MAP/AM.

5.2 OTRAS TECNICAS DE MODULACION POR PULSOS

Para transmitir una señal $f(t)$, se precisa información sobre sus valores a intervalos de $1/2f_m$ segundos; lo importante es notar que no es necesario transmitir la señal de banda limitada en forma continua, sino que la información completa de tales señales puede transmitirse mediante valores discretos. Tal información discreta se puede transmitir de varias maneras una de las cuales (MAP) se trató en la sección 5.1.

En las señales de MAP, la información va en la amplitud de los pulsos. Esta amplitud se podría mantener constante y variar la duración de los pulsos en proporción a los valores de $f(t)$ en los instantes correspondientes. El sistema se conoce como modulación por duración de pulsos (MDP). También se puede transmitir la información, con amplitud y duración constantes y cambiando su posición en proporción a los valores-muestras de $f(t)$ en los instantes correspondientes. Tal sistema se llama modulación por posición de pulsos (MPP). En la figura 5.9 se ilustran señales de MAP, MDP y MPP para una onda $f(t)$.

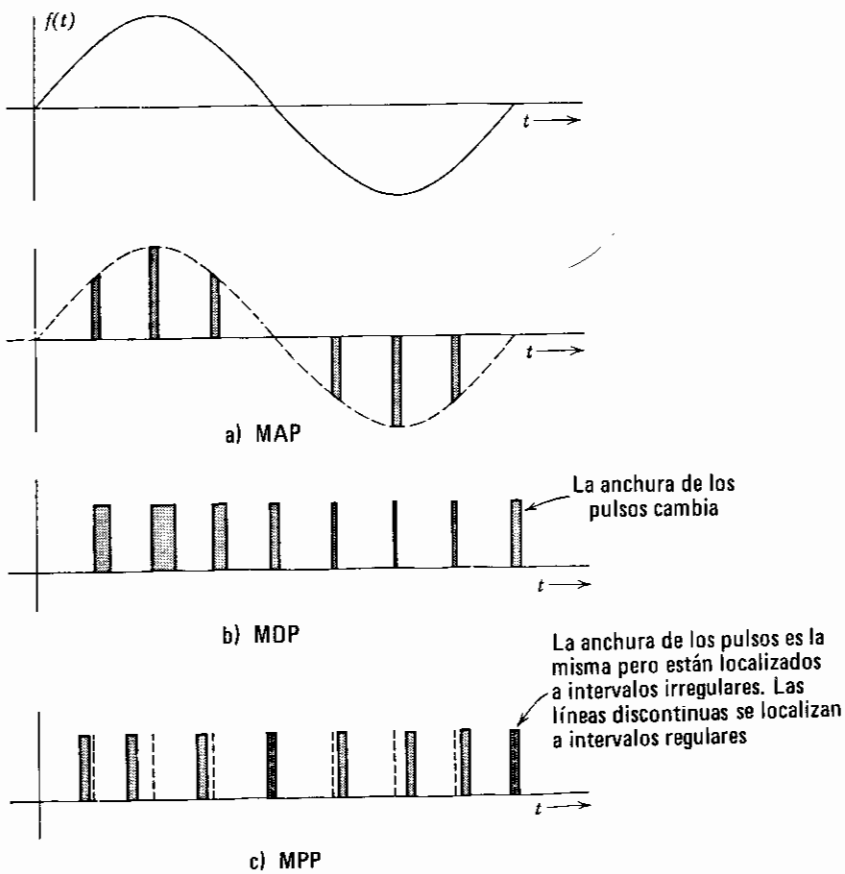
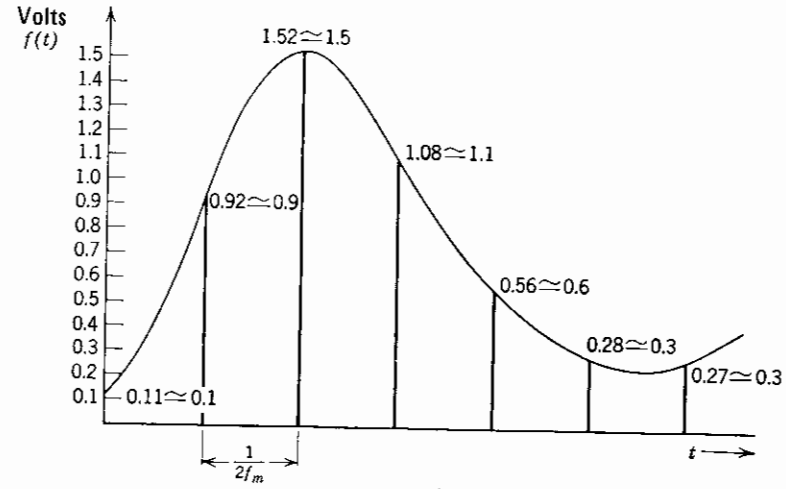

f(t)
t
a) MAP
La anchura de los pulsos cambia
b) MDP
La anchura de los pulsos es la misma pero están localizados a intervalos irregulares. Las líneas discontinuas se localizan a intervalos regulares
c) MPP

Figura 5.9 Representación de señales de MAP, MDP y MPP.

Otra forma importante de modulación por pulsos es la modulación por pulsos codificados (MPC). En este sistema, cada valor-muestra de $f(t)$ se transmite en la forma de un código formado por un patrón de pulsos. Se muestrea la señal $f(t)$ a transmitir, aproximándose cada muestra al nivel permitido más cercano, como se ve en la figura 5.10a. En este caso, se



Dígito	Equivalente binario	Forma de onda de pulsos codificados
0	0000	
1	0001	
2	0010	
3	0011	
4	0100	
5	0101	
6	0110	
7	0111	
8	1000	
9	1001	
10	1010	
11	1011	
12	1100	
13	1101	
14	1110	
15	1111	

b)

Figura 5.10 *b*) Una forma posible de código de pulsos.

tienen 16 niveles permitidos a intervalos de 0.1 volt, y se representa cada nivel de voltaje por un patrón de pulsos (figura 5.10b). Así pues, en lugar de transmitir muestras individuales se transmite un patrón de pulsos.

En el ejemplo se usaron pulsos binarios (que pueden tomar dos valores) y se pueden utilizar en general pulsos con capacidad de tomar más valores, con lo cual se necesitan menos pulsos por muestra. Así, en MPC, en lugar de un pulso (como en MAP) se transmite un grupo de pulsos por muestra. Por lo tanto, en MPC se necesita más intervalo de tiempo para transmitir la misma información que otros sistemas de modulación. Sin embargo, la desventaja queda compensada por su propiedad de ser más inmune a la interferencia. Para recibir una señal MPC sólo es preciso saber de la existencia o no existencia del pulso, sin importar su amplitud o forma. Así pues, cualquier interferencia externa que tienda a introducir una distorsión de altura o duración de los pulsos no tendrá influencia alguna en las señales de MPC. (Este tópico se estudiará ampliamente en el capítulo 7).

5.3 MULTICANALIZACION POR DIVISION DE TIEMPO

El teorema de muestreo permite transmitir la información completa de una señal continua limitada en banda, sin enviar más que muestras de $f(t)$ tomadas a intervalos regulares. Ya que la transmisión de estas muestras ocupa el canal sólo durante una parte del tiempo, existe la posibilidad de transmitir varias señales bajo la base de tiempo compartido. Esto se logra al muestrear todas las señales a transmitir y al intercalar las muestras, como se ilustra en la figura 5.11 en el caso de dos señales. En el receptor se separan las muestras de cada señal con técnicas adecuadas. Se describirán brevemente los aspectos más importantes de un sistema transmisor y receptor de multicanalización por distribución de tiempo.

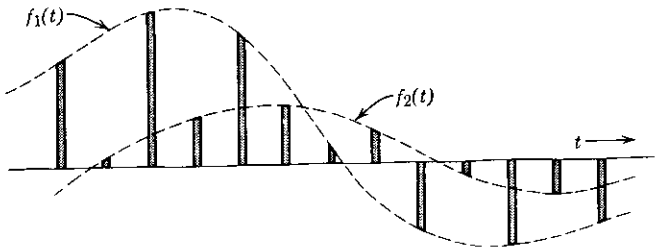


Figura 5.11 Multicanalización en tiempo de dos señales.

En la figura 5.12 se indica el diagrama a bloques de tal sistema. En el transmisor, un conmutador se conecta sucesivamente de canal en canal, controlado por un circuito de tiempo. Esta conmutación y la generación de los pulsos están en sincronía; por lo tanto, la salida del circuito de muestreo consta de muestras intercaladas de todas las señales. Se usa otro circuito de tiempo en el receptor, en sincronía con el del transmisor, para conectar el

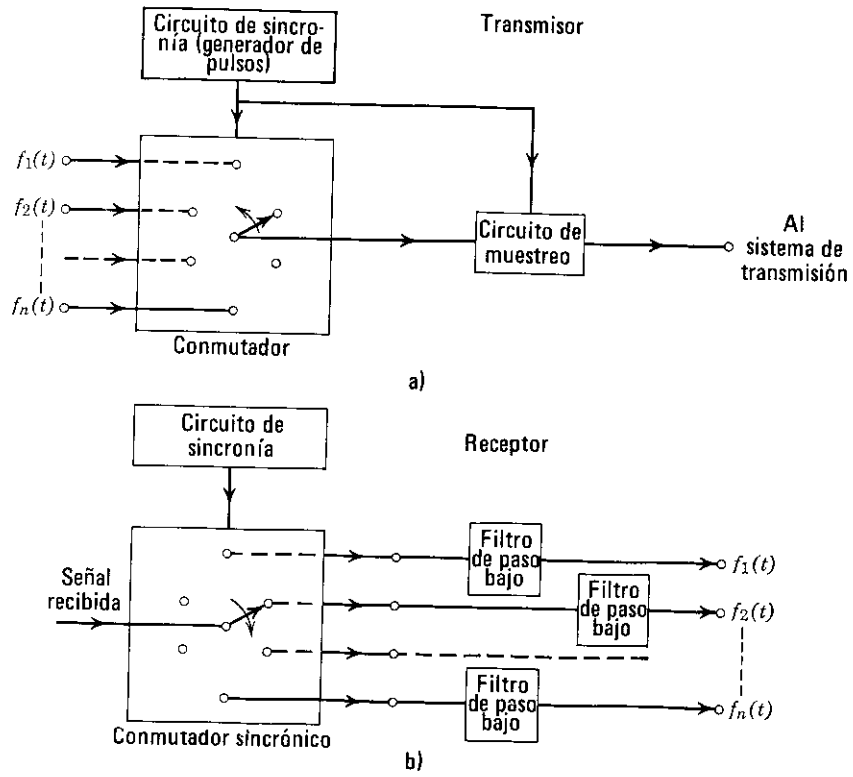


Figura 5.12 Multicanalización en tiempo de n canales.

conmutador a los diferentes canales,* con lo que se logra separar adecuadamente las muestras de las diferentes señales. Mediante un filtro de paso bajo se recupera en cada canal la señal deseada.

Rapidez de muestreo

Si se desea que las muestras de una señal de banda limitada lleven la información completa de la señal, entonces la rapidez de muestreo nunca debe ser menor que $2f_m$ muestras por segundo. Esta rapidez mínima de muestreo ($2f_m$ muestras por segundo) es la llamada rapidez de Nyquist.

Es obvio que la rapidez de Nyquist resulta en una repetición del espectro de la señal, sin sobreposiciones y sin intervalo alguno entre ciclos sucesivos, como se ve en la figura 5.13a. Por lo tanto, para recuperar la señal $f(t)$ de la señal muestreada es necesario usar un filtro ideal de paso bajo que permita transmitir sin atenuación las frecuencias $\omega < \omega_m$, y atenuar aquellas componentes de frecuencia superior a ω_m. La realización práctica de un filtro de paso bajo con características de corte abrupto requiere de un gran nú-

* Para los detalles de tal arreglo de conmutación, véase M. Schwartz, *Information Transmission, Modulation and Noise*, Chapter 4. McGraw-Hill, New York, 1959.

mero de elementos. Con una rapidez de muestreo mayor que la de Nyquist, es posible reducir la severidad de las condiciones impuestas para diseñar tales filtros. Puede verse fácilmente que, en tales condiciones, el muestreo resulta en repetir el espectro de la señal con intervalos libres (*banda de resguardo*) entre ciclos sucesivos, como se ilustra en la figura 5.13b. De la figura se deduce que se puede recuperar la señal original, a partir de la señal muestreada, con un filtro de paso bajo que no requiera una característica de corte muy pronunciada.

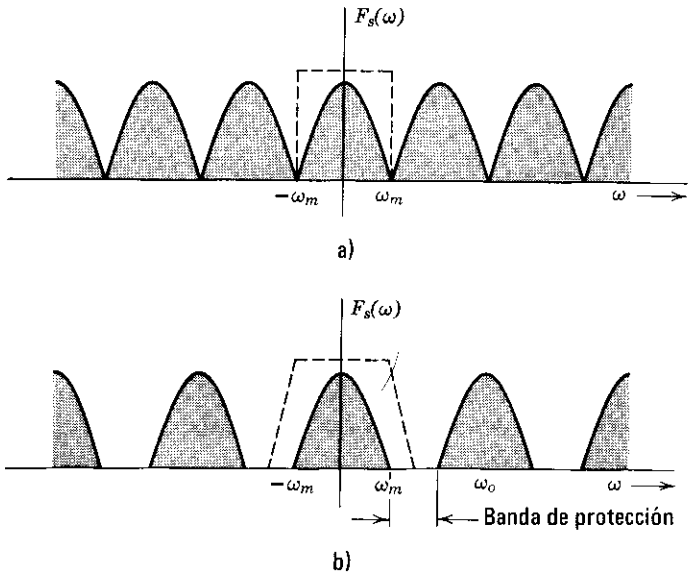


Figura 5.13 Espectro de una señal muestreada.

En multicanalización por división de frecuencia se plantea algo semejante. Por las razones mencionadas, los espectros de varias señales están separados por una banda de resguardo. En la multicanalización por división de tiempo las muestras de las diferentes señales se encuentran intercaladas; si su separación es muy pequeña, se le deben imponer requisitos muy severos al sistema del receptor que separa las muestras de las varias señales. Por lo tanto, las muestras de las señales sucesivas también se separan por un pequeño intervalo de tiempo llamado *tiempo de resguardo.*

5.4 REQUISITOS DE ANCHO DE BANDA PARA LA TRANSMISION DE SEÑALES DE MAP

Para comparar el sistema MAP y otros, es importante conocer el ancho de banda necesario para la transmisión. Como se ve en las figuras 5.1e, 5.2f o 5.5f, el espectro de una señal de MAP contiene frecuencias en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$. Se requerirá entonces un ancho de banda infinito para

transmitir una señal de MAP; sin embargo, se demostrará que toda la información contenida en las muestras puede transmitirse en un ancho de banda finito.

Para la multicanalización en tiempo de n señales continuas, cada una de banda limitada a f_m Hz, es necesario transmitir $2f_m$ muestras por segundo por señal. Por lo tanto, han de transmitirse $2nf_m$ pulsos por segundo en el caso de n señales. Se demostrará ahora que la información de estos $2nf_m$ pulsos puede transmitirse en un ancho de banda de nf_m Hz.

A primera vista podría parecer que se necesita un ancho de banda infinito para la transmisión de señales de MAP, debido a que se transmiten pulsos rectangulares con un espectro que ocupa todo el rango de frecuencia. Sin embargo, debe recordarse que realmente no interesa la forma de dichos pulsos sino su altura. Cualquier distorsión en la forma del pulso no es importante, siempre y cuando se mantenga una cierta altura.

La salida del sistema multicanal consiste de $2nf_m$ pulsos por segundo, originados por cada una de las n señales, a un ritmo de $2f_m$ muestras por segundo. Es necesario ahora conocer el ancho de banda para transmitir $2nf_m$ muestras de información diferentes por segundo. Se deduce del teorema de muestreo que una señal continua limitada en banda a B Hz puede transmitirse mediante $2B$ muestras por segundo de dicha señal.* Inversamente, enunciamos que $2nf_m$ muestras independientes por segundo definen una señal continua limitada en banda a nf_m Hz. Consideremos que estas $2nf_m$ muestras corresponden a alguna señal continua $\varphi(t)$ limitada a nf_m Hz. En efecto, por la ecuación 1.140, tal señal puede formarse a partir del conocimiento de esas muestras. Por lo tanto, en lugar de transmitir las $2nf_m$ muestras por segundo, se transmite la señal continua correspondiente $\varphi(t)$ y, puesto que está limitada en banda a nf_m Hz, el ancho de banda requerido será nf_m Hz.

Se debe obtener $\varphi(t)$ a partir de las $2nf_m$ muestras por segundo. Los pulsos discretos son muestras de $\varphi(t)$, así que, de acuerdo con lo anterior, se puede obtener esta señal transmitiendo los pulsos a través de un filtro de paso bajo con frecuencia de corte nf_m Hz.

Sean $\varphi_s(t)$ la señal representada por $2nf_m$ pulsos por segundo y $\Phi_s(\omega)$ su espectro, o sea, una repetición periódica de $\Phi(\omega)$. En la figura 5.14 se ilustran las señales $\varphi(t)$ y $\varphi_s(t)$ así como sus espectros. Este resultado es muy significativo y se volverá a emplear en capítulos subsecuentes; sin embargo, se debe recordar que, si se desea reproducir la forma del pulso así como su altura, entonces el ancho de banda habrá de ser mayor que nf_m Hz.

Es interesante observar que el ancho de banda necesario para transmitir directamente n señales de MAP por distribución de tiempo es nf_m, el mismo para transmitir estas n señales mediante la multicanalización por distribución de frecuencia AM-BLU; sin embargo, ya se indicó que la transmisión

* Obsérvese que un número de muestras mayor a $2B$ por segundo no es independiente. Un máximo de $2B$ muestras son independientes y las muestras restantes pueden expresarse en términos de las $2B$ muestras independientes, como se deduce fácilmente de la ecuación 1.140. Se puede expresar la información completa de la señal en términos de un mínimo de $2B$ muestras por segundo; por lo tanto, las muestras restantes siempre pueden expresarse en términos de estas $2B$ muestras por segundo.

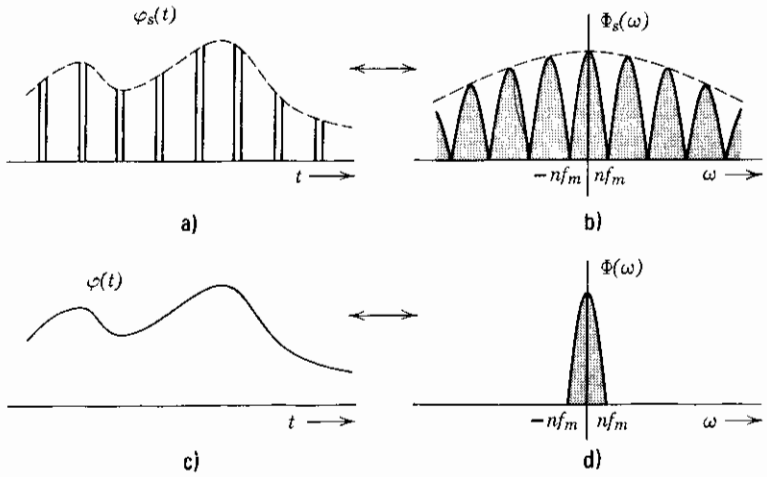


Figura 5.14

directa de señales de MAP por radiación no resulta conveniente ya que, como la energía de tales señales se concentra en las frecuencias más bajas, se necesitan sistemas radiadores de tamaños poco prácticos. En tales casos, todo el espectro de la señal de MAP se traslada a frecuencias más altas por medio de la modulación en amplitud, para obtener lo que se llama una señal de MAP/AM.

El proceso de la modulación en amplitud produce bandas laterales superior e inferior, por lo cual se duplica el ancho de banda. Así, se precisa un ancho de banda de $2nf_m$ Hz para transmitir una señal de MAP/AM por distribución de tiempo de n señales continuas, cada una limitada en banda a f_m Hz. Se debe observar que el ancho de banda necesario para transmitir las mismas n señales en multicanalización por distribución de frecuencia (AM-DBL) es también de $2nf_m$ Hz. Se concluye, entonces, que se necesita el mismo ancho de banda para transmitir señales de MAP/AM y de AM-DBL; de la misma manera, se requiere del mismo ancho de banda para una señal de MAP y una señal de AM-BLU.

5.5 COMPARACION ENTRE SISTEMAS DE MULTICANALIZACION POR DIVISION DE FRECUENCIA Y POR DIVISION DE TIEMPO

Ya se han estudiado dos métodos de transmisión simultánea por un canal de varias señales limitadas en banda. En sistemas multicanal por división de frecuencia todas las señales que se desean transmitir son continuas y se mezclan en el dominio del tiempo; sin embargo, los espectros de las señales moduladas ocupan diferentes bandas en el dominio de la frecuencia, que pueden separarse con filtros apropiados. Así pues, las señales se mezclan en el dominio del tiempo, pero sin perder su identidad en el dominio de la frecuencia.

Por otra parte, si se trata de multicanalización por división de tiempo, las muestras de cada señal permanecen independientes y pueden identificarse y separarse en el dominio del tiempo; sin embargo, los espectros de las señales muestreadas se mezclan y ocupan la misma región de frecuencias, por lo que se vuelve imposible identificarlas. De esta manera, la identidad del espectro se mantiene en señales multicanal por división de frecuencia mientras que, en señales multicanal por división de tiempo, se mantiene la identidad de la forma de onda. Puesto que una señal queda especificada completamente o bien en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia, las señales multicanal pueden separarse en el receptor con las técnicas apropiadas en los dominios respectivos.

La distinción entre los dos sistemas se representan convenientemente en forma gráfica mediante un espacio de comunicación, para ilustrar la forma en que se transmite la información. En la figura 5.15 se muestra el espacio de comunicación tiempo-frecuencia de ambos sistemas de multicanalización. En el sistema de división por frecuencia, cada señal está presente todo el

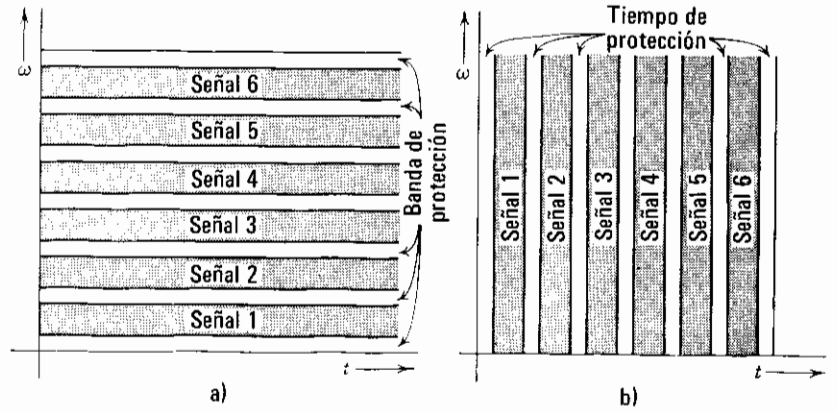


Figura 5.15 Representación en un espacio de comunicación de la multicanalización por división de frecuencia y de tiempo.

tiempo en el canal y todas ellas se mezclan para ocupar cada una un intervalo de frecuencias finito y distinto (que no ocupe ninguna otra señal); esto se ilustra en la figura 5.15a. Por otra parte, en el sistema de división por tiempo, cada señal ocupa un intervalo de tiempo distinto (que no ocupa ninguna otra señal), pero los espectros de todas las señales tienen componentes en el mismo intervalo de frecuencia, como se ve en la figura 5.15b.

Se ha demostrado cuantitativamente que las condiciones de ancho de banda para la transmisión multicanal de varias señales ya sea por distribución de tiempo o de frecuencia son los mismos (nf_m Hz para MAP y AM/BLU; $2nf_m$ Hz para MAP/AM y AM/DBL): por lo tanto, es evidente que, en un canal dado, el número de señales de banda limitada que pueden transmitirse simultáneamente con distribución en el tiempo o en la frecuencia, es el mismo.

Desde el punto de vista práctico, el sistema por división de tiempo se manifiesta como superior al de división de frecuencia. La primera ventaja son los circuitos relativamente sencillos que se utilizan en el primero. En el segundo caso es necesario generar una portadora diferente para cada canal; además, cada canal ocupa una banda diferente de frecuencias. Por lo tanto, se precisa diseñar filtros para bandas diferentes. Por otra parte, en los sistemas por división de tiempo se tienen circuitos idénticos para cada canal, que consisten en interruptores síncronos o circuitos-compuerta relativamente simples. Los filtros utilizados en el proceso de detección son de paso bajo e idénticos en cada canal. Este tipo de circuitos es mucho más simple si se compara con los moduladores, demoduladores, generadores de portadora y filtros de paso de banda que intervienen en los sistemas de multicanalización por división de frecuencia.

La segunda ventaja de los sistemas por división de tiempo es la relativa inmunidad a la interferencia entre canales (diafonía) que se presenta en los sistemas por división de frecuencia debido a la falta de linealidad de los amplificadores en la trayectoria de transmisión. Esto produce distorsión armónica (debido a multiplicación de frecuencia) y por lo tanto, introduce interferencias entre canales (diafonía). Así pues, los requisitos relativos a la falta de linealidad en un sistema de multicanalización por división de frecuencia son más severos que en el caso de un solo canal. Por otra parte, en el caso de la multicanalización por división de tiempo, las señales no se aplican simultáneamente a los diferentes canales, sino que se les asigna diferentes intervalos de tiempo; entonces, los requisitos de linealidad de estos sistemas son los mismos que para un solo canal. Por esto, los sistemas de división en el tiempo se suelen emplear en aplicaciones tales como la comunicación telefónica de larga distancia.

PROBLEMAS

1. Las siguientes señales no están limitadas en banda; sin embargo, se les puede considerar aproximadamente como de banda limitada. Establezca un criterio adecuado para tal aproximación en cada caso y encuentre la rapidez mínima de muestreo correspondiente.

a) $e^{-2|t|}$

b) $e^{-2t}\cos 100t\,u(t)$

c) $te^{-t}\,u(t)$

d) $G_{20}(t)$

2. Si $f(t)$ es una señal continua limitada en banda a f_m Hz y $f_s(t)$ es la señal muestreada (muestreada uniformemente a intervalos de $1/2f_m$ segundos), entonces se puede recuperar $f(t)$ a partir de $f_s(t)$ al transmitirla a través de un filtro de paso bajo. En la práctica, un circuito como el de la figura P-5.2 suele usarse para recuperar $f(t)$ a partir de $f_s(t)$. La salida de este circuito es aproximadamente $f(t)$.

a) Bosquejar las formas de onda en los diferentes puntos de este circuito para una señal muestreada típica $f_s(t)$.

b) Decir cuál es la función de transferencia en este arreglo. (*Sugerencia:* Determinar la respuesta al impulso unitario.)

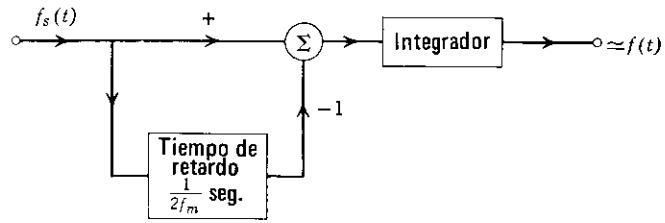


Figura P-5.2

c) Bosquejar la respuesta en frecuencia de este sistema y compararla con las características de un filtro ideal de paso bajo.

3. Se tiene una señal $f(t)$ limitada en banda a una frecuencia f_m Hz. La figura 5.2 ilustra el muestreo natural de $f(t)$ con un pulso rectangular. Encontrar el espectro de la señal muestreada si el muestreo natural se realiza con un pulso de forma arbitraria $q(t)$ cuya transformada de Fourier es $Q(\omega)$. Supóngase que la duración del pulso es menor

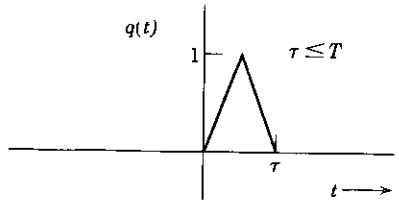
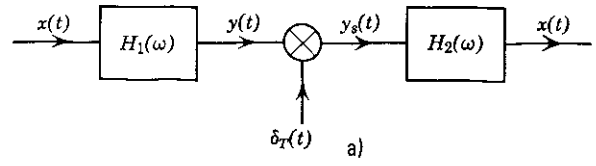


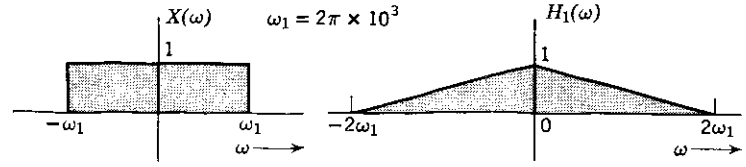
Figura P-5.3

que el intervalo de muestreo. En particular, si $q(t)$ es un pulso triangular como el de la figura P-5.3, encontrar y bosquejar la señal muestreada así como su espectro.

4. Se tiene una señal $f(t)$ limitada en banda a f_m Hz. Esta señal se muestrea con pulsos triangulares como el de la figura P-5.3. La duración del pulso es menor que el intervalo de muestreo T. Encontrar y bosquejar el espectro de la señal muestreada en el caso de muestreo instantáneo.

5. En la figura P-5.5b se ilustra el espectro $X(\omega)$ de una señal $x(t)$ transmitida a través de un sistema con función de transferencia $H_1(\omega)$, como se ilustra en la figura P-5.5c. La salida $y(t)$ se muestrea uniformemente con un tren de impulsos.





b) Figura P-5.5 c)

a) Determinar los valores de la frecuencia de muestreo f_s que permitirán la reproducción exacta de $y(t)$.

b) Elegir uno de estos valores de f_s; encontrar y dibujar el espectro de la señal muestreada $y_s(t)$.

c) Posteriormente, se transmite la señal muestreada $y_s(t)$ a través de un sistema con función de transferencia $H_2(\omega)$. Determinar $H_2(\omega)$ de manera que a la salida se obtenga $x(t)$.

6. Lo estudiado anteriormente se ha restringido al caso de pulsos de muestreo con duración menor al intervalo de muestreo. Así, todos los pulsos que representan varios valores-muestras no se sobreponen; sin embargo, esta restricción no es necesaria. Demostrar que se pueden utilizar pulsos que se sobrepongan (de duración mayor al intervalo de muestreo) para el muestreo natural y que aún puede recuperarse exactamente la señal original. Demostrar que el proceso de recuperación de la señal original, a partir de la señal muestreada, es idéntico al del muestreo natural con pulsos de duración menor al intervalo de muestreo. Encontrar y bosquejar la señal muestreada y su espectro cuando el muestreo se realiza mediante un pulso exponencial.

$$q(t) = e^{-t/T}$$

7. Repetir el problema 6 en el caso de muestreo instantáneo.

8. Sea E_q la energía del pulso de muestreo $q(t)$, en el caso de muestreo instantáneo. Encontrar la potencia (*valor* cuadrático medio) de la señal muestreada $x_s(t)$ en términos de E_q y $f^2(t)$. Supóngase que la duración del pulso es menor que el intervalo de muestreo T. (*Sugerencia:* Use los resultados del ejemplo 2.2, ecuación 2.31.)

9. Bosquejar el espectro de $Sa(100\pi t)$. El ancho de banda de esta señal es 50 Hz y la rapidez mínima de muestreo es de 100 muestras por segundo. Bosquejar las muestras de esta señal tomadas con la rapidez mínima de muestreo, con la primera muestra en $t = 0$.

Considérense los casos de muestreo a una rapidez de 50 y 25 muestras por segundo. Bosqueje las muestras para estos casos. Explicar por qué las muestras tomadas en los 3 casos anteriores son idénticas. [*Sugerencia:* La señal muestreada $f(t) = f(t)\delta_T(t)$, donde $T = 1/100$, $1/50$ y $1/25$ para los 3 casos. Encontrar el espectro de $f_s(t)$ usando el teorema de la convolución en la frecuencia y demostrar que, en cada caso, $f_s(t)$ contiene la información completa de $f(t)$. Este ejemplo es un caso "patológico".]

10. Generalizar el teorema de muestreo uniforme para señales cuyo espectro es de banda limitada a f_m Hz sin estar centradas en $\omega = 0$. El espectro positivo de tales señales se encuentra entre f_l y f_h, donde $f_l - f_h = f_m$. Demostrar que la rapidez mínima de muestreo para tales señales debe ser $2f_h/n$ muestras por segundo, en donde f_h es la frecuencia más alta del espectro y n es el valor entero más grande menor que f_h/f_m.

CAPITULO **6**

Ruido

En el proceso de transmisión las señales siempre se ven mezcladas con señales ajenas. En realidad, cualquier proceso impuesto sobre alguna señal tiende a introducir perturbaciones indeseables, que llamaremos ruido; por lo tanto, el ruido es una señal indeseable sin relación alguna con la señal deseada. Aquí, nos ocuparemos de señales de ruido aleatorias, es decir, de naturaleza impredecible. De acuerdo a nuestra definición de ruido, el zumbido de la fuente de alimentación en un receptor de radio, las oscilaciones en un sistema de retroalimentación, etc., son señales de ruido, pero no son aleatorias sino que pueden predecirse y eliminarse con un diseño adecuado.

Existen varias fuentes de ruido, que en general pueden clasificarse como *a*) ruido producido por el hombre, *b*) perturbaciones naturales y erráticas que ocurren irregularmente y *c*) ruido de fluctuación, que se presenta en el interior de los sistemas físicos. El ruido producido por el hombre se debe a la recepción de señales indeseables provenientes de otras fuentes tales como contactos defectuosos, artefactos eléctricos, radiación por ignición y alumbrado fluorescente; tal ruido siempre puede evitarse eliminando la fuente que lo produce. Las dos últimas fuentes de ruido no tienen origen humano.

El ruido natural errático puede proceder de relámpagos, tormentas eléctricas en la atmósfera, ruido intergaláctico o disturbios atmosféricos en general. El ruido de fluctuación tampoco es humano y aparece dentro de sistemas físicos debido a fluctuaciones espontáneas como el movimiento térmico (movimiento browniano) de los electrones libres dentro de un resistor, la emisión (aleatoria) de electrones en válvulas al vacío y la generación aleatoria, recombinación y difusión de portadores (huecos y electrones) en semiconductores. Básicamente, existen 2 tipos importantes de ruido de fluctuación: el ruido de disparo* y el ruido térmico. En el presente capítulo se estudiará el ruido sin describir detalladamente las propiedades estadísticas de esas señales.

* N. del T. Versión del término en inglés "Shot Noise"

6.1 RUIDO DE DISPARO

El ruido de disparo se produce en dispositivos con tubos al vacío y con semiconductores. En los tubos al vacío este tipo de ruido se debe a la emisión aleatoria de electrones del cátodo. En dispositivos con semiconductores su causa está en la difusión aleatoria de portadores minoritarios y la generación aleatoria y recombinación de los pares huecos-electrones.

En la figura 6.1 se ilustra la naturaleza del ruido de disparo, considerando la emisión electrónica del cátodo caliente en un diodo. A una temperatura dada, el número promedio de electrones emitidos por segundo es

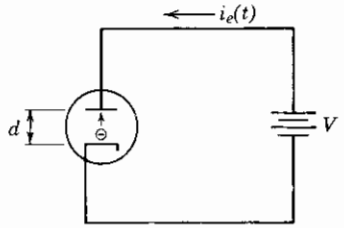


Figura 6.1

constante; sin embargo, el proceso de la emisión electrónica es aleatorio. Esto significa que, si se considera el tiempo dividido en un gran número de intervalos de $\Delta\tau$ segundos, el número de electrones emitidos durante cada uno de estos intervalos no será constante, sino aleatorio. Sin embargo, en promedio, la rapidez de emisión de electrones es constante, si este promedio se considera en un intervalo de tiempo suficientemente largo. Así pues, la corriente formada por los electrones emitidos no es constante sino que fluctúa alrededor de un valor medio.

Si se observa esta corriente en un osciloscopio con un barrido lento aparecerá, con aspecto constante en esencia, pero al observar con el barrido rápido, es decir, habiendo ampliado mucho la escala del tiempo, se manifestará la naturaleza desigual de la corriente, como se ilustra en la figura 6.2. Puede observarse que la corriente del diodo fluctúa alrededor de un valor medio. La corriente total $i(t)$ puede considerarse compuesta de una corriente constante I_0 y una corriente de ruido $i_n(t)$ con un valor medio de cero.

$$i(t) = I_0 + i_n(t) \tag{6.1}$$

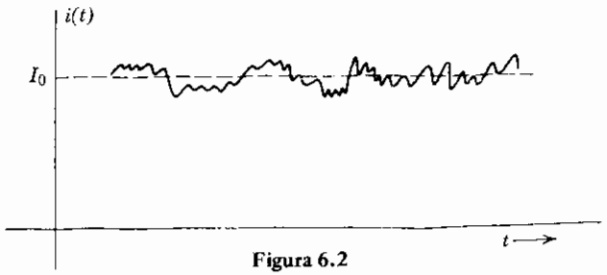


Figura 6.2

La naturaleza de las fluctuaciones en $i(t)$ se puede entender mejor considerando el proceso de establecimiento de corriente en la placa del diodo debido a la emisión de un electrón. Supongamos que se emite un solo electrón del cátodo (figura 6.1). Este electrón adquiere velocidad al moverse hacia la placa y establece una corriente $ie(t)$. Si la placa y el cátodo están separados d unidades, el electrón emitido experimenta una fuerza de magnitud qV/d en dirección de la placa, donde q es la carga del electrón y V es el voltaje aplicado. Dicho electrón adquirirá una aceleración de qV/md unidades, donde m es su masa. Su velocidad inicial será generalmente muy inferior a su velocidad en el momento de chocar con la placa. Por lo tanto, la velocidad inicial se supondrá cero. Entonces la velocidad $v(t)$ en cualquier instante t estará dada por

$$v(t) = \frac{qV}{md}\,t \tag{6.2}$$

La energía cinética (KE) en cualquier instante t es $\frac{1}{2}\,mv^2$ o

$$KE = \frac{q^2V^2}{2md^2}\,t^2 \tag{6.3}$$

Si el movimiento de este electrón produce una carga Q sobre la placa, entonces la cantidad de trabajo W que debe efectuarse para tener la carga Q en la placa con potencial V es

$$W = QV$$

Igualando este trabajo con la energía cinética del electrón, se obtiene

$$Q = \frac{q^2Vt^2}{2md^2}$$

La corriente

$$i_e(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{q^2V}{md^2}\,t \tag{6.4}$$

$$= \frac{q}{d}\,v(t) \tag{6.5}$$

Obsérvese que la corriente es proporcional a la velocidad del electrón.

El tiempo necesario para que el electrón alcance la placa se conoce como tiempo de tránsito τ_a y se puede encontrar fácilmente a partir de la ecuación 6.2

$$d = \frac{1}{2}\,\frac{qV}{md}\,\tau_a{}^2$$

y

$$\tau_a = \sqrt{\frac{2m}{qV}}\,d \tag{6.6}$$

Al substituir la ecuación 6.6 en la ecuación 6.4, se obtiene

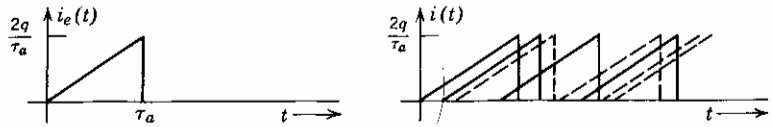
$$i_e(t) = \begin{cases} \dfrac{2q}{\tau_a^2}\, t & (0 < t < \tau_a) \\ 0 & (t > \tau_a) \end{cases} \tag{6.7}$$

Obviamente, la corriente se hace cero cuando el electrón alcanza la placa en $t = \tau_a$. El pulso de corriente producido por un solo electrón se ilustra en la figura 6.3a, y cada electrón emitido produce un pulso de esta naturaleza; así pues, la corriente total de placa se compone de un gran número de estos pulsos triangulares distribuidos aleatoriamente, como se muestra en la figura 6.3b.

La suma de todos estos pulsos constituye la corriente del diodo $i(t)$ de la figura 6.2. Nótese que el área bajo cada pulso es q unidades, por lo cual el valor promedio de la corriente de placa es

$$I_0 = \bar{n}q \tag{6.8}$$

donde $\bar{n}$ es el número promedio de electrones emitidos por segundo.



a) b)

Figura 6.3

Espectro de densidad de potencia del ruido de disparo

Vamos a estudiar a continuación la corriente de ruido de disparo $i(t)$, que consta de 2 componentes: una corriente constante I_0 y otra, que varía con el tiempo, $i_n(t)$. Como esta última componente es aleatoria, no puede especificarse como función del tiempo; sin embargo, $i_n(t)$ representa una señal aleatoria estacionaria y se especifica por medio de su espectro de densidad de potencia. Puesto que existen $\bar{n}$ pulsos por segundo, se puede esperar que el espectro de densidad de potencia de $i_n(t)$ sea $\bar{n}$ veces mayor que el espectro de densidad de energía de $i_e(t)$. En realidad, así sucede.* Así pues, si

$$i_e(t) \leftrightarrow I_e(\omega) \tag{6.9}$$

Entonces $S_i(\omega)$, el espectro de densidad de potencia de $i_n(t)$, está dado por

$$S_i(\omega) = \bar{n}\,|I_e(\omega)|^2 \tag{6.10}$$

* Véase, por ejemplo, W. B. Davenport, Jr., y W. L. Root, *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*, McGraw-Hill, New York, 1958.
Lathi, B. P., *An Introduction to Random Signals and Communication Theory*, International Textbook Co. Scranton, Pa., 1968.

$I_e(\omega)$ es la transformada de Fourier de $i_e(t)$ y se puede encontrar como sigue:

$$i_e(t) = \frac{2q}{\tau_a^2}\,[tu(t) - \tau_a u(t - \tau_a) - (t - \tau_a)u(t - \tau_a)] \tag{6.11}$$

Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación 6.11 y al substituir $j\omega$ por s, se obtiene

$$i_e(t) \leftrightarrow I_e(\omega) = \frac{2q}{-\omega^2\tau_a^2}\,[1 - e^{-j\omega\tau_a} - j\omega\tau_a e^{-j\omega\tau_a}] \tag{6.12}$$

Substituyendo la ecuación 6.12 en la ecuación 6.10, se tendrá:

$$S_i(\omega) = \bar{n}\,|I_e(\omega)|^2 = \frac{4I_0q}{(\omega\tau_a)^4}\,[(\omega\tau_a)^2 + 2(1 - \cos\omega\tau_a - \omega\tau_a \operatorname{sen}\omega\tau_a)] \tag{6.13}$$

El espectro de densidad de la potencia promedio $S_i(\omega)$ se puede representar como función de ω. Según la ecuación 6.13, resulta más conveniente representar $S_i(\omega)$ como función de $\omega\tau_a$ (figura 6.4). Obsérvese que el espectro de densidad de potencia es casi plano para $\omega\tau_a < 0.5$.

El orden de magnitud de τ_a se puede calcular a partir de la ecuación 6.6. La relación (q/m) para un electrón es 1.76×10 coulombs/kilogramo; por lo tanto, la ecuación 6.6 nos conduce a

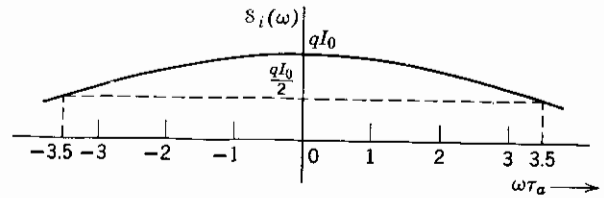


Figura 6.4

$$\tau_a = 3.36 \times 10^{-6}\,\frac{d}{\sqrt{V}} \text{ segundos}$$

Para un diodo con el espacio placa-cátodo $d = 1$ mm (10^{-3} metro) y con $V = 10$ volts.

$$\tau_a \simeq 10^{-9} \text{ segundos}$$

En este caso, el espectro de densidad de potencia de la componente de corriente de ruido será esencialmente plano hasta

$$\omega \simeq 0.5 \times 10^9 = 500 \times 10^6 \text{ rps}$$

Esto corresponde aproximadamente a 80 MHz. En general, se puede considerar el espectro de densidad de potencia del ruido de disparo como constante (qI_0) para frecuencias inferiores a 100 MHz:

$$S_i(\omega) = qI_0 \tag{6.14}$$

Región de operación en un diodo termoiónico

Las características de operación de un diodo se pueden dividir en 2 regiones: la región limitada de temperatura y la limitada de carga espacial (figura 6.5). En la primera, la corriente del diodo está limitada por la temperatura del cátodo. En esta región, el campo eléctrico tiene suficiente intensidad para atraer todos los electrones emitidos hacia la placa; por lo

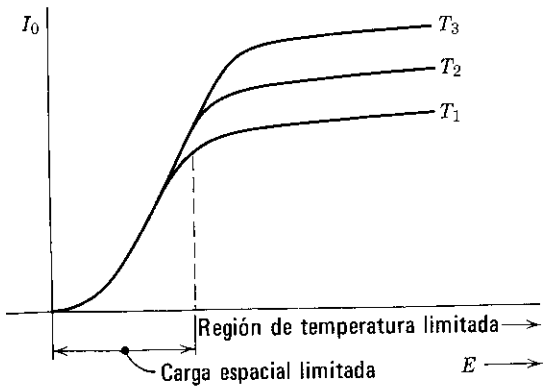


Figura 6.5

tanto, el aumento de campo eléctrico no incrementa la corriente promedio I_0 (figura 6.5). Sólo se puede aumentar dicha corriente al elevar la temperatura del cátodo, con lo cual se incrementa la razón de emisión electrónica. En la figura 6.5 se ilustra la característica volt-ampere de un diodo típico para 3 valores diferentes de temperatura de cátodo. Para voltajes más bajos no todos los electrones llegan a la placa; algunos permanecen en el espacio cátodo-placa formando lo que se conoce como carga espacial. La operación del diodo en esta región se llama operación limitada de carga espacial, donde la corriente I_0 se incrementa con un aumento en el voltaje de placa (figura 6.5).

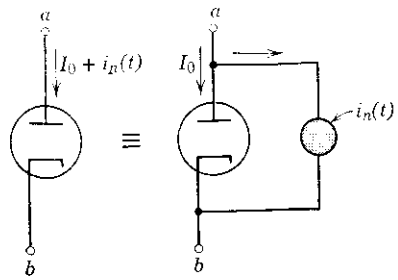


Figura 6.6

Obsérvese que en la región limitada de temperatura, la conductancia dinámica $\partial I_0/\partial V$ del diodo es casi cero (muy alta resistencia dinámica o

incremental) mientras que en la región limitada de carga espacial, la conductancia dinámica no es cero (resistencia dinámica finita).

Ruido en la región limitada de carga espacial

Según lo estudiado, el espectro de densidad de potencia de ruido (ecuación 6.14) se deriva de la suposición de que no existe interacción entre los electrones que alcanzan la placa. Esta suposición es válida para una región limitada de temperatura en donde no hay carga espacial. En esta condición, todos los electrones emitidos son absorbidos por la placa y la corriente sólo está limitada por el número de electrones emitidos por segundo, es decir, por la temperatura del cátodo, lo cual ocurre cuando se tiene un voltaje de ánodo suficientemente alto para atraer todos los electrones.

Con voltajes más bajos se forma una nube de electrones (carga espacial) en el espacio ánodo-cátodo. Esta carga espacial altera el potencial cerca del cátodo y repele algunos de los electrones emitidos. Aun cuando el cátodo emite electrones independientemente, hay una fuerte interacción entre ellos, una vez emitidos, así que la llegada de un electrón a la placa depende de los electrones previamente emitidos. A partir de una argumentación de tipo cualitativo puede deducirse que la carga espacial tiende a uniformizar la fluctuación aleatoria; por ejemplo si la razón de emisión crece, los electrones adicionales aumentan la carga espacial que repele hacia el cátodo a los demás electrones emitidos. Por otra parte, si la razón de emisión disminuye, la carga espacial se reduce y permite que más electrones alcancen la placa. Entonces, la carga espacial tiende a mantener constante la corriente, y disminuyen las fluctuaciones de la misma. Se puede demostrar que el espectro de densidad de potencia de la corriente de ruido $i_n(t)$ para un diodo operando en la región limitada de carga espacial está dado por*

$$S_i(\omega) = \alpha q I_0 \tag{6.15}$$

donde

$$\alpha = 3\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{2kT_c g_d}{qI_0} \tag{6.16}$$

De donde

$$S_i(\omega) = 1.288 kT_c g_d \tag{6.17}$$

T_c es la temperatura del cátodo (en grados Kelvin), k es la constante de Boltzmann ($k = 1.38 \times 10^{-23}$ joules/°K) y g_d es la conductancia dinámica del diodo,

$$g_d = \frac{\partial I_0}{\partial V}$$

* A. J. Rack, "Effect of Space-Charge and Transit Time on the Shot Noise in Diodes", *Bell Syst. Tech Journal 17*, pp. 592-619, 1938. Véase también B. J. Thompson, D. O. North, y W. A. Harris, "Fluctuations in Space-Charge Limited Currents at Moderately High Frequencies", *RCA Review, January* 1970 et, seq.

En la región de carga espacial, V e I_0 están relacionadas por la ley de Child

$$I_0 = BV^{3/2}$$

Entonces,

$$g_d = \frac{\partial I_0}{\partial V} = \frac{3}{2}\frac{I_0}{V}$$

El valor de la constante de reducción de fluctuaciones varía entre 0.01 y 1. Así pues, $S_i(\omega)$ puede expresarse como

$$\begin{aligned} S_i(\omega) &= qI_0 \quad \text{(para operación en la región limitada de temperatura)} \\ &= \alpha q I_0 \quad \text{(para operación en la región limitada de carga espacial)} \end{aligned} \tag{6.18}$$

En general, un diodo puede representarse por medio de un diodo no ruidoso en paralelo con una fuente de corriente de ruido $i_n(t)$ (figura 6.6) cuyo espectro de densidad de potencia está dado por la ecuación 6.18.

Ruido de disparo en tubos triodos y multielectrodos

En los tubos triodos, pentodos y otros multielectrodos, los mecanismos de producción del ruido de disparo son en esencial similares a los que se presentan en un diodo limitado de carga espacial; por ejemplo, en un triodo el voltaje $(V_g + V_p/\mu)$ juega el mismo papel que el voltaje placa-cátodo en un diodo. De esta manera, la densidad de corriente en un diodo está dada por

$$J = CV^{3/2} \tag{6.19}$$

donde V es el voltaje entre placa y cátodo. En un triodo, donde el espaciamiento entre reja y cátodo es el mismo que entre placa y cátodo de un diodo, esta relación está dada por*

$$J = C\sigma^{3/2}\left(V_g + \frac{V_p}{\mu}\right)^{3/2} \tag{6.20}$$

donde σ es un factor geométrico del tubo (generalmente $0.5 \leqslant \sigma \leqslant 1$), V_g y V_p son los voltajes de reja y de placa con respecto al cátodo y μ es el factor de amplificación del tubo. Por lo tanto, un diodo con un voltaje placa-cátodo V,

$$V = \sigma\left(V_g + \frac{V_p}{\mu}\right)$$

tendrá la misma densidad de corriente que un triodo con voltajes de reja y de placa V_g y V_p, respectivamente. Entonces, el espectro de densidad de potencia de ruido para un triodo está dado por (ecuación 6.17)

$$S_i(\omega) = 1.288kT_c g_{eq}$$

* K. R. Spangenberg, *Vacuum Tubes*, McGraw-Hill, New York, 1948.

donde g_{eq} es la conductancia mutua del diodo equivalente dada por

$$\begin{aligned} g_{eq} &= \frac{\partial I}{\partial[\sigma(V_g + V_p/\mu)]} = \frac{\partial I}{\partial V_g}\frac{\partial V_g}{\partial[\sigma(V_g + V_p/\mu)]} \\ &= \frac{g_m}{\sigma} \end{aligned}$$

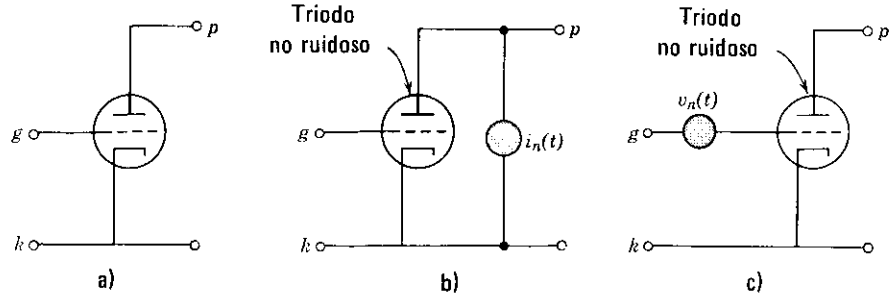


Figura 6.7

donde g_m es la transconductancia dinámica del triodo $\partial I/\partial V_g$. Así,

$$\begin{aligned} S_i(\omega) &= \frac{1.2888kT_c g_m}{\sigma} \\ &= 2kT\frac{0.644T_c}{\sigma T}g_m \end{aligned} \tag{6.21}$$

En condiciones típicas, T_c es 1000°K, T la temperatura ambiente 293°K y σ es 0.88. Por lo tanto,

$$S_i(\omega) \simeq 2kT(2.5g_m) \tag{6.22}$$

En consecuencia, un triodo ruidoso puede representarse por medio de un triodo no ruidoso, en paralelo con una corriente de ruido $i_n(t)$ a través de las terminales placa-cátodo, como se ilustra en la figura 6.7b. El espectro de densidad de potencia de $i_n(t)$ está dado por la ecuación 6.22. Puesto que en un triodo, el voltaje e_g de reja da lugar a una corriente $g_m e_g$ de placa, se puede pensar que la corriente de ruido de disparo $i_n(t)$ se presenta debido a un voltaje de ruido equivalente $v_n(t)$ de reja. Por lo tanto, se puede representar un triodo ruidoso

$$v_n(t) = \frac{i_n(t)}{g_m} \tag{6.23}$$

por medio de un triodo no ruidoso, con una fuente de voltaje de ruido efectivo de reja (figura 6.7c). La relación entre $i_n(t)$ y $v_n(t)$ es g_m. Como la densidad de potencia es una función del cuadrado de la señal la razón entre los espectros de densidad de potencia de $i_n(t)$ y de $v_n(t)$ será $g_m{}^2$

(véase la definición de la potencia y del espectro de densidad de potencia). Entonces,

$$S_v(\omega) = \frac{1}{g_m^2} S_i(\omega) \tag{6.24}$$

donde $S_v(\omega)$ es el espectro de densidad de potencia de $v_n(t)$. Por las ecuaciones 6.22 y 6.24, tenemos:

$$S_v(\omega) = 2kT\left(\frac{2.5}{g_m}\right)$$

$$= 2kTR_{eq} \tag{6.25}$$

donde

$$R_{eq} = \frac{2.5}{g_m} \tag{6.26}$$

Se introduce R_{eq} a fin de expresar el ruido de disparo de manera similar al ruido térmico en un resistor (el cual estudiaremos en la sección 6.2).

Se tienen circuitos equivalentes semejantes a los correspondientes a los triodos para tubos pentodos y otros multielectrodos. En los tubos multielectrodos existe una componente adicional de ruido producida por la partición de la corriente de cátodo entre los varios electrodos. Esta partición, que constituye un proceso aleatorio, introduce dicha componente adicional. Tanto el ruido de disparo como el de partición se pueden tomar en cuenta mediante una simple fuente equivalente de voltaje con un espectro de densidad de potencia $2KTR_{eqp}$. Para los pentodos, R_{eqp} está dada por*

$$R_{eqp} = \left(1 + \frac{7.7I_s}{g_{mp}}\right) R_{eqt} \tag{6.27}$$

donde g_{mp} es la transconductancia del pentodo, I_s es la corriente de pantalla y $R_{eqt} = 2.5/g_{mt}$, donde g_{mt} es la transconductancia del pentodo operado como triodo.

En tubos al vacío (y también en transistores) existe una fuente adicional de ruido, llamado ruido de centelleo** que tiene un espectro de densidad de potencia proporcional a $1/f$. Es claro que tal ruido será predominante en frecuencias bajas (generalmente del orden de algunos kilohz). Este ruido se debe a condiciones de variación lenta en la superficie del cátodo y puede reducirse mediante un procesamiento adecuado de la superficie del mismo en los tubos al vacío y de las superficies alrededor de las uniones en los transistores.

* *Reference Data for Radio Engineers*, 4.ª Edición, International Telephone and Telegraph Corporation, New York, 1956.

** N. del T. versión en español del término en inglés "flicker noise".

6.2 RUIDO TERMICO

Este tipo de ruido se debe al movimiento aleatorio de los electrones libres en medios conductores tales como resistores. Debido a su energía térmica, cada electrón libre dentro de un resistor está en movimiento; la trayectoria del movimiento de un electrón es aleatoria debido a sus colisiones con la estructura de celosía. El efecto neto del movimiento de todos los electrones constituye una corriente eléctrica que fluye a través del resistor. La dirección del flujo de corriente es aleatoria y su valor medio es cero. Se puede demostrar que el espectro de densidad de potencia de la corriente debida a los electrones libres está dado por*

$$S_i(\omega) = \frac{2kTG\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \tag{6.28}$$

$$= \frac{2kTG}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} \tag{6.29}$$

donde k es la constante de Boltzmann, T es la temperatura ambiente (en grados Kelvin), G es la conductancia del resistor (en mhos) y α es el número promedio de colisiones por segundo de un electrón.

En la figura 6.8 se ilustra el espectro de densidad de potencia como función de ω/α. Se puede suponer plano el espectro para $\omega/\alpha < 0.1$. El orden de magnitud de α, número de colisiones por segundo, es de 10^{14}, por lo que el espectro será esencialmente plano a frecuencias muy altas. Ya que se puede considerar plano hasta frecuencias en el rango de 10^{13} Hz para todos los propósitos prácticos, podemos tomar dicho espectro de densidad de potencia del ruido térmico en un resistor como

$$S_i(\omega) = 2kTG \tag{6.30}$$

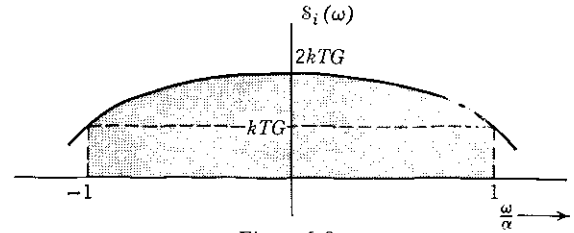


Figura 6.8

Por lo tanto, la contribución de ruido térmico de cualquier circuito está limitada al ancho de banda del mismo, así que generalmente se considera que el ruido térmico tiene un espectro de densidad de potencia constante,

* Lathi, B. P. *An Introduction to Random Signals and Communication Theory*, International Textbook Co., Scranton, Pa., 1968.

J. J. Freeman, *Principles of Noise*, ch. 4, John Wiley and Sons, New York, 1958.

es decir, que contiene todas las frecuencias en igual cantidad. Por esta razón se llama ruido blanco (blanco implica la presencia de todos los colores o frecuencias). El ruido térmico también se conoce como ruido de Johnson debido a J. B. Johnson, quien realizó investigaciones sobre el ruido en conductores.* Johnson encontró que la potencia de ruido medida en un conductor es proporcional a la temperatura absoluta y al ancho de banda del instrumento de medición. H. Nyquist, de los laboratorios Bell, dedujo la ecuación 6.30 basado en consideraciones de termodinámica.†

De lo tratado anteriormente, se desprende con claridad que un resistor R se puede representar mediante una conductancia no ruidosa $G(G = 1/R)$ en paralelo con una fuente de corriente de ruido (i_n) con un espectro de densidad de potencia $2kTG$, como se ilustra en la figura 6.9. En la figura 6.9c se representa el equivalente de Thevenin para el arreglo indicado en la figura 6.9b. Este es un circuito equivalente con una fuente de voltaje $v_n(t)$ que tiene una resistencia R en serie, en donde $v_n(t) = Ri_n(t)$. Puesto que el espectro de densidad de potencia es una función del cuadrado de la señal, $S_v(\omega)$, espectro de densidad de potencia de $v_n(t)$ y $S_i(\omega)$ están relacionados por

$$\begin{aligned} S_v(\omega) &= R^2 S_i(\omega) \\ &= R^2(2kTG) \\ &= 2kTR \end{aligned} \tag{6.31}$$

Según la interpretación del espectro de densidad de potencia (sección 2.8), la potencia contenida en las componentes de frecuencia de $v_n(t)$, en una banda de frecuencia Δf(Hz) centrada en una frecuencia es

$$\begin{aligned} \Delta P &= 2S_v(\omega)\,\Delta f \\ &= 4kTR\,\Delta f \end{aligned} \tag{6.32}$$

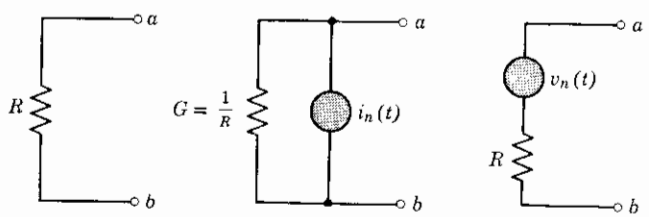


Figura 6.9

Así pues, $4kTR$ es la potencia contenida en la componente de frecuencia de $v_n(t)$ en un ancho de banda unitario (en Hz). Obsérvese que, por definición, la potencia de una señal es su valor cuadrático medio (véase la sección 2.8,

* J. B. Johnson, "Thermal Agitation of Electricity in Conductors", *Phys. Rev.* 32, 97-109, Julio 1928.

† H. Nyquist, "Thermal Agitation of Electric Charge in conductors", *Phys. Rev.* 32, 110-113 Julio 1928.

ecuación 2.21b). Si el voltaje de ruido $v_n(t)$ se transmite a través de un filtro de banda angosta Δf(Hz), el voltaje de salida Δv_n de este filtro tendrá un valor cuadrático medio de $4kTR\,\Delta f$,

$$\overline{(\Delta v_n)^2} = 4kTR\Delta f \tag{6.33}$$

Generalización de las relaciones de ruido térmico

Los resultados en las ecuaciones 6.30 y 6.31 se aplican a un elemento resistivo simple. Estas relaciones se pueden generalizar para cualquier circuito pasivo lineal bilateral (por ejemplo circuitos con elementos *R-L-C*). Tal circuito (ilustrado en la figura 6.10a) puede comprender varios resistores, siendo cada uno, una fuente de señal de ruido térmico. Mediante la generalización de las ecuaciones 6.30 y 6.31 se calcula la densidad de potencia del voltaje de ruido térmico a través de las terminales aa' (figura 6.10a) debido a todas estas fuentes.

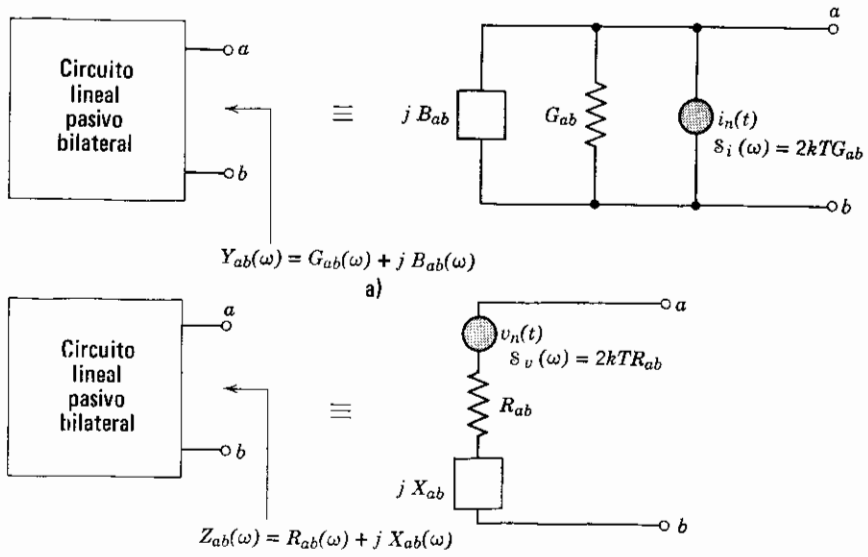


Figura 6.10

El teorema generalizado (conocido también como teorema generalizado de Nyquist) establece que si la admitancia $Y_{ab}(\omega)$, a través de las terminales ab de tal circuito está dada por

$$Y_{ab}(\omega) = G_{ab}(\omega) + jB_{ab}(\omega)$$

entonces dicho circuito puede representarse mediante una admitancia no ruidosa Y_{ab}, en paralelo con una fuente de corriente de ruido con densidad de potencia $S_i(\omega)$ dada por (figura 6.10a)

$$S_i(\omega) = 2kTG_{ab}(\omega) \tag{6.34a}$$

Obsérvese que la conductancia equivalente $G_{ab}(\omega)$ vista a través de las terminales *ab* varía, en general, con la frecuencia. Por lo tanto, la fuente de corriente de ruido equivalente posee un espectro de densidad de potencia que en general es función de la frecuencia. Otra forma de este teorema (forma de Thevenin) establece que si $Z_{ab}(\omega)$ es la impedancia a través de las terminales *ab* del circuito, donde

$$Z_{ab}(\omega) = R_{ab}(\omega) + jX_{ab}(\omega)$$

entonces el circuito puede representarse mediante una impedancia no ruidosa Z_{ab} en serie con una fuente de voltaje de ruido con espectro de densidad de potencia $S_v(\omega)$ dado por (figura 6.10b)

$$S_v(\omega) = 2kTR_{ab}(\omega) \tag{6.34b}$$

En general, $R_{ab}(\omega)$, la parte real de $Z_{ab}(\omega)$, es función de la frecuencia; por eso, la fuente equivalente de ruido tiene un espectro de densidad de potencia que también está en función de la frecuencia.

Es importante mencionar las limitaciones del teorema, las cuales se aplican a cualquier circuito lineal bilateral en el que todas las fuentes de ruido son debidas a resistores.* Así pues, el teorema se puede aplicar a cualquier circuito que contenga elementos *R-L-C* pero no se puede usar con circuitos de elementos activos tales como válvulas al vacío o transistores. En el Apéndice se da la prueba de este teorema.

Ejemplo 6.1

Determinar el espectro de densidad de potencia del voltaje de ruido térmico a través de las terminales *ab* del circuito mostrado en la figura 6.11. Tenemos

$$Y_{ab}(\omega) = 1 + j\omega + \frac{1}{2 + 2j\omega}$$

$$= \frac{3 - 2\omega^2 + j4\omega}{2 + j2\omega}$$

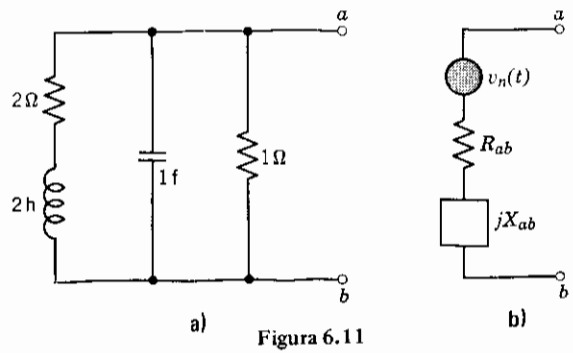


Figura 6.11

* Mediante la definición apropiada de resistencia, se puede extender este teorema a sistemas lineales disipativos en general, por ejemplo, el movimiento browniano o la fluctuación de la presión del gas.

Entonces

$$Z_{ab}(\omega) = \frac{2 + j2\omega}{3 - 2\omega^2 + j4\omega}$$

$$R_{ab}(\omega) = \text{Re}[Z_{ab}(\omega)] = \frac{4\omega^2 + 6}{4\omega^4 + 4\omega^2 + 9}$$

El espectro de densidad de potencia $S_v(\omega)$ del voltaje de ruido está dado por (figura 6.11b).

$$S_v(\omega) = 2kTR_{ab}(\omega) = \frac{2kT(4\omega^2 + 6)}{4 + 4\omega^2 + 9}$$

Si se desea el equivalente de Norton (figura 6.10a), entonces el espectro de densidad de potencia $S_i(\omega)$ de la corriente de ruido está dado por

$$S_i(\omega) = 2kT\,\text{Re}[Y_{ab}(\omega)] = 2kT\,\frac{3 + 2\omega^2}{2 + 2\omega^2}$$

$$= kT\,\frac{3 + 2\omega^2}{1 + \omega^2}$$

6.3 CALCULOS DE RUIDO: FUENTE DE RUIDO UNICA

Ya podemos calcular el valor raíz cuadrático medio de señales de ruido en sistemas eléctricos en general. Trataremos primero el caso de una sola fuente de ruido.

Considérese un circuito que contenga solamente elementos no ruidosos (figura 6.12). Se conecta una fuente de voltaje de ruido aleatorio $v_{n_i}(t)$ a las terminales de entrada del circuito. Se determinará el valor raíz cuadrático medio de la señal de ruido de salida $v_{n_o}(t)$. Sea $H(\omega)$ la función de transferencia que relaciona el voltaje de salida $v_{n_o}(t)$ al voltaje de entrada $v_{n_i}(t)$ en la figura 6.12. Sean $S_i(\omega)$ y $S_o(\omega)$ los espectros de densidad de potencia de las señales $v_{n_i}(t)$ y $v_{n_o}(t)$ respectivamente. De lo tratado en la sección 2.8 (ecuación 2.37) se concluye que

$$S_o(\omega) = S_i(\omega)\,|H(\omega)|^2$$

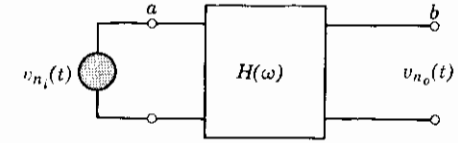


Figura 6.12

El valor cuadrático medio de una señal está dado por $1/2\pi$ multiplicado por el área bajo su espectro de densidad de potencia. (Véase la ecuación 2.23b.) En consecuencia

$$\overline{v_{n_o}^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_o(\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_i(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega \tag{6.35}$$

Obsérvese que el espectro de densidad de potencia siempre es función par de ω, de donde (ecuación 2.23d)

$$\overline{v_{n_o}^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathcal{S}_i(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega \qquad (6.36a)$$

El valor raíz cuadrático medio de $v_{n_o}(t)$ está dado por

$$\sqrt{\overline{v_{n_o}^2}} = \left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathcal{S}_i(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega\right]^{1/2} \qquad (6.36b)$$

Ejemplo 6.2

Considérese el circuito *R-C* de la figura 6.13. Se calculará el valor raíz cuadrático medio del voltaje de ruido a través de las terminales aa'.

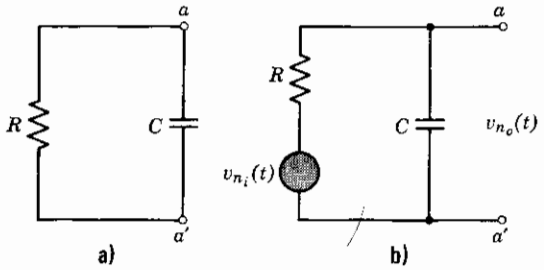


Figura 6.13

El resistor R se substituye por uno no ruidoso con una fuente de ruido $v_{n_i}(t)$ en serie, con densidad de potencia $2kTR$. Obviamente, la función de transferencia $H(\omega)$ que relaciona el voltaje de salida $v_{n_o}(t)$ a $v_{n_i}(t)$ es

$$H(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}$$

$$= \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

El espectro de densidad de potencia del voltaje de salida $v_{n_o}(t)$ está dado por $\mathcal{S}_o(\omega)$, donde

$$\mathcal{S}_o(\omega) = \mathcal{S}_i(\omega)\,|H(\omega)|^2$$

$$= \frac{2kTR}{1 + \omega^2C^2R^2}$$

El valor raíz cuadrático medio de la salida es (ecuación 6.36b)

$$\sqrt{\overline{v_{n_o}^2}} = \left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{2kTR}{1 + \omega^2C^2R^2}\,d\omega\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{2kTR}{\pi CR}\tan^{-1}(\omega CR)\Big|_0^\infty\right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{kT}{C}}$$

6.4 FUENTES MULTIPLES DE RUIDO: SUPERPOSICION DE ESPECTROS DE POTENCIA

En la sección 6.3 se estudió el caso de una sola fuente de ruido. En un determinado sistema eléctrico puede haber un gran número de fuentes de ruido tales como resistores y válvulas al vacío, todas ellas independientes y generadoras de señales aleatorias. Ahora, se demostrará que para varias señales aleatorias generadas por fuentes independientes, se aplica el principio de superposición para valores cuadráticos medios y espectros de densidad de potencia. Esto significa que el valor cuadrático medio de la respuesta es igual a la suma de los valores cuadráticos medios de las respuestas calculadas suponiendo una sola fuente a la vez, lo que también es válido para el espectro de densidad de potencia.

Considérese un sistema (figura 6.14a) con 2 fuentes $f_1(t)$ y $f_2(t)$ en 2 terminales diferentes y sea $y(t)$ la respuesta. Puesto que el sistema es lineal, $y(t)$ está dada por $y_1(t)+y_2(t)$ en donde $y_1(t)$ es la respuesta a $f_1(t)$ solamente y $y_2(t)$ a $f_2(t)$ solamente. Se demostrará que si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son fuentes aleatorias independientes con valores medios de cero,* entonces

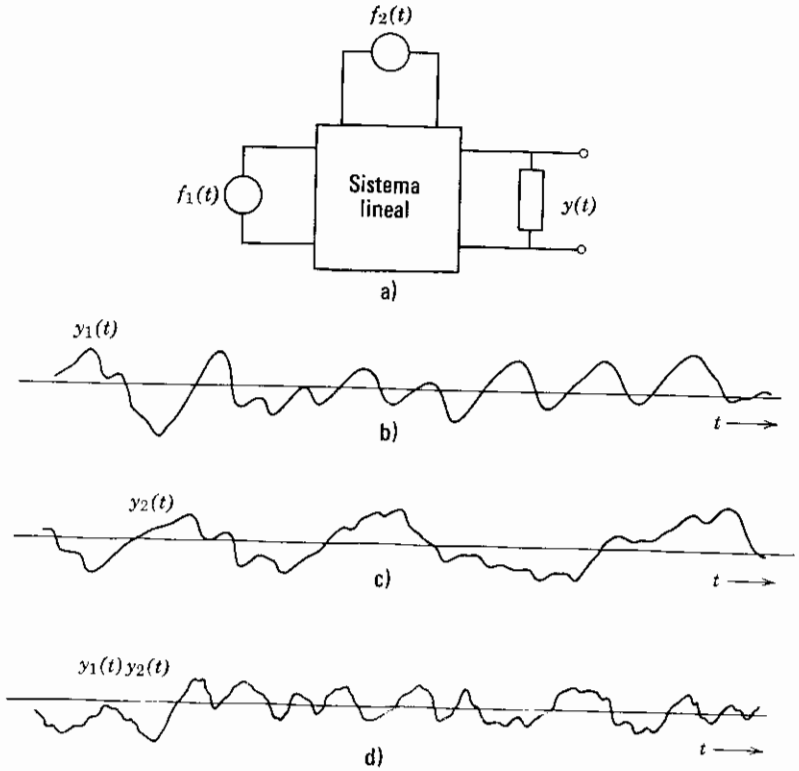


Figura 6.14

* Es suficiente que cualquiera de $f_1(t)$ o $f_2(t)$ tenga media de cero.

$$\overline{y^2(t)} = \overline{y_1^2(t)} + \overline{y_2^2(t)} \tag{6.37a}$$

y

$$S_y(\omega) = S_{y_1}(\omega) + S_{y_2}(\omega) \tag{6.37b}$$

Lo anterior puede demostrarse como sigue:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\overline{y^2(t)} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [y_1(t) + y_2(t)]^2\, dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y_1^2(t)\, dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y_2^2(t)\, dt + \\ &\qquad \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y_1(t)y_2(t)\, dt \\ &= \overline{y_1^2(t)} + \overline{y_2^2(t)} + 2\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y_1(t)y_2(t)\, dt \end{aligned} \tag{6.38}$$

La integral en el segundo miembro es el valor promedio del producto $y_1(t)y_2(t)$. Si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son señales aleatorias independientes con un valor medio de cero (figura 6.14b y c), entonces es igualmente probable que tanto $y_1(t)$ como $y_2(t)$ adopten valores positivos y negativos. Reviste la misma probabilidad el que su producto $y_1(t)y_2(t)$ adquiera valores positivos y negativos (figura 6.14d). Por lo tanto, su valor promedio deberá ser cero.* Si el valor medio de la señal de entrada es cero, el valor medio de la señal de salida también es cero para un sistema estable.† En consecuencia, si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ tienen valores medios de cero, $y_1(t)$ y $y_2(t)$ también tendrán valores medios de cero. Es igualmente probable que la señal $y_1(t)y_2(t)$ sea positiva. Por lo tanto, la ecuación 6.38 se convierte en

$$\overline{y^2(t)} = \overline{y_1^2(t)} + \overline{y_2^2(t)}$$

Esto comprueba la ecuación 6.37a.

El valor cuadrático medio de una señal está dado por $1/2\pi$ multiplicado por el área bajo su espectro de densidad de potencia. Entonces, la ecuación 6.38 se puede expresar como

* Es fácil ver que esta conclusión es válida aun cuando sólo $y_1(t)$ o sólo $y_2(t)$ tienen media de cero.

† Si el sistema es estable, entonces $h(t)$ decae con el tiempo y el valor medio de $h(t)$ es cero, lo cual implica que $h(t)$ no tiene componente de corriente directa. En consecuencia, $H(\omega)$ carece de impulso en el origen y $|H(\omega)|^2$ es finito en $\omega = 0$. Si $x(t)$ es la señal de entrada y $y(t)$ es la señal de salida, entonces

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

Si $x(t)$ tiene valor medio de cero, $S_x(\omega)$ no tiene impulso en $\omega = 0$. En consecuencia, $|H(\omega)|^2 S_x(\omega)$ es finito en $\omega = 0$ y no tiene impulso en $\omega = 0$. Es claro que $y(t)$ no tiene componente de corriente directa, de donde su valor medio es cero.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)\, d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{y_1}(\omega)\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{y_2}(\omega)\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [S_{y_1}(\omega) + S_{y_2}(\omega)]\, d\omega\end{aligned}$$

Esta ecuación se interpreta como

$$S_y(\omega) = S_{y_1}(\omega) + S_{y_2}(\omega)$$

En consecuencia, los espectros de densidad de potencia siguen el principio de superposición. Las ecuaciones 6.37a y 6.37b representan el principio de superposición de los valores cuadráticos medios y de los espectros de densidad de potencia para 2 señales aleatorias independientes con valor medio de cero.*

Así pues, aun cuando en un sistema se tengan múltiples fuentes aleatorias independientes, se puede obtener el espectro de densidad de potencia suponiendo una fuente a la vez y calculando el espectro de potencia de la respuesta, con lo cual el espectro de potencia resultante es la suma de todas las densidades de potencia individuales.

Obsérvese que el principio de superposición de los espectros de densidad de potencia se aplica a fuentes aleatorias independientes.† En tal caso, la integral de la ecuación 6.38 desaparece y se dice que las fuentes se suman en forma incoherente. Si las fuentes están relacionadas, entonces la integral en la ecuación 6.38 no será cero y la ecuación 6.37 no es válida.

Aun cuando exista una multiplicidad de fuentes de ruido aleatorias independientes,‡ se puede aplicar la ecuación 6.38. En consecuencia, para calcular el espectro de densidad de potencia a través de cualquier terminal, debido a varias fuentes de ruido, se puede calcular la densidad de potencia a través de esas terminales debida a cada fuente individualmente, suponiendo que las demás son cero. La suma de los espectros individuales de densidad de potencia será el espectro de densidad de potencia causado por todas las fuentes.

Para un circuito lineal bilateral *R-L-C* con varios resistores se puede calcular el espectro de densidad de potencia en las terminales de salida al aplicar el teorema generalizado de Nyquist o el principio de superposición de los espectros de densidad de potencia. En general, el primero resulta mejor. El lector puede verificar esto calculando el espectro de densidad de potencia a través de las terminales aa' en el circuito *R-L-C* de la figura 6.11a, mediante el principio de superposición de los espectros de densidad de potencia.

* Se puede demostrar que el principio de superposición de espectros de densidad de potencia se aplica bajo condición menos severa de señales no correlacionadas. La independencia es una restricción mucho más severa. Las fuentes independientes son no correlacionadas, pero lo inverso no es cierto. Este tema no se puede apreciar completamente sin algunos conocimientos básicos en procesos aleatorios.

† Fuentes aleatorias no correlacionadas, para ser exactos.

‡ Nótese que los valores medios de todas las fuentes de ruido, en nuestro estudio, son cero.

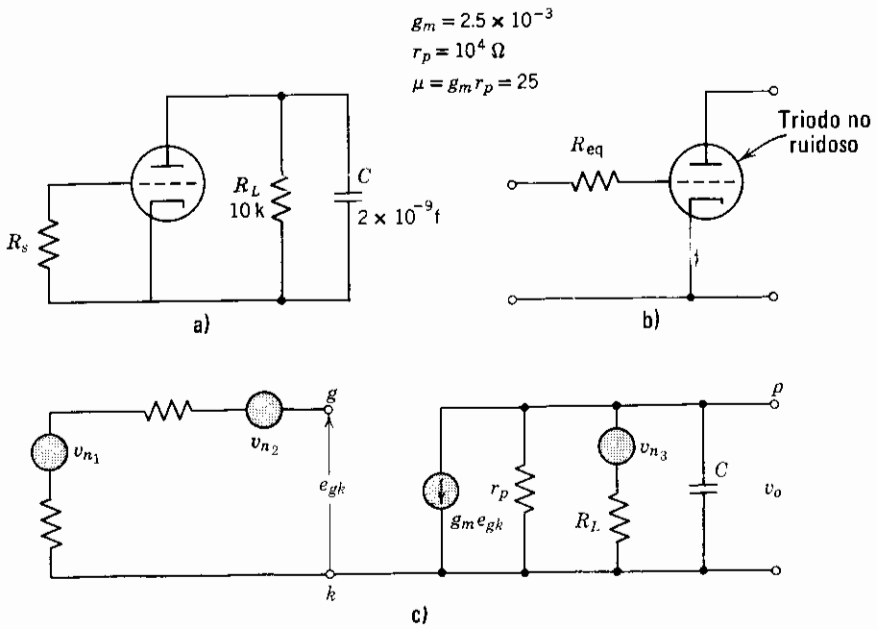


Figura 6.15

Ejemplo 6.3

Calcular el voltaje de ruido raíz cuadrático medio en las terminales de salida del amplificador con triodo ilustrado en la figura 6.15a.

Para analizar este problema, representamos explícitamente al amplificador con elementos sin ruido y fuentes de ruido equivalente. Un triodo se puede representar por una fuente de ruido en las terminales de salida (figura 6.7b) o una fuente de ruido equivalente en las terminales de entrada (figura 6.7c). La segunda forma es más conveniente que la primera. Por lo tanto, en todos los cálculos futuros emplearemos el circuito equivalente de la fuente de entrada para los tubos al vacío. Nótese que el voltaje de ruido equivalente en la reja tiene espectro de densidad de potencia de $2kTR_{eq}$ en donde

$$R_{eq} = \frac{2.5}{g_m}$$

Para tomar en cuenta esta fuente, se pone un resistor equivalente R_{eq} en las terminales de reja, como se muestra en la figura 6.15b. El ruido térmico generado por R_{eq} tiene densidad de potencia de $2kTR_{eq}$ y es igual a la densidad de potencia de voltaje de ruido de disparo equivalente en la reja. Este arreglo es satisfactorio a niveles aproximadamente inferiores de 10 MHz, en donde se puede suponer que el ruido de disparo tiene densidad de potencia constante. Nótese que poner un resistor de ruido equivalente en la reja no afecta al circuito, pues no circula corriente por esta parte del mismo.

En el amplificador, tres fuentes de ruido son: *a*) el ruido térmico debido al resistor R_s; *b*) el ruido de disparo del tubo ocasionado por el ruido térmico equivalente de R_{eq} en la reja; y *c*) el ruido térmico debido al resistor de carga R_L. Sean $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$, y $S_3(\omega)$ los espectros de densidad de potencia de voltaje de ruido de estas tres fuentes. Es indudable que

$$S_1(\omega) = 2kTR_s = 2kT \times 10^3$$

$$S_2(\omega) = 2kTR_{eq} = 2kT \times \frac{2.5}{g_m} = 2kT \times 10^3$$

$$S_3(\omega) = 2kTR_L = 2kT \times 10^4$$

El circuito equivalente final del amplificador en donde el triodo se representa por su circuito equivalente con fuente de corriente es el de la figura 6.15c. Los voltajes de las tres fuentes de ruido se indican por v_{n_1}, v_{n_2} y v_{n_3}. El voltaje de salida es v_o. Si $H_1(\omega)$, $H_2(\omega)$ y $H_3(\omega)$ representan las funciones de transferencia que relacionan a v_o con v_{n_1}, v_{n_2} y v_{n_3}, respectivamente, entonces se puede ver fácilmente que

$$H_1(\omega) = H_2(\omega) = \frac{-g_m}{\dfrac{1}{r_p} + \dfrac{1}{R_L} + j\omega C} = \frac{-g_m r_p R_L}{R_L + r_p + j\omega r_p R_L C}$$

y

$$H_3(\omega) = \frac{r_p/1 + j\omega r_p C}{R_L + r_p/(1 + j\omega r_p C)} = \frac{r_p}{R_L + r_p + j\omega r_p R_L C}$$

Si el espectro de densidad de potencia del voltaje de salida es $S_o(\omega)$, entonces se infiere que

$$\begin{aligned} S_o(\omega) &= |H_1(\omega)|^2\, S_1(\omega) + |H_2(\omega)|^2\, S_2(\omega) + |H_3(\omega)|^2\, S_3(\omega) \\ &= \frac{g_m{}^2 r_p{}^2 R_L{}^2}{(R_L + r_p)^2 + \omega^2 r_p{}^2 R_L{}^2 C^2}(4kT \times 10^3) \\ &\qquad + \frac{r_p{}^2}{(R_L + r_p)^2 + \omega^2 r_p{}^2 R_L{}^2 C^2}(2kT \times 10^4) \\ &= \frac{2kT r_p{}^2 \times 10^3}{(R_L + r_p)^2 + \omega^2 r_p{}^2 R_L{}^2 C^2}(2g_m{}^2 R_L{}^2 + 10) \end{aligned} \tag{6.39}$$

Nótese que la contribución relativa al ruido de salida debida a R_g y a R_{eq} es $2g_m{}^2 R_L{}^2$ que es 1250 y la debida a R_L es 10 solamente. Esto se observa en casi todos los casos prácticos. La contribución de ruido debida al resistor de carga se puede despreciar, pues, es pequeño comparado con el ruido del tubo y con el ruido de la fuente de entrada.

Cuando substituimos los valores de R_L, r_p, C, k y T (239°K) en la ecuación 6.39, obtenemos

$$S_o(\omega) = \frac{2.52 \times 10^{-5}}{10^{10} + \omega^2} \tag{6.40}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \overline{v_o{}^2} &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_o(\omega)\, d\omega \\ &= \frac{2.52 \times 10^{-5}}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\omega}{10^{10} + \omega^2} \\ &= 1.26 \times 10^{-10} \end{aligned}$$

El valor rms de $v_o(t)$ está dado por

$$\sqrt{\overline{v_o^2}} = 11.2 \times 10^{-6} = 11.2\ \mu v$$

6.5 ANCHO DE BANDA DE RUIDO EQUIVALENTE

A menudo es conveniente definir el ancho de banda de ruido equivalente de un circuito eléctrico. Un sistema con función de transferencia $H(\omega)$ y espectro de densidad de potencia de señal de entrada $S_i(\omega)$ tiene un valor cuadrático medio para la señal de salida de

$$\overline{v_o^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_i(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega$$

En la mayoría de los circuitos los anchos de banda son suficientemente pequeños para permitir la suposición de que el ruido de disparo y el térmico tienen densidad espectral constante, es decir $S_i(\omega)$ es constante, por ejemplo, K. Así

$$\overline{v_o^2} = \frac{K}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2\,d\omega \tag{6.41a}$$

$$= \frac{K}{\pi}\int_{0}^{\infty}|H(\omega)|^2\,d\omega \tag{6.41b}$$

La integral de la ecuación 6.41b es constante para un circuito dado. Definimos el ancho de banda de ruido equivalente W_0 con respecto a alguna frecuencia ω_0 como

$$W_0 = \frac{1}{|H(\omega_0)|^2}\int_0^{\infty}|H(\omega)|^2\,d\omega \tag{6.42}$$

En consecuencia

$$\overline{v_o^2} = \frac{K}{\pi}|H(\omega_0)|^2\,W_0 \tag{6.43}$$

Aquí, queda de manifiesto el significado del ancho de banda de ruido equivalente. El valor raíz cuadrático medio de la señal de ruido a la salida de un sistema dado es igual al de un sistema de paso de banda ideal de ganancia constante $H(\omega_0)$ y ancho de banda W_0. Esto se ilustra claramente en la figura 6.16. El valor raíz cuadrático medio del ruido de salida es el mismo en ambos amplificadores, cuyas características de ganancia se ilustran en las figuras 6.6a y b.

6.6 FACTOR DE RUIDO DE UN AMPLIFICADOR

Del estudio anterior se deduce con claridad que toda señal está contaminada con ruido. Además, cuando una señal se procesa en un sistema, se le agrega ruido. La relación de la potencia de señal a la potencia de ruido

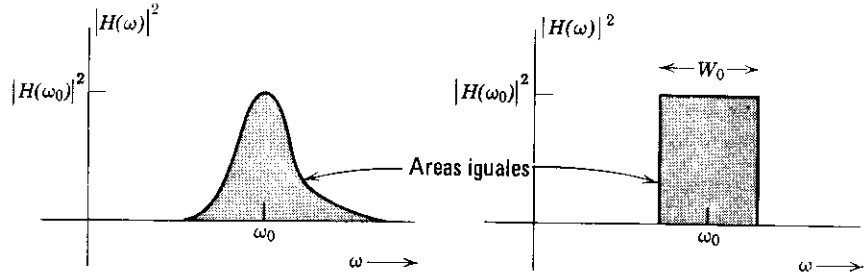


Figura 6.16

indica la pureza de la señal (o del nivel relativo de la señal y del ruido); la llamaremos, por sencillez, relación señal a ruido.

Cuando la señal se amplifica, se agrega al ruido original de la señal un ruido adicional generado en el amplificador. Con esto se deteriora la relación señal a ruido de la señal de salida comparada con la de la señal de entrada. La razón de la relación señal a ruido en la entrada a la de la salida indica lo ruidoso del amplificador. En cualquier amplificador, el ruido generado en la fuente se amplifica y pasa a la carga. Dentro del circuito del amplificador se genera más ruido el cual va a dar también a la carga. Por lo cual, tanto la fuente como el amplificador contribuyen a formar el ruido de salida.

Definiremos el factor de ruido F de un amplificador como la relación de la densidad de potencia de ruido total en la carga (o la salida) a la densidad de potencia de ruido entregada a la carga (salida) debida únicamente a la fuente. Si $S_{nto}(\omega)$ y $S_{nso}(\omega)$ representan los espectros de densidad de potencia del ruido total y del ruido debido únicamente a la fuente, en la salida, respectivamente, entonces por definición

$$F = \frac{S_{nto}(\omega)}{S_{nso}(\omega)} \tag{6.44}$$

Si $S_{nao}(\omega)$ es el espectro de densidad de potencia del ruido en la carga causado únicamente por el amplificador, entonces

$$S_{nto}(\omega) = S_{nso}(\omega) + S_{nao}(\omega)$$

$$F = \frac{S_{nso}(\omega) + S_{nao}(\omega)}{S_{nso}(\omega)}$$

$$= 1 + \frac{S_{nao}(\omega)}{S_{nso}(\omega)} \tag{6.45}$$

Nótese que la impedancia de carga también contribuye al ruido en la salida. Esta contribución se incluye en S_{nao}. Sin embargo, esta contribución comúnmente es mucho menor comparada con el ruido generado por el dispositivo activo (véase el ejemplo 6.3) y por la fuente, por lo que puede ser despreciado. Es evidente, que el factor de ruido de un amplificador es medida de lo ruidoso del amplificador relativo a lo ruidoso de la fuente.

El factor de ruido también se puede expresar en otra forma. Sean $\mathcal{S}_{si}(\omega)$ y $\mathcal{S}_{so}(\omega)$ los espectros de densidad de potencia de la señal deseada en la entrada y en la salida respectivamente. Entonces

$$\mathcal{S}_{so}(\omega) = \mathcal{S}_{si}(\omega)\,|H(\omega)|^2 \tag{6.46}$$

Si $\mathcal{S}_{nsi}(\omega)$ representa el espectro de densidad de potencia del ruido en la fuente (o entrada), entonces

$$\mathcal{S}_{nso}(\omega) = \mathcal{S}_{nsi}(\omega)\,|H(\omega)|^2$$

y, por definición (ecuación 6.44)

$$F = \frac{\mathcal{S}_{nto}(\omega)}{\mathcal{S}_{nsi}(\omega)\,|H(\omega)|^2}$$

Al substituir la ecuación 6.46 en esta ecuación obtenemos

$$F = \frac{\mathcal{S}_{si}(\omega)/\mathcal{S}_{nsi}(\omega)}{\mathcal{S}_{so}(\omega)/\mathcal{S}_{nto}(\omega)} \tag{6.47}$$

Este es un resultado importante. El numerador de la ecuación 6.47 representa la relación de densidad de potencia de señal a ruido en las terminales de entrada y el denominador representa la relación de densidad de potencia de señal a ruido en las terminales de salida. En consecuencia, el factor de ruido mide el deterioro de la relación de densidad de potencia de señal a ruido en el proceso de amplificación. Por su definición, es evidente que dicha relación siempre es mayor que la unidad, por lo que la relación de densidad de potencia de señal a ruido siempre se deteriora en el proceso de amplificación.

El factor de ruido F, definido en la ecuación 6.44 (o ecuación 6.47), es función de la frecuencia y, por lo tanto, a menudo se conoce como factor de ruido espectral. En contraste, definimos el factor de ruido promedio F como la relación de la potencia de ruido total en la salida a la potencia de ruido debida únicamente a la fuente. Nótese que esta definición es extensión de la enunciada por la ecuación 6.44. En esta definición tratamos con la potencia de ruido total aportada por todas las frecuencias. Por lo tanto, es un factor de ruido integrado o promedio. Así, por definición

$$\begin{aligned} F &= \frac{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathcal{S}_{nto}(\omega)\,d\omega}{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathcal{S}_{nso}(\omega)\,d\omega} \\ &= 1 + \frac{\int_0^\infty \mathcal{S}_{nao}(\omega)\,d\omega}{\int_0^\infty \mathcal{S}_{nso}(\omega)\,d\omega} \qquad (6.48) \\ &= 1 + \frac{N_{ao}}{N_{so}} \qquad (6.48b) \end{aligned}$$

en donde N_{ao} es la potencia de ruido en la salida debido únicamente al amplificador y N_{so} es la potencia de ruido en la salida debido únicamente a la fuente.

Por la definición del factor de ruido (espectral o promedio), dicho factor en un amplificador siempre es mayor que la unidad. Para un amplificador ideal (sin ruido) es la unidad. La proximidad del factor de ruido a la unidad es la medida de la superioridad del amplificador desde el punto de vista del ruido. Sin embargo, se debe acentuar que el factor de ruido mide una calidad relativa, no absoluta, del amplificador. Esta indica lo ruidoso de un amplificador relativo a lo ruidoso de la fuente. Es evidente, por definición, que el factor de ruido de un amplificador se acercará a la unidad tanto como se pueda con tan sólo agregar ruido a la fuente. Sin duda, ésta no es la solución adecuada para mejorar el comportamiento del amplificador, pues vuelve tan ruidosa la fuente, que el amplificador, en comparación, aparece casi sin ruido. Sin embargo, la razón entre señal y ruido total en la salida se deteriora y, por eso, la señal de salida es mucho más ruidosa. Por lo tanto, es importante no incrementar el ruido en la fuente (o reducir la relación señal a ruido en la entrada) para mejorar el factor de ruido. En muchos casos, el problema se resuelve con un transformador de subida. Con este transformador en la entrada se incrementa el ruido de entrada así como la señal de entrada. El ruido aumentado en la fuente da al amplificador un aspecto menos ruidoso, sin deteriorar la relación señal a ruido de la entrada. En consecuencia se reduce el factor de ruido y mejora realmente la relación señal a ruido en las terminales de salida (véase el ejemplo 6.5).

Ejemplo 6.4

Determinar el factor de ruido de un amplificador triodo que se muestra en la figura 6.17a y calcular el voltaje de ruido raíz cuadrático medio en las terminales de salida. Se sabe que

$$r_p = R_L = 10\ k\Omega, \quad g_m = 2.5 \times 10^{-3}, \quad R_g = 100\ k\Omega,$$

$$R_s = 1\ k\Omega \quad \text{y} \quad C = 2 \times 10^{-9}\ \text{farads}$$

La aportación de ruido debido a la resistencia de carga suele ser despreciable comparado con el de las demás componentes, por lo que R_L se puede suponer sin ruido (ver ejemplo 6.3).

La resistencia R_s de la fuente y la resistencia R_g de reja quedarán representadas por resistores no ruidosos dispuestos en serie con fuentes de voltaje de ruido equivalente y el triodo se representará por un triodo sin ruido y una fuente de voltaje de ruido equivalente en la reja (figura 6.17b).

Los espectros de densidad de potencia debidos a R_s, R_g y R_{eq} están dados por $2kTR_s$, $2kTR_g$ y $2kTR_{eq}$, respectivamente, como se muestra en la figura 6.17b. Sea $H(\omega)$ la función de transferencia que relaciona el voltaje de salida v_o con el voltaje de reja e_g. Ahora bien, la función de transferencia que relaciona el voltaje de salida v_o con la fuente de voltaje de ruido equivalente debido a R_{eq} es $H(\omega)$, y la que relaciona a v_o con la fuente de voltaje de ruido debido a R_g es

$$\frac{R_s}{R_s + R_g}\,H(\omega)$$

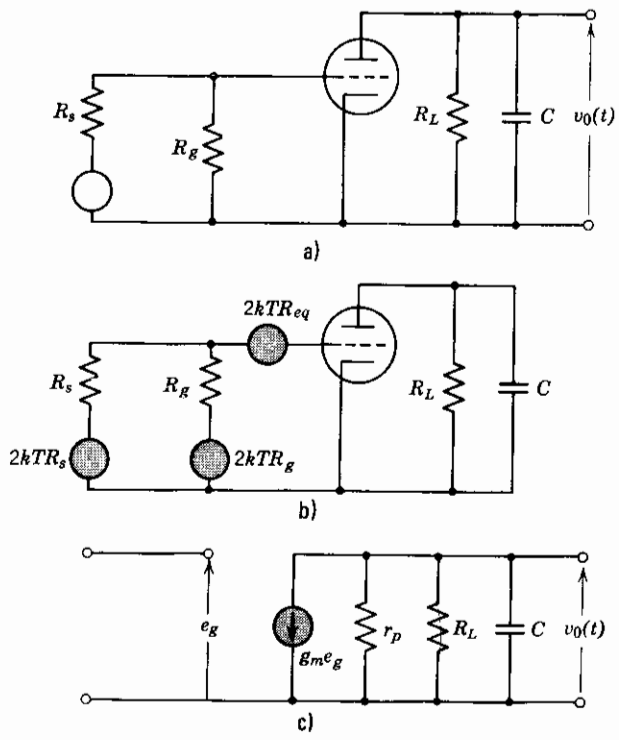


Figura 6.17

De igual manera, la función de transferencia que relaciona a v_o con la fuente de voltaje de ruido debido a R_s es

$$\frac{R_g}{R_s + R_g} H(\omega)$$

Por lo tanto, el espectro de densidad de potencia del voltaje de ruido en la salida debido a R_{eq} es

$$2kTR_{eq}\,|H(\omega)|^2 \tag{6.49a}$$

El espectro de densidad de potencia del voltaje de ruido en la salida debido a R_g es

$$2kTR_g\left(\frac{R_s}{R_s + R_g}\right)^2 |H(\omega)|^2 \tag{6.49b}$$

y el espectro de densidad de potencia del voltaje de ruido en la salida debido a R_s es

$$2kTR_s\left(\frac{R_g}{R_s + R_g}\right)^2 |H(\omega)|^2 \tag{6.49c}$$

Nótese que la resistencia de reja R_g es parte del amplificador y, por lo tanto

$$S_{nao}(\omega) = 2kTR_{eq}\,|H(\omega)|^2 + 2kTR_g\left(\frac{R_s}{R_s + R_g}\right)^2 |H(\omega)|^2 \tag{6.50a}$$

y

$$S_{nso}(\omega) = 2kTR_s\left(\frac{R_g}{R_s + R_g}\right)^2 |H(\omega)|^2 \tag{6.50b}$$

Entonces, el factor de ruido F está dado por

$$\begin{aligned} F &= 1 + \frac{S_{nao}}{S_{nso}} \\ &= 1 + \frac{R_{eq} + R_g\left(\dfrac{R_s}{R_s + R_g}\right)^2}{R_s\left(\dfrac{R_g}{R_s + R_g}\right)^2} \\ &= 1 + \frac{R_{eq}(R_s + R_g)^2 + R_g R_s^2}{R_s R_g^2} \end{aligned} \tag{6.51}$$

$$R_{eq} = \frac{2.5}{g_m} = \frac{2.5}{2.5 \times 10^{-3}} = 1000 \text{ ohms}$$

$$R_s = 1000 \text{ ohms} \qquad \text{y} \qquad R_g = 10^5 \text{ ohms}$$

En consecuencia

$$F = 2.03$$

Para obtener el valor raíz cuadrático medio del voltaje de ruido en la salida, encontramos la función de transferencia $H(\omega)$. La figura 6.17c ilustra el circuito equivalente del triodo. En este circuito se ve con claridad que la función de transferencia para relacionar el voltaje de salida v_o con el voltaje de reja e_g está dado por

$$H(\omega) = -g_m Z$$

en donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{r_p} + \frac{1}{R_L} + j\omega C \\ &= 10^{-4} + 10^{-4} + (2 \times 10^{-9})(j\omega) \\ &= 2 \times 10^{-9}\,(10^5 + j\omega) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{(2.5 \times 10^{-3})}{(2 \times 10^{-9})(10^5 + j\omega)} \\ &= \frac{1.25 \times 10^6}{(10^5 + j\omega)} \end{aligned}$$

y

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1.56 \times 10^{12}}{(10^{10} + \omega^2)} \tag{6.52}$$

La media cuadrática del voltaje de ruido en la salida está dado por

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_{nto}(\omega)\,d\omega$$

donde

$$S_{nto}(\omega) = S_{nao}(\omega) + S_{nso}(\omega)$$

Por las ecuaciones 6.50 y 6.52, obtenemos

$$S_{nto}(\omega) = 2kT\,|H(\omega)|^2\left[R_{eq} + R_g\left(\frac{R_s}{R_s+R_g}\right)^2 + R_s\left(\frac{R_g}{R_s+R_g}\right)^2\right]$$

$$= 2 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 290 \times \frac{1.56 \times 10^{12}}{10^{10}+\omega^2} \times 2010$$

$$= \frac{2.5 \times 10^{-5}}{10^{10}+\omega^2}$$

El valor cuadrático medio del voltaje de ruido de salida está dado por

$$\overline{v_o^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{2.5 \times 10^{-5}}{10^{10}+\omega^2}\,d\omega$$

$$= \frac{2.5 \times 10^{-5}}{\pi} \times \frac{1}{10^5}\tan^{-1}\frac{\omega}{10^5}\Bigg|_0^\infty$$

$$= 1.25 \times 10^{-10}$$

Por lo tanto, el valor raíz cuadrático medio del voltaje en las terminales de salida es

$$\sqrt{\overline{v_o^2}} = 11.2\ \mu v$$

Ejemplo 6.5

Encontrar el valor óptimo de la resistencia R_S de la fuente para el amplificador de triodo del ejemplo 6.4 y calcular el factor de ruido correspondiente.

El factor de ruido F está dada por la ecuación 6.51. En general $R_S \ll R_g$ y la ecuación 6.51 se transforma en

$$F \simeq 1 + \frac{R_{eq}}{R_s} + \frac{R_s}{R_g} \tag{6.53}$$

El valor óptimo de R_S se puede obtener a partir de $dF/dR_s = 0$. Así

$$\frac{dF}{dR_s} = \frac{-R_{eq}}{R_s^2} + \frac{1}{R_g} = 0$$

ó

$$(R_s)_{opt} = \sqrt{R_{eq}R_g}$$

$$= (10^3 \times 10^5)^{1/2}$$

$$= 10\ \text{k}\Omega$$

El factor ruido para $(R_s)_{opt}$ se obtiene de la ecuación 6.53:

$$F = 1 + 0.1 + 0.1$$

$$= 1.2$$

Si la resistencia R_s de la fuente es 1000 ohms, entonces el factor de ruido óptimo se puede alcanzar por medio de un transformador de subida de relación $1:\sqrt{10}$. Nótese que no es conveniente obtener el valor óptimo de la resistencia de la fuente al agregar 9000 ohms en serie con 1000 ohms. Con esto tan sólo se volverá ruidosa la fuente en comparación con el amplificador.

Comentario sobre el factor de ruido

El factor de ruido es la relación del espectro de densidad de potencia de ruido total de la variable de salida al espectro de densidad de potencia de ruido aportado únicamente por la fuente a la variable de salida. Se plantea la pregunta sobre qué variable de salida se debe usar, es decir, si debemos usar un voltaje de salida o una corriente de salida. Realmente, el factor de ruido es independiente de la variable de salida. Esto se debe a que el voltaje y la corriente se relacionan por la impedancia de carga y, como el factor de ruido es función de la relación de los espectros de densidad de potencia de señal a ruido, este factor (debido a la impedancia de carga) se cancela.

Ejemplo 6.6

Determinar el factor de ruido de un amplificador a transistores de base común.

En un transistor existen tres fuentes principales de ruido: el ruido de disparo, el ruido de partición y el ruido térmico. El ruido de disparo se representa por una fuente de corriente $i_{sh}(t)$ en las terminales *ej* (figura 6.18) con un espectro de densidad de potencia* (a frecuencias bajas) de

$$S_{sh}(\omega) = qI_e \tag{6.54a}$$

en donde I_e es la corriente (corriente directa) promedio de emisor. El ruido de partición queda representado por una fuente de corriente $i_p(t)$ en las terminales *jc* con un espectro de densidad de potencia (a bajas frecuencias) de

$$S_p(\omega) = q\alpha_0 I_e(1-\alpha_0) \tag{6.54b}$$

en donde α_0 es la ganancia en corriente de corriente directa en un transistor de base común.

El ruido térmico aparece debido a la resistencia física en la base y puede representarse por una fuente de voltaje $v_{th}(t)$ en la terminal de la base con un espectro de densidad de potencia de

$$S_{th}(\omega) = 2kTr_b \tag{6.54c}$$

en donde r_b es la resistencia difusa de la base. La figura 6.18a ilustra el circuito equivalente de un transistor. En la figura 6.18b, se muestra el circuito equivalente con diferentes generadores de ruido y resistores de carga de fuente. La resistencia de fuente está representada por un resistor R_S sin ruido, en serie con una fuente $v_s(t)$ de ruido térmico que tiene espectro de densidad de potencia de

$$S_{R_s}(\omega) = 2kTR_s \tag{6.54d}$$

* A. Van der Ziel, "Theory of Shot Noise in Junction Diodes and Junction Transistors", *Proc. I.R.E. 43*, 11, 1639-1646 (noviembre 1955).

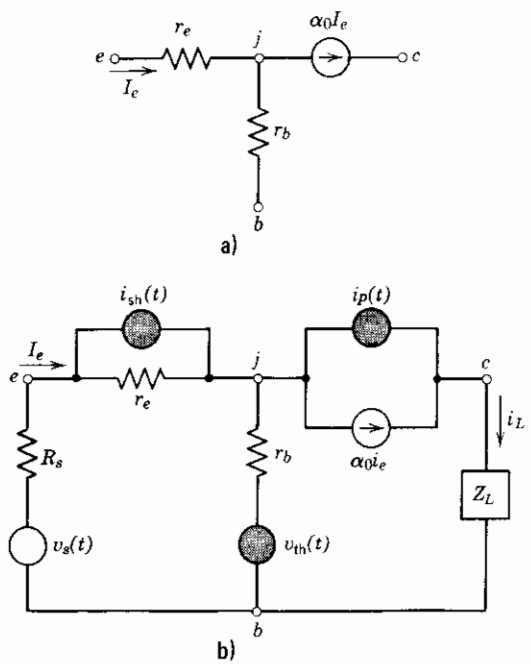


Figura 6.18

El ruido que genera el transistor tiene tres componentes: las debidas a $i_{sh}(t)$, $i_p(t)$ y $v_{th}(t)$. Se deja como ejercicio para el lector demostrar que las funciones de transferencia donde se relacionan la corriente de carga i_L y las tres fuentes son respectivamente

$$H_{i_{sh}}(\omega) = \frac{\alpha_0 r_e}{R_s + r_b(1 - \alpha_0) + r_e} \tag{6.55a}$$

$$H_{i_p}(\omega) = \frac{r_b + r_e + R_s}{R_s + r_b(1 - \alpha_0) + r_e} \tag{6.55b}$$

$$H_{v_{th}}(\omega) = \frac{\alpha_0}{R_s + (1 - \alpha_0) + r_e} \tag{6.55c}$$

De la misma manera, la función de transferencia que relaciona a la corriente de carga i_L con la fuente $v_s(t)$ está dada por

$$H_{v_s}(\omega) = \frac{\alpha_0}{R_s + r_b(1 - \alpha_0) + r_e} \tag{6.55d}$$

Por definición

$$F = 1 + \frac{S_{nao}(\omega)}{S_{nso}(\omega)} \tag{6.56}$$

en donde

$$S_{nao}(\omega) = S_{sh}(\omega)\,|H_{i_{sh}}|^2 + S_p(\omega)\,|H_{i_p}|^2 + S_{th}(\omega)\,|H_{v_{th}}|^2 \tag{6.57a}$$

y

$$S_{nso}(\omega) = S_{R_s}(\omega)\,|H_{v_s}|^2 \tag{6.57b}$$

Substituyendo las ecuaciones 6.57, 6.54 y 6.55 en la ecuación 6.56, obtenemos

$$F = 1 + \frac{r_b}{R_s} + \frac{qI_e}{2kTR_s}\left[r_e^2 + \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0}(r_b + r_e + R_s)^2\right] \tag{6.58}$$

En un transistor, la resistencia dinámica r_e del emisor está relacionada con la corriente del mismo por

$$r_e = \frac{kT}{qI_e} \tag{6.59}$$

Al substituir la ecuación 6.59 en la ecuación 6.58 obtenemos

$$F = 1 + \frac{r_b + r_e/2}{R_s} + \frac{(r_b + r_e + R_s)^2(1 - \alpha_0)}{2\alpha_0 r_e R_s} \tag{6.60}$$

Nótese que ahí existe un valor óptimo de R_s para el cual la figura de ruido es mínima.

Este resultado es válido para las frecuencias $\omega < \sqrt{1 - \alpha_0}\,\omega_\alpha$, donde ω_α es la frecuencia de corte α del transistor. A frecuencias bajas (inferiores a 1 KHz), se vuelve predominante el ruido de centelleo. Por lo tanto, el factor de ruido en las ecuaciones 6.58 y 6.60 es válido para frecuencias intermedias. A frecuencias altas se incrementa el ruido de partición. La expresión general del espectro de densidad de potencia del generador de corriente de ruido de partición está dada por*

$$S_p(\omega) = q\alpha_0 I_e(1 - \alpha_0)\frac{1 + [\omega/\omega_\alpha\sqrt{(1 - \alpha_0)}]^2}{1 + (\omega/\omega_\alpha)^2}$$

A bajas frecuencias, esto se reduce a la ecuación 6.54b.

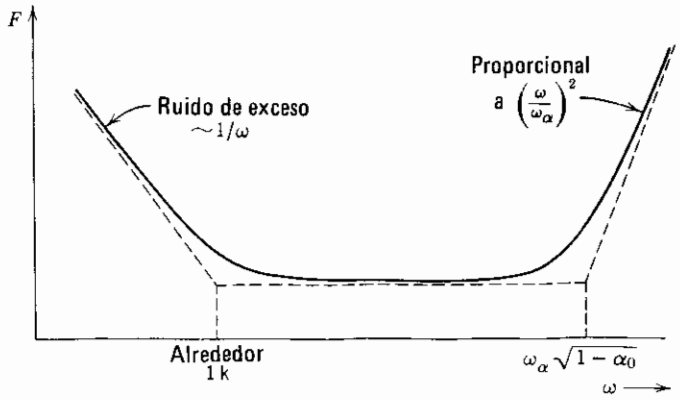


Figura 6.19

* Para el comportamiento en alta frecuencia, véase E. G. Nielsen, "Behavior of Noise Figure in Junction Transistor", *Proc. I.R.E.*, 45, 7, 957-963 (julio 1957), G. H. Hanson y A. Van der Ziel, "Shot Noise in Transistors", *Proc. I.R.E.* **45**, 11, 1538, 1542 (noviembre 1957).

Cuando substituimos la última ecuación en la 6.57, se obtiene

$$F = 1 + \frac{r_b + \frac{r_e}{2}}{R_e} + \frac{(r_b + r_e + R_s)^2(1 - \alpha_0)\left[1 + \frac{1}{1 - \alpha_0}\left(\frac{\omega}{\omega_\alpha}\right)^2\right]}{2\alpha_0 r_e R_s}$$

La variación de la figura de ruido F con la frecuencia se ilustra en la figura 6.19.

Factor de ruido en un amplificador de emisor común

Se puede emplear un procedimiento parecido para calcular el factor de ruido del amplificador de emisor común. Se puede demostrar que este factor de ruido es igual al de un amplificador de base común.*

6.7 DETERMINACION EXPERIMENTAL DEL FACTOR DE RUIDO

El factor de ruido de un amplificador se puede determinar en forma experimental por medio de la situación representada por la figura 6.20. El amplificador tiene una fuente R_s. Como muestra la figura, se conecta un diodo al circuito del amplificador. El diodo se opera en la región limitada de temperatura para que su conductancia dinámica sea cero (resistencia dinámica cero). El valor cuadrático medio del voltaje de ruido de salida $v_{n_o}(t)$ se mide primero sin el diodo. La lectura N_{to} da la potencia de ruido total en la salida. A continuación, se conecta el diodo al circuito, como lo indica la figura 6.20. El diodo genera la corriente de ruido de disparo con espectro de densidad de potencia qI_d en donde I_d es la corriente de corriente directa que circula por el diodo. Ahora bien, la media cuadrática del voltaje de ruido de salida se incrementa. A continuación se ajusta el voltaje V_d hasta que el valor cuadrático medio del voltaje de ruido de salida sea $2N_{to}$, el doble de la lectura anterior (sin diodo). En estas condiciones, la corriente del diodo que se lee es I_d. Se puede demostrar fácilmente que el factor de ruido promedio $\bar{F}$ del amplificador está dado por

$$F = \frac{qI_d R_s}{2kT} \tag{6.61}$$

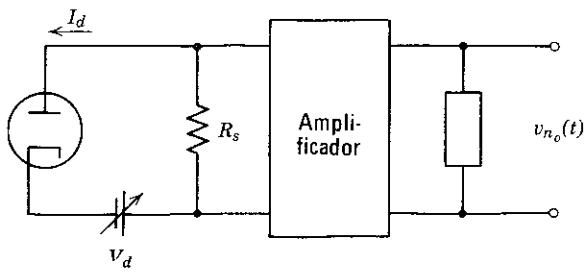


Figura 6.20

* E. G. Nielsen, *op. cit.*

Esto se demuestra así. El diodo tiene conductancia dinámica cero (estando en una región limitada de temperatura; véase la figura 6.5) y por lo tanto actúa como circuito abierto. En consecuencia, se puede reemplazar por una fuente de corriente de ruido con espectro de densidad de potencia $S_d(\omega)$ dado por (véanse la figura 6.6 y la ecuación 6.14)

$$S_d(\omega) = qI_d$$

Sin duda, la adición de esta fuente de ruido en la entrada incrementa en N_{to} la potencia de ruido en la salida. Por lo tanto, la potencia de ruido en la salida debido únicamente a la fuente de ruido de entrada con densidad de potencia qI_d es N_{to}. Para el amplificador (sin diodo), la fuente de ruido en la entrada es un resistor R_s que se puede representar por un resistor sin ruido R_s, en paralelo con una fuente de corriente de ruido (figura 6.9b), con densidad de potencia $2kTG_s(G_s = 1/R_s)$. Si una fuente de corriente en paralelo, con densidad de potencia qI_d, produce una potencia de ruido N_{to} en la carga, una fuente similar con densidad de potencia de $2kTG_s$ producirá la potencia de ruido

$$2kTG_s\left(\frac{N_{to}}{qI_d}\right)$$

en la carga. Pero, por definición, esto es N_{so}, la potencia de ruido en la carga, debida únicamente al ruido de la fuente.

$$N_{so} = \frac{2kTG_s N_{to}}{qI_d}$$

El factor de ruido promedio $\bar{F}$ es, por definición

$$\bar{F} = \frac{N_{to}}{N_{so}} = \frac{qI_d}{2kTG_s} = \frac{qI_d R_s}{2kT}$$

Nótese que este método produce el factor de ruido promedio $\bar{F}$. Si se desea obtener el factor de ruido espectral F, entonces la medición se debe efectuar en todo el intervalo de frecuencia considerando, cada vez, una banda angosta. Esto se puede hacer empleando un filtro de banda angosta sintonizable en la salida. Ahora bien, la medición (ecuación 6.61) representa el valor de F en la frecuencia central del filtro. Para obtener F en todo el intervalo se sintoniza el filtro de banda angosta a diferentes frecuencias hasta recorrer el intervalo de frecuencia deseado.

6.8 DENSIDAD DE POTENCIA Y DENSIDAD DE POTENCIA MAXIMA

En el estudio que hemos realizado, la potencia de una señal y la densidad de potencia se refieren a una carga normalizada resistiva de 1 ohm. La potencia P de una señal $f(t)$ se define como la potencia disipada por una fuente de voltaje $f(t)$ a través de un resistor de 1 ohm. Si este mismo

voltaje $f(t)$ se aplica a través de un resistor de R ohms, la potencia disipada será, desde luego, diferente. Para distinguir estas dos potencias, denotaremos la potencia normalizada (a través de 1 ohm) por P_n y la potencia disipada a través del resistor R por P_R. Se puede ver fácilmente que

$$P_R = \frac{P_n}{R} \tag{6.62}$$

Así, la potencia real disipada por una señal $f(t)$ a través de un resistor de 1 ohm es $1/R$ multiplicado por P_n, potencia de la señal $f(t)$ (definida por la ecuación 2.21a).

Lo que sea válido para la potencia, lo será para el espectro de densidad de potencia. La densidad de potencia representa la potencia disipada por ancho de banda unitario de las componentes de frecuencia de $f(t)$ a través de un resistor de 1 ohm. En consecuencia, la densidad de potencia es una densidad de potencia normalizada. Si esta misma señal $f(t)$ se aplica a un resistor de valor R, la densidad de potencia real disipada será $1/R$ multiplicado por la densidad de potencia de $f(t)$

$$\mathcal{S}_R(\omega) = \frac{\mathcal{S}_n(\omega)}{R} \tag{6.63}$$

en donde $\mathcal{S}_n(\omega)$ y $\mathcal{S}_R(\omega)$ representan la densidad de potencia de $f(t)$ (definida por la ecuación 2.22) y la densidad de potencia real disipada por $f(t)$ a través de R ohms.

Densidad de potencia máxima

Consideremos una fuente de voltaje $f(t)$ con densidad de potencia $\mathcal{S}_f(\omega)$ y una impedancia interna $R_s + jX_s$. Es bien conocido que para entregar la máxima potencia a una carga, la impedancia de carga debe ser complejo conjugado de la impedancia de la fuente (carga acoplada):

$$Z_L = Z_s^* = R_s - jX_s$$

En la figura 6.21 se muestra la condición de acoplamiento. Es evidente que en esta condición, $f(t)$ encuentra una resistencia de $2R_s$ ohms, y la densidad de potencia real disipada por $f(t)$ es $\mathcal{S}_f(\omega)/2R_s$. La mitad de esta potencia se disipa a través de la resistencia de la fuente y la mitad restante se entrega a la carga. Por lo tanto, la densidad de potencia real entregada a la carga es $\mathcal{S}_f(\omega)/4R_s$. Esta es la densidad de potencia máxima que se puede extraer de $f(t)$ mediante una fuente externa. Por esta razón, la llamaremos densidad de potencia máxima y quedará representada por $\mathcal{S}_{av}(\omega)$

$$\mathcal{S}_{av}(\omega) = \frac{\mathcal{S}_f(\omega)}{4R_s} \tag{6.64}$$

Insistimos, la densidad de potencia máxima es la densidad de potencia real que se puede extraer de una fuente dada. Para una fuente de voltaje

$f(t)$ con impedancia interna $R_s + jX_s$, la densidad de potencia máxima es $1/4R_s$ multiplicado por la densidad de potencia (normalizada) de $f(t)$. En general, R_s es función de ω y la ecuación 6.64 se debe expresar como

$$\mathcal{S}_{av}(\omega) = \frac{\mathcal{S}_f(\omega)}{4R_s(\omega)} \tag{6.65}$$

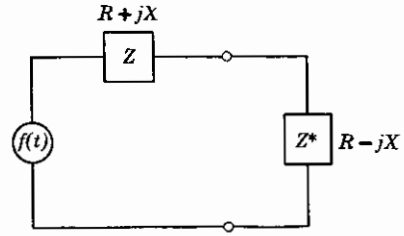


Figura 6.21

Se deja como ejercicio para el lector demostrar que para una fuente de corriente $i(t)$ con densidad de potencia $\mathcal{S}_i(\omega)$ y admitancia interna $Y = G_s(\omega) + jB_s(\omega)$, la densidad de potencia máxima $\mathcal{S}_{av}(\omega)$ está dada por

$$\mathcal{S}_{av}(\omega) = \frac{\mathcal{S}_i(\omega)}{4G_s} \tag{6.66}$$

Densidad de potencia máxima de un circuito *R-L-C*

Vamos a encontrar la densidad de potencia máxima, debida al ruido térmico, de un circuito pasivo constituido por elementos *R-L-C* únicamente. Tal circuito (figura 6.22) se puede representar por una impedancia equivalente $Z_{ab} = R_{ab}(\omega) + jX_{ab}(\omega)$. Mediante el teorema generalizado de Nyquist (ecuación 6.34b y figura 6.10b), el ruido térmico se puede representar por una fuente de voltaje con densidad de potencia de $2kTR_{ab}(\omega)$, como se muestra en la figura 6.22b. Para extraer la máxima potencia de ruido de este circuito debemos emplear una carga $R_{ab} - jX_{ab}$ a través de las terminales *ab*. La densidad de potencia máxima de esta fuente está dada por (ecuación 6.65)

$$\mathcal{S}_{av}(\omega) = \frac{2kTR_{ab}(\omega)}{4R_{ab}(\omega)} = \frac{kT}{2} \tag{6.67}$$

Este es un resultado sorprendente. Establece que la densidad de potencia máxima de ruido (térmico) de cualquier circuito pasivo *R-L-C* es constante y está dada por $kT/2$. En este estudio se supone que todos los resistores del circuito están a la misma temperatura T.

Nótese que la potencia de ruido máxima que puede extraerse de un circuito *R-L-C* en un ancho de banda Δf está dada por $2\,\Delta f(kT/2) = kT\,\Delta f$.

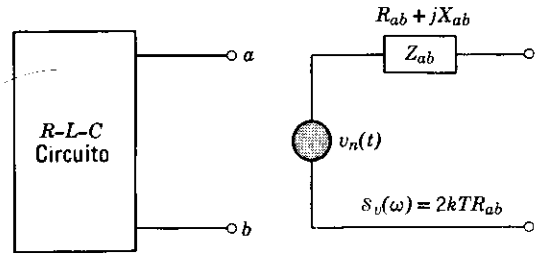


Figura 6.22

Así, kT representa la potencia de ruido (térmico) máxima por ancho de banda unitario de cualquier circuito *R-L-C* de dos terminales.

6.9 TEMPERATURA EFECTIVA DE RUIDO

Vimos en la sección 6.8 que la densidad de potencia máxima de cualquier circuito *R-L-C* de dos terminales es $kT/2$. Este resultado no se cumple en circuitos de dos terminales con fuentes de ruido que no es térmico (como el ruido de disparo). Sin embargo, es posible extender este resultado a todos los circuitos de dos terminales definiendo la temperatura efectiva de ruido T_n. Si la densidad de potencia de ruido máxima de cualquier circuito de dos terminales es $\mathcal{S}_{av}(\omega)$, definimos T_n, temperatura efectiva de ruido del circuito, como

$$\mathcal{S}_{av}(\omega) = \frac{kT_n}{2} \tag{6.68}$$

o sea,

$$T_n = \frac{2\mathcal{S}_{av}(\omega)}{k} \tag{6.69}$$

Si $\mathcal{S}_{av}(\omega)$ es constante en el intervalo de frecuencia que interesa, T_n también es constante, dada por la ecuación 6.69. Sin embargo, si $\mathcal{S}_{av}(\omega)$ varía con la frecuencia, T_n es función de la frecuencia ω. La potencia de ruido máxima de cualquier circuito de dos terminales en un ancho de banda Δf es $kT_n\,\Delta f$. Nótese que para un circuito que tan sólo contenga elementos *R-L-C*, la temperatura efectiva de ruido T_n es igual a la temperatura ambiente T del circuito.

6.10 FACTOR DE RUIDO EN TERMINOS DE LA GANANCIA MAXIMA

Hemos visto que el factor de ruido se puede expresar como la relación de los espectros de densidad de potencia de señal a ruido a la entrada dividido entre la de la salida (ecuación 6.47). También es posible expresar dicho factor en términos de las densidades de potencia máxima y de la ganancia de potencia máxima. Considérese, por ejemplo, la figura 6.23. En esta figura $\mathcal{S}_s(\omega)$ y $\mathcal{S}_n(\omega)$ representan respectivamente los espectros de densidad de potencia del voltaje de señal y de ruido. El ruido térmico debido a la impedancia de la fuente $Z_s(\omega) = R_s + jX_s$ queda representado por $\mathcal{S}_n(\omega)$ y, en consecuencia, $Z_s(\omega)$ en la figura 6.23 es no ruidosa. La relación de los espectros de densidad de potencia de señal a ruido a través de las terminales *ab* se representará por (S/N)

$$(S/N) = \frac{\mathcal{S}_s(\omega)}{\mathcal{S}_n(\omega)} \tag{6.70}$$

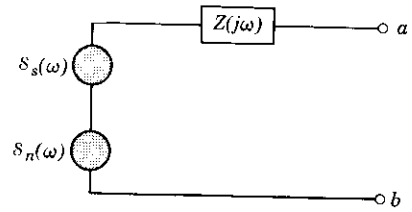


Figura 6.23

A continuación vamos a calcular la relación de los espectros de densidad de potencia máxima en las terminales *ab*. Como $s(t)$ y $n(t)$ son independientes, la densidad de potencia máxima debida a cada fuente se puede calcular si se supone que la otra es cero. Así, la densidad de potencia de señal máxima en las terminales *ab* es $\mathcal{S}_s(\omega)/4R_s$. De igual manera, la densidad de potencia de ruido máxima es $\mathcal{S}_n(\omega)/4R_s$. En consecuencia, $(S/N)_{av}$, relación de las densidades de potencia máxima de señal a ruido en las terminales *ab*, está dada por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{av} = \frac{\mathcal{S}_s(\omega)}{\mathcal{S}_n(\omega)} \tag{6.71}$$

Este es un resultado muy significativo. Establece que la relación de densidad de potencia de señal a ruido a través de cualesquiera terminales es la relación de densidad de potencia máxima (o máxima extraíble) de señal a ruido a través de las mismas terminales. En realidad, el resultado es mucho más general. Se puede demostrar fácilmente que la ecuación 6.71 es un caso particular de este resultado general en donde la impedancia de carga está acoplada a la impedancia de la fuente.

Podemos aprovechar el resultado encontrando el factor de ruido de un amplificador. El factor de ruido F de un amplificador está dado por (ecuación 6.47) la relación de la densidad de potencia de señal a ruido (S/N) en las terminales de entrada dividida entre la misma relación en las terminales de salida. Por la ecuación 6.71, es evidente que F también se puede expresar como la relación de las densidades de potencia máxima de señal a ruido en las terminales de entrada dividida entre la misma relación en las terminales de salida. Todo lo que se refiere a las densidades de potencia máxima lo designaremos por los subíndices av. Así, $(\mathcal{S}_{si})_{av}$ representa la densidad de potencia máxima de señal en las terminales de entrada. Ahora bien, (ecuación 6.47)

$$F = \frac{(\mathcal{S}_{si})_{av}/(\mathcal{S}_{nsi})_{av}}{(\mathcal{S}_{so})_{av}/(\mathcal{S}_{nto})_{av}}$$

$$= \frac{(\mathcal{S}_{si})_{av}(\mathcal{S}_{nto})_{av}}{(\mathcal{S}_{so})_{av}(\mathcal{S}_{nsi})_{av}} \tag{6.72}$$

Para un amplificador, definimos una ganancia en potencia máxima $\mathcal{G}$ como

$$\mathcal{G} = \frac{\text{Densidad de potencia máxima de señal a la salida}}{\text{Densidad de potencia máxima de señal a la entrada}} \tag{6.73a}$$

Así, tenemos que

$$\mathcal{G} = \frac{(\mathcal{S}_{so})_{av}}{(\mathcal{S}_{si})_{av}} \tag{6.73b}$$

Nótese que la ganancia en potencia máxima $\mathcal{G}$ generalmente es función de la frecuencia ω, y, por lo tanto, se puede representar como $\mathcal{G}(\omega)$. Al substituir la ecuación 6.73 en la ecuación 6.72, obtenemos

$$F = \frac{(\mathcal{S}_{nto})_{av}}{\mathcal{G}(\mathcal{S}_{nsi})_{av}} \tag{6.74}$$

en donde $(\mathcal{S}_{nto})_{av}$ es la densidad de potencia máxima de ruido en la salida y $(\mathcal{S}_{nsi})_{av}$ es la potencia de ruido máxima debida a la fuente en las terminales de entrada. Si la impedancia de la fuente es un circuito pasivo *R-L-C* de dos terminales, entonces de la ecuación 6.67 se deduce que

$$(\mathcal{S}_{nsi})_{av} = \frac{kT}{2} \tag{6.75}$$

Si la impedancia de la fuente contiene otras fuentes de ruido que no es térmico, entonces

$$(\mathcal{S}_{nsi})_{av} = \frac{kT_n}{2} \tag{6.76}$$

Si la impedancia de la fuente es un circuito pasivo *R-L-C*, entonces la ecuación 6.74 se transforma en

$$F = \frac{2(\mathcal{S}_{nto})_{av}}{\mathcal{G}kT} \tag{6.77}$$

Si la impedancia de la fuente contiene otras fuentes de ruido que no es térmico, en la ecuación 6.77 se debe reemplazar la temperatura T por la temperatura efectiva de ruido T_n.

Por la ecuación 6.77, obtenemos

$$(\mathcal{S}_{nto})_{av} = \frac{F\mathcal{G}kT}{2} \tag{6.78}$$

Así, la densidad de potencia máxima de ruido en las terminales de salida está dada por $F\mathcal{G}kT/2$. Nótese que $(\mathcal{S}_{nto})_{av}$ se compone de dos términos:

1. La componente $(\mathcal{S}_{nso})_{av}$ es la densidad de potencia máxima de ruido en las terminales de salida debida al ruido en la fuente.
2. La componente $(\mathcal{S}_{nao})_{av}$ es la densidad de potencia máxima de ruido en las terminales de salida debida al ruido generado en el amplificador.

En consecuencia,

$$(\mathcal{S}_{nto})_{av} = (\mathcal{S}_{nso})_{av} + (\mathcal{S}_{nao})_{av} \tag{6.79}$$

Además, de la ecuación 6.73a se desprende que

$$(\mathcal{S}_{nso})_{av} = \mathcal{G}(\mathcal{S}_{nsi})_{av} = \frac{\mathcal{G}kT}{2} \tag{6.80}$$

Por lo tanto, por las ecuaciones 6.78 a 6.80, obtenemos

$$(\mathcal{S}_{nao})_{av} = (F - 1)\frac{\mathcal{G}kT}{2} \tag{6.81}$$

Así, la densidad de potencia máxima de ruido en las terminales de salida debida al ruido del amplificador es $(F - 1)$ $(\mathcal{G}kT/2)$.

6.11 ETAPAS EN SERIE

Cuando el amplificador consta de más de una etapa, su factor de ruido se puede calcular en términos de los factores de ruido de las etapas individuales. Es intuitivamente obvio que el ruido generado en las etapas anteriores se amplifica en las siguientes etapas y, en consecuencia, el factor de ruido de la primera etapa es mucho más importante en la determinación del factor de ruido total del amplificador. Como ejemplo, considérese el amplificador de dos etapas de la figura 6.24. Los dos amplificadores, tienen ganancias respectivas de potencia máxima $\mathcal{G}_a$ y $\mathcal{G}_b$.

Para determinar F_{ab}, el factor de ruido total del amplificador serie, primero determinamos $(\mathcal{S}_{nto})_{av}$, la potencia de ruido total máxima en las terminales de salida. Esta consiste de dos componentes: $\mathcal{S}_1$, densidad de potencia de ruido total máxima en la salida debida a la primera etapa y $\mathcal{S}_2$, potencia de ruido máxima en la salida debida a la segunda etapa de ruido. Es claro que la componente $\mathcal{S}_1$ es $\mathcal{G}_b$ multiplicada por la potencia de ruido total máxima en la entrada de la segunda etapa. Pero la potencia de ruido

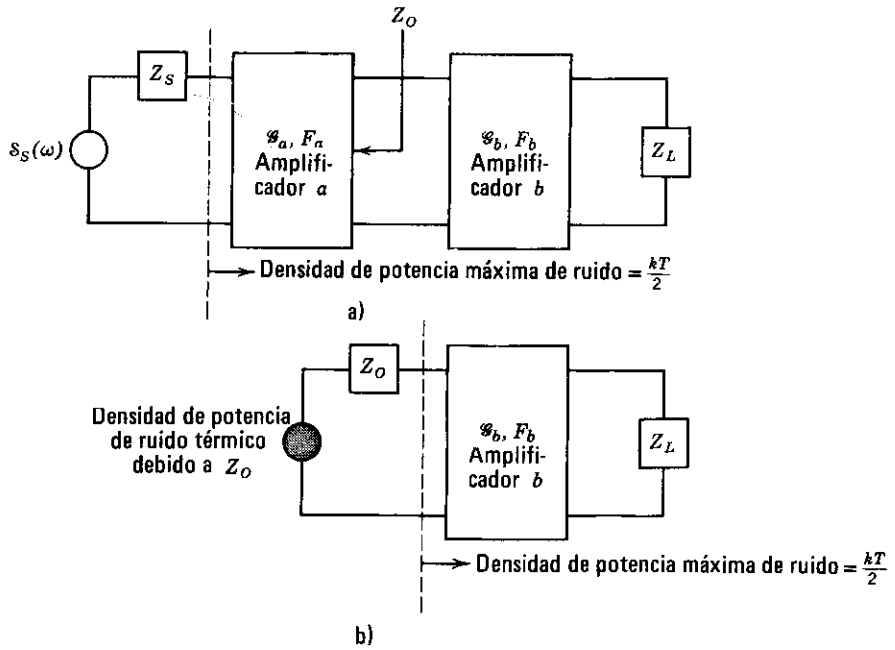


Figura 6.24

máxima en la entrada de la segunda etapa es la potencia de ruido total máxima en la salida de la primera etapa. Por consiguiente (ecuación 6.78).

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{G}_b \frac{F_a \mathcal{G}_a kT}{2} \tag{6.82}$$

$\mathcal{S}_2$ también es la potencia de ruido máxima en la salida debida tan sólo a la segunda etapa (figura 6.24). La impedancia de la fuente en la segunta etapa es la impedancia encontrada en las terminales de salida de la primera etapa. Sea Z_O esta impedancia. La componente de ruido $\mathcal{S}_2$ se debe a las fuentes de ruido de la segunda etapa únicamente, siendo indiferente que Z_O, la impedancia equivalente de la fuente, sea o no térmica. Supondremos, por conveniencia, que Z_O es una impedancia térmica, así que su densidad de potencia máxima es $kT/2$. Nótese que esta suposición es indiferente para el cálculo de $\mathcal{S}_2$ siempre y cuando se mantenga su consistencia.

Sea F_b el factor de ruido del amplificador b en la condición que muestra la figura 6.24b. Se debe recordar que estamos calculando F_b con la suposición de que Z_O, impedancia de la fuente para el amplificador, es térmica. La densidad de potencia de ruido máxima en la salida debida al amplificador b solamente es $\mathcal{S}_2$ y está dada por (ecuación 6.81)

$$\mathcal{S}_2 = \frac{(F_b - 1)\mathcal{G}_b kT}{2} \tag{6.83}$$

Por lo tanto

$$(\mathcal{S}_{\text{nto}})_{\text{av}} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$$

$$= \frac{kT}{2}\left[(F_b - 1)\mathcal{G}_b + F_a \mathcal{G}_a \mathcal{G}_b\right] \tag{6.84}$$

Pero a partir de la ecuación 6.78,

$$(\mathcal{S}_{\text{nto}})_{\text{av}} = \frac{F_{ab}\mathcal{G}_{ab}kT}{2} \tag{6.85}$$

en donde $\mathcal{G}_{ab}$ es la ganancia máxima del amplificador en serie. Se puede ver fácilmente, por la definición de ganancia máxima, que la ganancia de las etapas en serie es igual al producto de las ganancias de las etapas individuales,

$$\mathcal{G}_{ab} = \mathcal{G}_a \mathcal{G}_b$$

Por lo tanto,

$$(\mathcal{S}_{\text{nto}})_{\text{av}} = \frac{F_{ab}\mathcal{G}_a \mathcal{G}_b kT}{2} \tag{6.86}$$

Al comparar las ecuaciones 6.84 y 6.86 obtenemos

$$F_{ab} = F_a + \frac{F_b - 1}{\mathcal{G}_a} \tag{6.87}$$

Se debe recordar que F_b es el factor de ruido del amplificador b bajo la condición de que su fuente sea una impedancia pasiva Z_O igual a la impedancia de salida del amplificador a.

En general, para un amplificador de varias etapas

$$F = F_a + \frac{F_b - 1}{\mathcal{G}_a} + \frac{F_c - 1}{\mathcal{G}_a \mathcal{G}_b} + \cdots \tag{6.88}$$

Es evidente, por la ecuación 6.88, que la primera etapa es lo más importante para determinar el factor de ruido de un amplificador. En consecuencia, en amplificadores de bajo ruido la consideración primordial en el diseño de la primera etapa consiste en obtener un factor de ruido bajo aun a costa de la ganancia.

Ejemplo 6.7

Encontrar el factor de ruido del amplificador de dos etapas de la figura 6.25. Ambos tubos son idénticos, con parámetros $g_m = 2.5 \times 10^{-3}$ mhos y $r_p = 10{,}000$ ohms.

En el intervalo de frecuencia que interesa, se puede suponer como corto circuito el capacitor de acoplamiento. Por conveniencia, dividiremos arbitrariamente en dos etapas al amplificador como muestran los cuadros punteados de la figura 6.25. Primero, encontraremos los factores de ruido F_a y F_b de los dos amplificadores. Esto se puede obtener fácilmente por la ecuación 6.51. Para el amplificador a,

$$R_{\text{eq}} = \frac{2.5}{2.5} \times 10^3 = 1000$$

$$R_s = 1000 \qquad \text{y} \qquad R_g = 100{,}000 \text{ ohms}$$

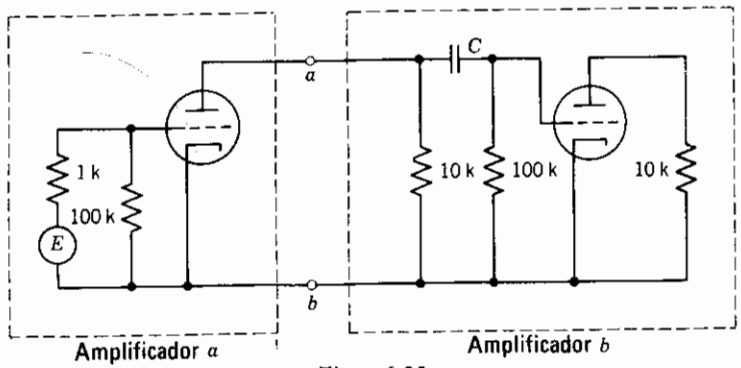


Figura 6.25

Substituimos estos valores en la ecuación 6.51, obteniendo

$$F_a = 2.03$$

Para el amplificador b

$$R_{eq} = \frac{2.5}{2.5} \times 10^{-3} = 1000$$

R_g es el paralelo 10,000 ohms y 100,000 ohms. Así, $R_g = 9100$ ohms. La impedancia de la fuente para el amplificador b es la impedancia de salida a y está dada por la resistencia de placa r_p del primer tubo. Así

$$R_s = r_p = 10{,}000 \text{ ohms}$$

Al substituir estos valores en la ecuación 6.51, obtenemos

$$F_b = 2.54$$

En seguida, calculamos la ganancia en potencia máxima del amplificador a. La ganancia máxima $\mathcal{G}$ de un amplificador está dada por la ecuación 6.73a. Nótese que a cualquier frecuencia la ganancia máxima $\mathcal{G}$ también se puede expresar como

$$\mathcal{G} = \frac{\text{Potencia máxima de señal en la carga}}{\text{Potencia máxima de señal en la fuente}} \tag{6.89}$$

Considérese un amplificador a, que tiene una resistencia de fuente de 1000 ohms. Si el voltaje de señal es E volts, entonces la potencia máxima se obtiene conectando 1000 ohms a través de las terminales de la fuente. Es indudable que la potencia máxima es

$$\left(\frac{E}{2000}\right)^2 1000 = \frac{E^2}{4000} \text{ watts} \tag{6.90}$$

El circuito equivalente de las terminales de salida del amplificador a se muestra en la figura 6.26.

La corriente equivalente de la fuente tiene una magnitud de $g_m e_g$ en donde e_g es el voltaje en la reja del primer tubo. De la figura 6.25 deducimos que

$$e_g = \frac{100}{101} E$$

y que

$$g_m e_g = 2.5 \times 10^{-3} \times \frac{100}{101} E \simeq 2.5 \times 10^{-3} E$$

La potencia máxima en las terminales de la carga ab es la potencia entregada a la impedancia acoplada en la carga. Esto ocurre cuando la carga en las terminales ab es 10,000 ohms y la potencia de salida en estas condiciones es

$$\left(\frac{g_m e_g}{2}\right)^2 (10{,}000) = 1.56 \times 10^{-2} E^2 \tag{6.91}$$

Por las ecuaciones 6.90 y 6.91, obtenemos

$$\mathcal{G}_a = \frac{1.56 \times 10^{-2}}{E^2/4000} = 62.4 \tag{6.92}$$

El factor de ruido total F_{ab} está dado por

$$\begin{aligned} F_{ab} &= F_a + \frac{F_b - 1}{a} \\ &= 2.03 + \frac{1.54}{62.4} \\ &= 2.03 + 0.0247 \\ &= 2.0547 \\ &\simeq F_a \end{aligned}$$

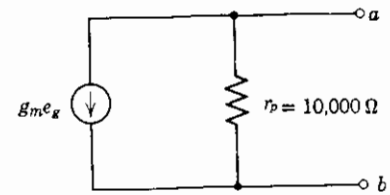


Figura 6.26

6.12 AMPLIFICADOR CASCODE

A partir del estudio de la sección 6.11, es evidente que en un amplificador con etapas en serie el factor de ruido total está determinado primordialmente por la ganancia de la primera etapa. Este se reduce incrementando la ganancia de la primera etapa. En amplificadores de paso de banda, el incremento de la ganancia puede causar inestabilidad. En consecuencia, no se puede incrementar la ganancia por encima de cierto límite sin poner en peligro la estabilidad. Sin embargo, al analizar cuidadosamente la ecuación 6.88, vemos que la ganancia $\mathcal{G}_a$ no es la ganancia de voltaje de la etapa sino la ganancia potencia máxima. Es posible diseñar un amplificador que tenga una ganancia en potencia máxima muy alta y al mismo tiempo una ganancia en voltaje baja. Tal diseño de la primera etapa reduce el factor de ruido total sin correr riesgos de inestabilidad. Este es el principio del amplificador cascode. En este amplificador, la primera etapa se diseña para

producir una ganancia en potencia máxima muy alta, mientras que la ganancia en voltaje es muy baja.*

APENDICE: DEMOSTRACION DEL TEOREMA GENERALIZADO DE NYQUIST

Considérese un circuito de dos terminales pasivo bilateral lineal (figura A6.1a) que contiene n resistores $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Cada uno de estos resistores quedará representado por un resistor no ruidoso en paralelo con su fuente de corriente de ruido

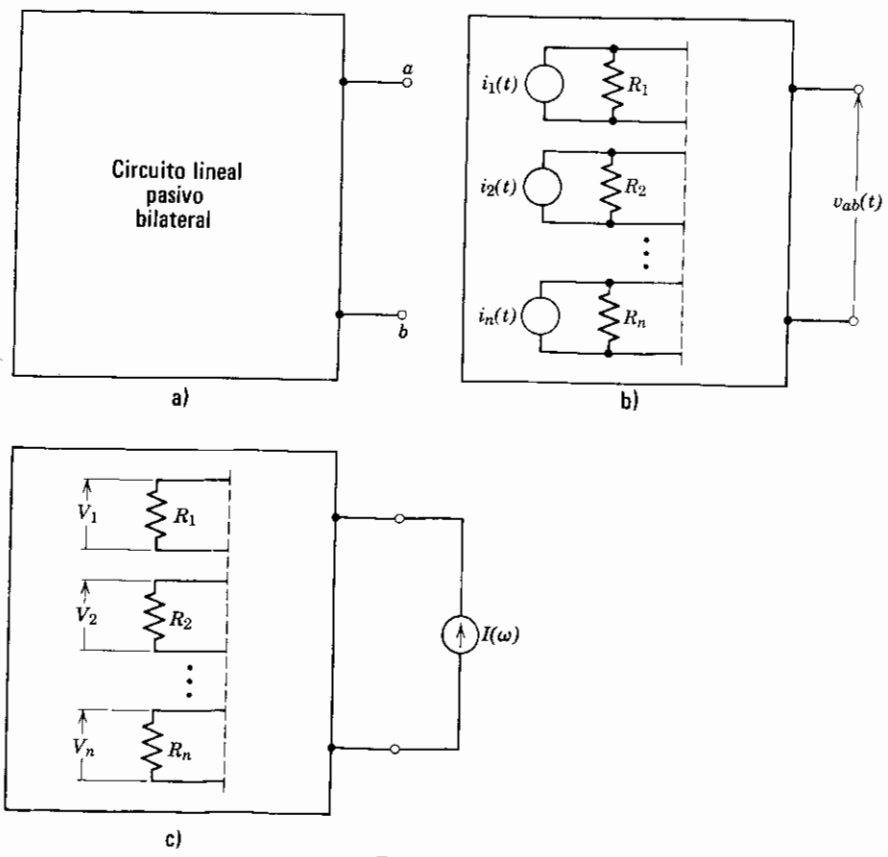


Figura A6.1

térmico, como se muestra en la figura A6.1b. Sea $H_k(\omega)$ la función de transferencia que relaciona al voltaje $v_{ab}(t)$, voltaje a través de las terminales ab, con la corriente de la fuente $i_k(t)$. El espectro de densidad de potencia de la corriente de la fuente $i_k(t)$ es

$$2kTG_k = \frac{2kT}{R_k}$$

* Para estudiar un ejemplo de un amplificador cascode de tubos al vacío, el lector puede referirse a J. M. Pettit y M. M. McWhorter, Electronic Amplifier Circuits, McGraw-Hill, New York, 1961.

Como todas las fuentes de corriente son independientes, $S_o(\omega)$, espectro de densidad de potencia del voltaje de salida en las terminales ab, está dado por (véase la sección 6.4)

$$S_o(\omega) = \sum_{k=1}^{n} |H_k(\omega)|^2 \frac{2kT}{R_k}$$

$$= 2kT \sum_{k=1}^{n} \frac{|H_k(\omega)|^2}{R_k} \tag{A6.1}$$

Vamos a demostrar que si $Z_{ab}(\omega)$ es la impedancia vista a través de las terminales ab, entonces

$$R_{ab}(\omega) = Re\,[Z_{ab}(\omega)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{|H_k(\omega)|^2}{R_k} \tag{A6.2}$$

Se deducirá entonces que

$$S_o(\omega) = 2kTR_{ab}(\omega) \tag{A6.3}$$

Este es el postulado del teorema generalizado de Nyquist.

Para demostrar la ecuación A6.2 consideramos el mismo circuito y le aplicamos una corriente sinusoidal de amplitud I y de frecuencia ω a través de las terminales ab (figura A6.1c). Denotaremos esta corriente por $I(\omega)$. Sea $V_k(\omega)$ el voltaje sinusoidal que aparece a través del resistor R_k que corresponde a esta corriente, como se ilustra en la figura A6.1c. Como el sistema es lineal y bilateral, se aplica el teorema de reciprocidad, obteniendo

$$\frac{V_k(\omega)}{I(\omega)} = H_k(\omega) \tag{A6.4}$$

Por lo tanto, la potencia neta que se disipa en el resistor R_k es

$$P_k = \frac{1}{2} \frac{|V_k(\omega)|^2}{R_k}$$

Por lo que, la potencia total P_t que se disipa en el circuito es

$$P_t = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{|V_k(\omega)|^2}{R_k}$$

Al aplicar la ecuación A6.4 en esta ecuación, resulta

$$P_t = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{|H_k(\omega)|^2}{R_k} |I(\omega)|^2$$

$$= \tfrac{1}{2}|I(\omega)|^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{|H_k(\omega)|^2}{R_k}$$

La potencia total que se disipa en el circuito es igual a la potencia total suministrada por $I(\omega)$ al circuito. Pero la potencia suministrada por $I(\omega)$ está dada por

$$\tfrac{1}{2}|I(\omega)|^2 R_{ab}(\omega)$$

en donde $R_{ab}(\omega) = Re[Z_{ab}(\omega)]$. Evidentemente

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|H_k(\omega)|^2}{R_k} = R_{ab}(\omega) = Re\,[Z_{ab}(\omega)]$$

Así, se ha demostrado la ecuación A6.2 y, en consecuencia, el teorema generalizado de Nyquist.

PROBLEMAS

1. Deducir el valor cuadrático medio de la corriente de ruido en un circuito *R-L*.

2. Determinar el espectro de densidad de potencia de la corriente de ruido que circula a través de un circuito *R-L-C*.

3. Dos resistores de 100 ohms cada uno están a temperaturas respectivas de 300 y 400°K. Encontrar el espectro de densidad de potencia de voltaje en las terminales de la combinación serie de estos resistores.

4. Repetir el problema 3 si los resistores se encuentran en paralelo.

5. Determinar el voltaje de ruido raíz cuadrático medio a través de las terminales de salida de un circuito sin ruido (figura P-6.5) cuando se conecta un resistor de 1 k a través de las terminales de entrada y si la función de transferencia en ganancia de voltaje del circuito representa lo siguiente:

a) Un filtro ideal de paso bajo con frecuencia de corte f_c Hz.

b) Un filtro ideal de paso de banda con banda de paso de f_c Hz centrada en f_o.

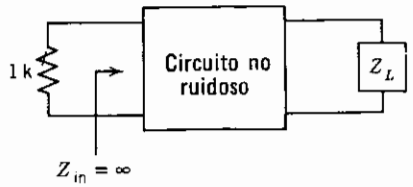


Figura P-6.5

c) Un filtro exponencial, $H(\omega) = Ae^{-|\omega|/\omega_c}$.

d) Un filtro gaussiano, $H(\omega) = Ae^{-\omega^2/\omega_c{}^2}$

Se supone que la impedancia de entrada del circuito es infinita. No se debe considerar la aportación de ruido debida a la impedancia de carga Z_L.

6. Repetir el problema 5 si, además de un resistor de 1000 ohms, se conecta un diodo a través de las terminales de entrada como se muestra en la figura P-6.6. Suponga el lector que el diodo está en la región limitada de carga espacial con una resistencia dinámica de 6000 ohms y que la temperatura del cátodo es de 1000°K.

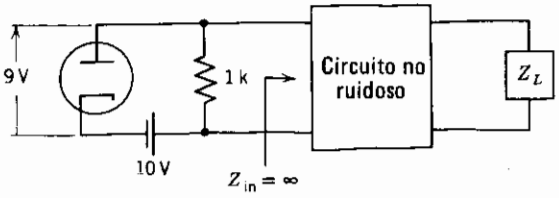


Figura P-6.6

7. *a*) Determinar el espectro de densidad de potencia del voltaje de ruido a través de las terminales *aa'* del circuito resistivo de la figura P-6.7 por los dos métodos siguientes.

1) Calculando el espectro de densidad de potencia de ruido a través de *aa'* como la suma de los espectros de densidad de potencia de ruido a través de *aa'* debidos a cada uno de los tres resistores.

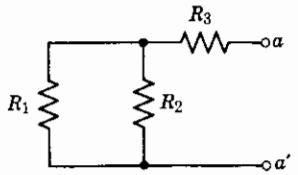


Figura P-6.7

2) Calculando la resistencia equivalente $R_{aa'}$ a través de *aa'* para encontrar el espectro de densidad de potencia $2kTR_{aa'}$.

b) Determinar el espectro de densidad de potencia del voltaje de ruido a través de las terminales *aa'* si los resistores R_1, R_2 y R_3 están a las distintas temperaturas T_1, T_2 y T_3, respectivamente.

8. Determinar el espectro de densidad de potencia y el voltaje de ruido rms a través de las terminales de salida *aa'* del filtro de paso bajo de la figura P-6.8. Este filtro se conoce como el filtro de Butterworth de tercer orden.

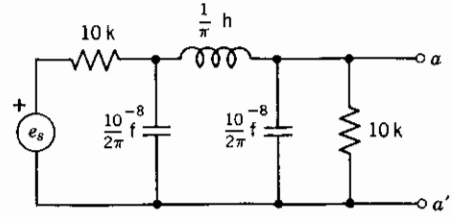


Figura P-6.8

9. Encontrar el voltaje de ruido raíz cuadrático medio a través de las terminales *bb'* para cada uno de los circuitos de la figura P-6.9 por los dos métodos siguientes:

a) Calculando el espectro de densidad de potencia en *bb'* como la suma de los espectros de densidad de potencia debidos a cada uno de los resistores.

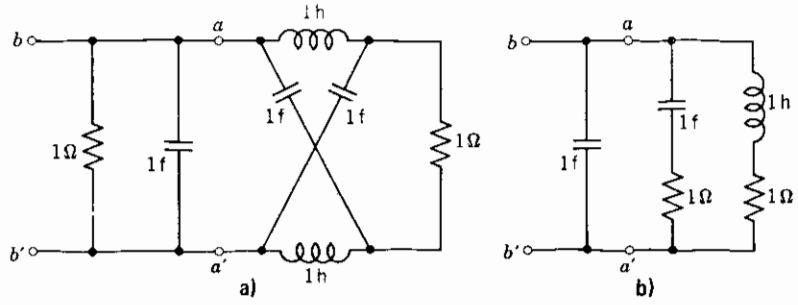


Figura P-6.9

b) Reemplazando el circuito de la derecha de las terminales aa' por una imitancia equivalente y empleando la ecuación 6.34.

10. Determinar el espectro de densidad de potencia del voltaje de ruido a través de las terminales aa' de los circuitos que se muestran en la figura P-6.10.

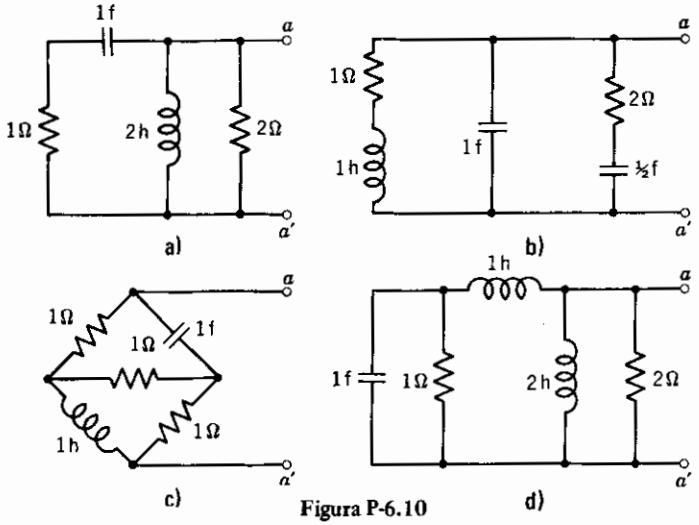


Figura P-6.10

11. Demostrar que el ancho de banda de ruido equivalente del filtro Butterworth del problema 8 referido a corriente directa ($f_0 = 0$) es $(10^4\pi/3)$ Hz.

12. *a*) Calcular el ancho de banda de ruido equivalente de los circuitos referido a la frecuencia cero si se sabe que

$$\begin{aligned} H(\omega) &= (1) \quad Ae^{-\alpha|\omega|} \\ &= (2) \quad Ae^{-\alpha\omega^2} \\ &= (3) \quad Sa(\omega t_0) \\ &= (4) \quad G_{2W}(\omega) \end{aligned}$$

b) Calcular el ancho de banda de ruido equivalente referido a ω_0 si

$$H(\omega) = Sa[(\omega - \omega_0)t_0] + Sa[(\omega + \omega_0)t_0]$$

13. En las terminales de salida de un amplificador triodo se conecta un filtro de Butterworth de tercer orden (descrito en el problema 8). La resistencia de la fuente es

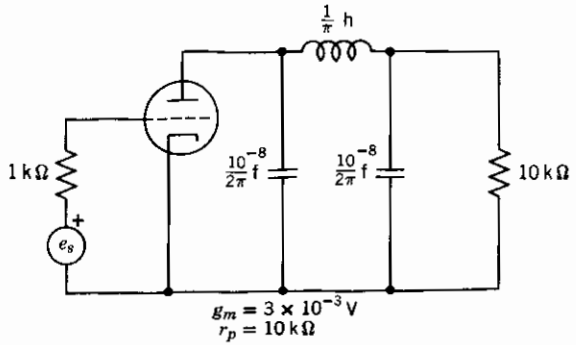


Figura P-6.13

1000 ohms. Determinar el valor rms del voltaje de ruido a través de la carga. Determinar los factores de ruido espectral y promedio del amplificador. Se sabe que $g_m = 3000$ μmhos y $r_p = 10{,}000$ ohms.

14. Encontrar el factor de ruido del amplificador en cascada de la figura 6.25 por el método directo que emplea la definición de factor de ruido de la ecuación 6.44.

15. Demostrar que los factores de ruido de los amplificadores del tipo de cátodo común, reja común y placa común son aproximadamente iguales.

16. Demostrar que si la temperatura efectiva de ruido de la fuente es constante, independiente de la frecuencia, entonces el factor de ruido promedio $\bar{F}$ de un amplificador está dado por

$$\bar{F} = \frac{\int_0^\infty F\mathcal{G}_a\, df}{\int_0^\infty \mathcal{G}_a\, df}$$

en donde $\mathcal{G}_a$ es la ganancia en potencia máxima del amplificador.

17. Determinar el factor de ruido del amplificador del ejemplo 6.4 del texto, mediante la ecuación 6.77 o la ecuación 6.81.

CAPITULO 7

Comportamiento de los sistemas de comunicación

En los capítulos 3 a 5 se estudiaron algunos métodos de procesamiento de señales (modulación). Se observó que algunos sistemas son menos inmunes al ruido que otros; pero este atributo conveniente requiere de mayor ancho de banda para la transmisión de señales. Hasta aquí, estas conclusiones se han cimentado en fundamentos cualitativos. En este capítulo, se obtendrá, para diferentes sistemas, la relación cuantitativa entre la razón señal a ruido (medida de la inmunidad del sistema al ruido) y el ancho de banda correspondiente de transmisión. Se observará que al procesar una señal para que ocupe un mayor ancho de banda, generalmente se vuelve más inmune a la interferencia del ruido exterior.

Empezaremos por estudiar un método para representar señales de ruido.

7.1 REPRESENTACION DEL RUIDO PASO-BANDA

En capítulos anteriores observamos que, después de la modulación, las señales tienen un espectro dentro de cierta banda. En el proceso de su transmisión, las señales resultan afectadas por ruido de banda ancha (generalmente ruido blanco). El primer paso evidente, en el receptor, es filtrar la señal de entrada de cualquier ruido contenido fuera de la banda de señal útil. La salida de este filtro de paso de banda es la señal que interesa (modulada) más el ruido dentro de la banda. La salida del demoduládor consta de la señal útil más el ruido debido al ruido en la banda de paso, presente en la entrada del demodulador. Como, en general, al evaluar el ruido a la salida, tenemos que tratar con ruido de paso de banda, es conveniente establecer una forma de representar estas señales.

Considérese un ruido de paso de banda $n(t)$ con espectro de densidad de potencia $S_n(\omega)$, como se ilustra en la figura 7.1. Demostraremos en seguida

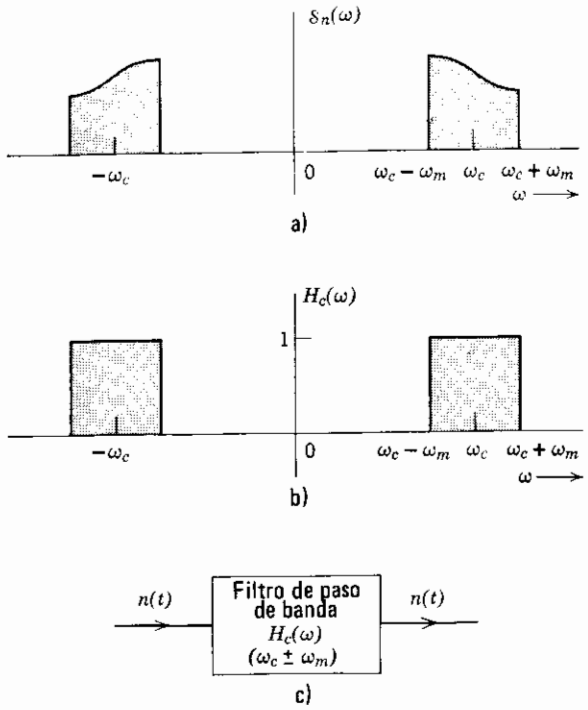


Figura 7.1

que una señal aleatoria de ruido de paso de banda $n(t)$ se puede expresar como

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \operatorname{sen} \omega_c t \tag{7.1}$$

en donde $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son señales de baja frecuencia de banda limitada a ω_m radianes por segundo, siendo las potencias (valores cuadráticos medios) de $n(t)$, $n_c(t)$ y $n_s(t)$ iguales; es decir

$$\overline{n^2(t)} = \overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} \tag{7.2}$$

Para comprobar este resultado, observemos que al transmitir $n(t)$ por el filtro de paso de banda ideal de la figura 7.1b se conserva la señal $n(t)$ a la salida. Es decir, se puede transmitir la señal $n(t)$ a través de tal filtro sin ninguna modificación de ésta como muestra la figura 7.1c.

A continuación mostraremos que el filtro de paso de banda ideal $H_c(\omega)$ de la figura 7.1b se puede obtener con el arreglo de la figura 7.2a El filtro $H_0(\omega)$ de la figura 7.2a. es un filtro de paso bajo ideal con frecuencia de corte ω_m como se ilustra en la figura 7.2b. La comprobación es bastante simple. Apliquemos un impulso retrasado $\delta(t-\tau)$ a la entrada del sistema de la figura 7.2a. Ahora, demostraremos que la salida estará dada por $h_0(t-\tau)\cos\omega_c(t-\tau)$ en donde $h_0(t)$ es la respuesta al impulso unitario

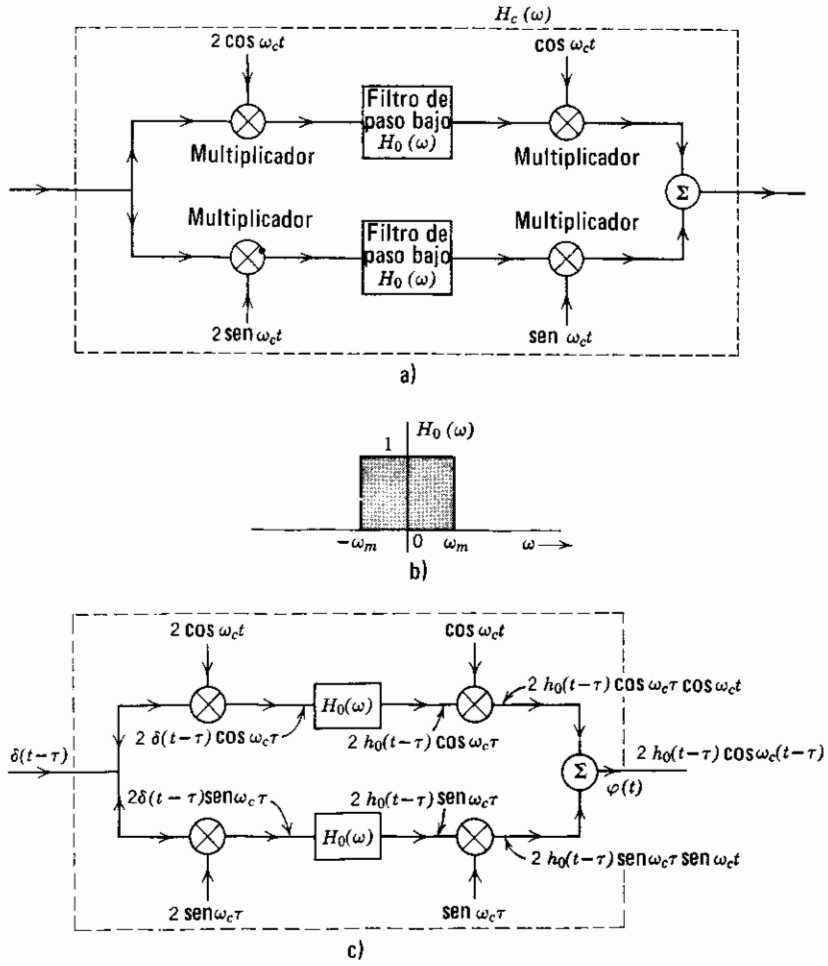


Figura 7.2

del filtro de paso bajo de la figura 7.2b. El sistema de la figura 7.2a se reproduce en la figura 7.2c con $\delta(t-\tau)$ como señal de entrada. Observamos que

$$\delta(t-\tau)\cos\omega_c t = \delta(t-\tau)\cos\omega_c\tau$$

y

$$\delta(t-\tau)\operatorname{sen}\omega_c t = \delta(t-\tau)\operatorname{sen}\omega_c\tau$$

Por lo tanto, es evidente que las entradas a los filtros superior e inferior de la figura 7.2c son $2\delta(t-\tau)\cos\omega_c\tau$ y $2\delta(t-\tau)\operatorname{sen}\omega_c\tau$, respectivamente. Si $h_o(t)$ es la respuesta al impulso de cualquiera de los filtros de paso bajo, entonces $h_o(t-\tau)$ es la respuesta de estos filtros a $\delta(t-\tau)$. Sin duda, las salidas respectivas de estos filtros serán

$$,2h_o(t-\tau)\cos\omega_c\tau \qquad \text{y} \qquad 2h_o(t-\tau)\operatorname{sen}\omega_c\tau,$$

Dichas salidas se multiplican después por $\cos \omega_c t$ y $\operatorname{sen} \omega_c t$, y, finalmente, se suman. Es claro que la señal de salida final $\varphi(t)$ será

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= 2h_o(t-\tau)(\cos\omega_c\tau\cos\omega_c t + \operatorname{sen}\omega_c\tau\operatorname{sen}\omega_c t)\\ &= 2h_o(t-\tau)\cos\omega_c(t-\tau)\end{aligned} \tag{7.3}$$

Demostraremos, a continuación, que la respuesta del filtro de paso de banda ideal de la figura 7.1b a $\delta(t-\tau)$ es igual a $\varphi(t)$ de la ecuación 7.3. Se puede deducir fácilmente del teorema de la modulación (ecuación 1.11a) que si la respuesta al impulso de $H_o(\omega)$ de la figura 7.2b es $h_o(t)$, entonces la respuesta al impulso de $H_c(\omega)$(figura 7.1b) está dada por $h_c(t)$ en donde

$$h_c(t) = 2h_o(t)\cos\omega_c t$$

Sin duda, la respuesta de este filtro a $\delta(t-\tau)$ será*

$$2h_o(t-\tau)\cos\omega_c(t-\tau)$$

Esto es igual a la respuesta $\varphi(t)$ de la ecuación 7.3. En consecuencia, el sistema de la figura 7.2a equivale a un filtro de paso de banda ideal.

Si aplicamos una señal de ruido de paso de banda $n(t)$ (figura 7.1a) a la entrada del sistema de paso de banda ideal de la figura 7.3, la salida debe ser $n(t)$. Si representamos las salidas de los respectivos filtros de paso de banda superior e inferior de la figura 7.3 por $n_c(t)$ y $n_s(t)$, entonces es evidente que

$$n(t) = n_c(t)\cos\omega_c t + n_s(t)\operatorname{sen}\omega_c t \tag{7.4}$$

Las señales $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son las salidas de filtros de paso bajo (de banda limitada a ω_m). En consecuencia $n_c(t)$ y $n_s(t)$ constituyen señales de baja frecuencia, cada una limitada en banda a ω_m radianes por segundo. En seguida, encontraremos los espectros de densidad de potencia de $n_c(t)$ y de $n_s(t)$. Se puede ver a partir de la figura 7.3, que $n_c(t)$ es la respuesta del filtro de paso bajo $H_0(\omega)$ a la señal de entrada $2n(t)\cos\omega_c t$. Si $\mathcal{S}_n(\omega)$ es la densidad de potencia de $n(t)$, entonces la densidad de potencia de $n(t)\cos\omega_c t$ está dada por** (ecuación 2.24b)

$$\tfrac{1}{4}[\mathcal{S}_n(\omega+\omega_c) + \mathcal{S}_n(\omega-\omega_c)] \tag{7.5}$$

y la densidad de potencia de $2n(t)\cos\omega_c t$ es, desde luego,

$$(4)\tfrac{1}{4}[\mathcal{S}_n(\omega+\omega_c) + \mathcal{S}_n(\omega-\omega_c)] = \mathcal{S}_n(\omega+\omega_c) + \mathcal{S}_n(\omega-\omega_c) \tag{7.6}$$

* Aquí comparamos la respuesta de los dos sistemas al impulso retardado $\delta(t-\tau)$ en lugar del impulso $\delta(t)$ para determinar la invariabilidad en tiempo del sistema en la figura 7.2a. Como el sistema de la figura 7.2a se compone de elementos que varían con el tiempo, la comparación de la respuesta al impulso puede ser válida únicamente si se descubre que el sistema no varía con el tiempo. La comparación de la respuesta al pulso retardado (para todos los valores de τ) asegura la equivalencia.

** Este resultado es cierto sólo si $n(t)$ es una señal aleatoria. Si no lo es, existe la posibilidad de un espectro adicional alrededor de $\omega = 0$.

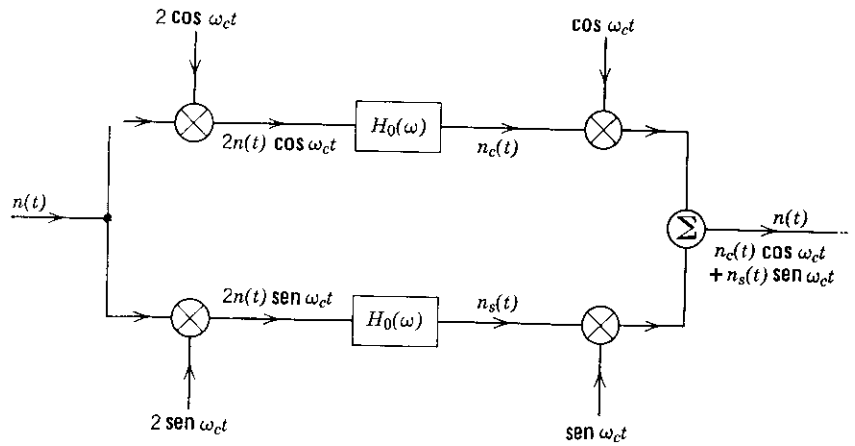


Figura 7.3

Los espectros de: $\mathcal{S}_n(\omega)$, $\mathcal{S}_n(\omega+\omega_c)$, $\mathcal{S}_n(\omega-\omega_c)$ y $[\mathcal{S}_n(\omega+\omega_c) + \mathcal{S}_n(\omega-\omega_c)]$ se muestran en la figura 7.4. El espectro de $2n(t)\cos\omega_c t$, $[\mathcal{S}_n(\omega+\omega_c) + \mathcal{S}_n(\omega-\omega_c)]$ (figura 7.4d), pasa por un filtro de paso bajo ideal $H_0(\omega)$ (figura 7.3) que suprime todas las frecuencias superiores a ω_m ($|\omega| > \omega_m$). El espectro resultante es el espectro de densidad de potencia de $n_c(t)$, que se muestra en la figura 7.4e. Es evidente que $\mathcal{S}_{n_c}(\omega)$, el espectro de densidad de potencia de $n_c(t)$, está dada por

$$\mathcal{S}_{n_c}(\omega) = \begin{cases}\mathcal{S}_n(\omega+\omega_c) + \mathcal{S}_n(\omega-\omega_c) & |\omega| < \omega_m\\ 0 & |\omega| > \omega_m\end{cases} \tag{7.7}$$

En la misma forma, se puede ver por la ecuación 2.24c y la figura 7.3 que $\mathcal{S}_{n_s}(\omega)$, espectro de densidad de potencia de $n_s(t)$, es idéntico a $\mathcal{S}_{n_c}(\omega)$.

$$\mathcal{S}_{n_c}(\omega) = \mathcal{S}_{n_s}(\omega) \tag{7.8a}$$

Nótese que cuando $\mathcal{S}_n(\omega)$ es ruido blanco con densidad de potencia $\mathcal{N}/2$,

$$\mathcal{S}_{n_c}(\omega) = \mathcal{S}_{n_s}(\omega) = \begin{cases}\mathcal{N} & |\omega| < \omega_m\\ 0 & \text{en cualquier otro punto}\end{cases} \tag{7.8b}$$

En seguida determinaremos las potencias (valor cuadrático medio) de: $n(t)$, $n_c(t)$ y $n_s(t)$. La potencia de una señal está dada por $1/2\pi$ multiplicado por el área bajo su espectro de densidad de potencia. Se puede ver en la ecuación 7.4 que el área bajo $\mathcal{S}_n(\omega)$ es igual al área bajo $\mathcal{S}_{n_c}(\omega)$ o $\mathcal{S}_{n_s}(\omega)$. Esto se debe a que $\mathcal{S}_{n_c}(\omega)$ se forma sumando ambos espectros (positivo y negativo) de $\mathcal{S}_n(\omega)$. Por lo tanto, se infiere que

$$\overline{n^2(t)} = \overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} \tag{7.9}$$

En resumen, una señal aleatoria de ruido de paso de banda $n(t)$ (con ancho de banda $2\omega_m$) se puede expresar como

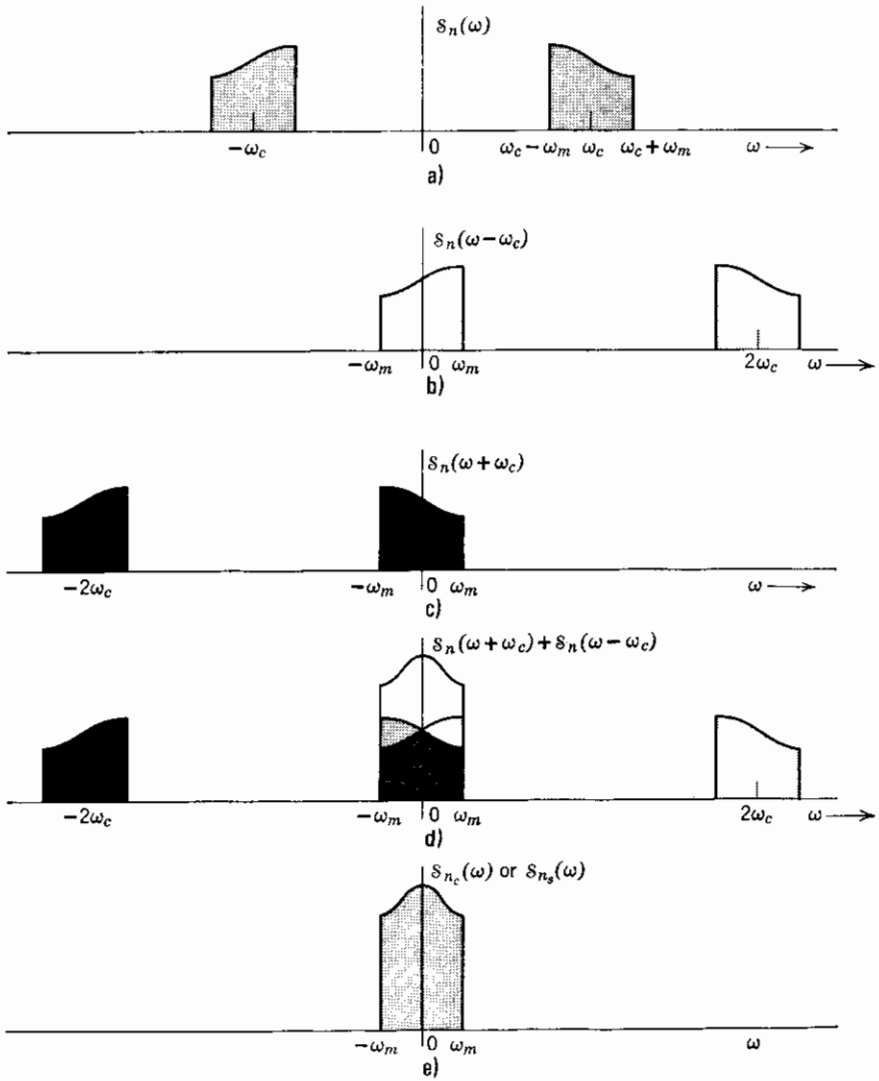


Figura 7.4

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \operatorname{sen} \omega_c t \tag{7.10}$$

en donde $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son sendas señales de ruido paso bajo con banda limitada a ω_m radianes por segundo. Los valores cuadrático medio de: $n(t)$, $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son idénticos:*

* Se debe acentuar de nuevo que estos resultados se aplican generalmente a señales de ruido aleatorias de paso de banda. No se pueden aplicar sin discriminación a cualquier señal de paso de banda. Como ejemplo, considérese una señal de paso bajo $f(t)$ limitada en banda a ω_m radianes por segundo. Entonces, la señal $\varphi(t) = f(t) \cos \omega_c t$ es de paso de banda. Si representamos esta señal como en la ecuación 7.10,

$$\varphi(t) = \varphi_c(t) \cos \omega_c t + \varphi_s(t) \operatorname{sen} \omega_c t$$

entonces $\varphi_c(t) = f(t)$ y $\varphi_s(t) = 0$. Así, la ecuación 7.11 no es válida. Esta señal $\varphi(t) = f(t) \cos \omega_c t$ no es aleatoria estacionaria (aun cuando $f(t)$ es aleatoria estacionaria). En tales casos, la ecuación 7.5 no es válida. En general, cualquier señal de paso de banda se puede representar como en la ecuación 7.10 pero la relación 7.11 es válida para señales de pase de banda aleatorias estacionarias solamente.

$$\overline{n^2(t)} = \overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} \tag{7.11}$$

Los espectros de densidad de potencia de $n_c(t)$ y de $n_s(t)$ son idénticos y se relacionan con el espectro de densidad de potencia de $n(t)$ como en la ecuación 7.7 (y la ecuación 7.8).

Nótese que la potencia de la componente de ruido $n_c(t) \cos \omega_c t$ es $n_c^2/2$ y que la de $n_s(t) \operatorname{sen} \omega_c t$ es $n_s^2/2$ (ver ecuación 2.25). Por lo tanto, la potencia de la señal de ruido se divide por igual entre las dos componentes en cuadratura.

Otra forma de expresar la ecuación 7.10 es

$$n(t) = R(t) \cos [\omega_c t + \theta(t)] \tag{7.12}$$

en donde

$$R(t) = \sqrt{n_c^2(s) + n_s^2(t)} \tag{7.13a}$$

y

$$\theta(t) = -\tan^{-1} \left[\frac{n_s(t)}{n_c(t)} \right] \tag{7.13b}$$

Ya que tanto $n_c(t)$ como $n_s(t)$ son señales que varían lentamente, se deduce de la ecuación 7.13 que $R(t)$ y $\theta(t)$ también son señales que varían lentamente. La señal de ruido de paso de banda con espectro de banda angosta que se muestra en la figura 7.1 parece una señal sinusoidal cuya amplitud y fase varían lentamente, como lo indica la figura 7.5. De la ecuación 7.12,

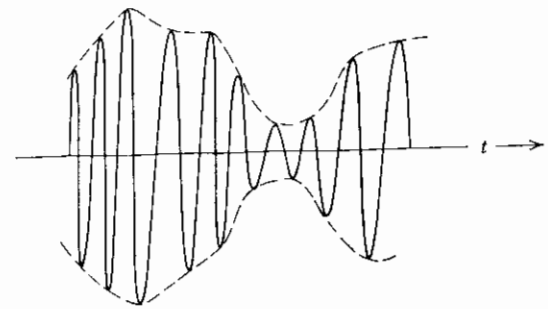


Figura 7.5

es claro que la envolvente de esta señal está dada por $R(t)$ y su fase es $\theta(t)$. Nótese que esta señal tiene modulación de amplitud y de ángulo.

7.2 CALCULOS DE RUIDO EN SISTEMAS DE COMUNICACION

Vamos a investigar el efecto de algunas formas de modulación sobre la razón señal a ruido. Antes se observó cualitativamente que los sistemas de comunicación de banda ancha generalmente presentan más inmunidad a la interferencia de ruido. Si se transforma una señal para que ocupe un ancho de banda mayor, se vuelve más inmune al ruido. En otras palabras, la razón de potencia de señal a ruido se incrementa. De hecho, en el capítulo 8 demostraremos teóricamente que es posible intercambiar el ancho de banda con la razón señal a ruido. Se demostrará que se puede transmitir cierta cantidad de información mediante diferentes combinaciones de ancho de banda y razones señal a ruido. Si se reduce el ancho de banda, debemos transmitir una potencia de señal correspondientemente más alta (razón señal a ruido más grande). Por otro lado, si disponemos de un ancho de banda mayor para la transmisión, se puede transmitir la misma información mediante una señal de menor potencia (razón señal a ruido menor). La combinación del ancho de banda con la razón señal a ruido se lleva a cabo mediante las diferentes formas de modulación. Ahora, estudiaremos la relación entre el ancho de banda de transmisión y la razón señal a ruido en algunos sistemas de modulación.

Si no existiera ruido en el canal, la señal modulada tendría una razón señal a ruido infinita, si se considera a la entrada del demodulador. Sin embargo, como esto no es así, la razón señal a ruido de una señal modulada es finita. El demodulador transforma la señal modulada en una señal modulante más ruido. La señal modulada a la entrada del demodulador y la señal modulante a la salida del demodulador tendrán diferentes anchos de banda y diferentes razones señal a ruido. En consecuencia, el demodulador realiza la tarea de intercambiar el ancho de banda por la razón señal a ruido. Estudiaremos, en seguida, la naturaleza de este intercambio en algunos sistemas de modulación.

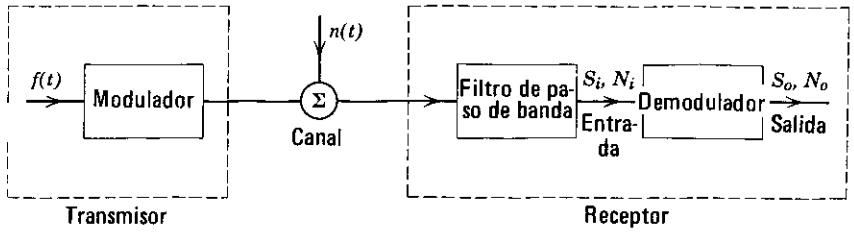


Figura 7.6

Consideremos el caso del ruido aditivo, es decir, el ruido que supuestamente interfiere con la señal por simple adición. El modelo adecuado se muestra en la figura 7.6. Nótese que, en el receptor la señal de entrada se pasa por un filtro de paso de banda eliminándose cualquier ruido que se

encuentre fuera del espectro de señal útil. Así, el ancho de banda del ruido a la entrada del demodulador es el mismo que el de la señal modulada.

Compararemos, para cada sistema, la razón de potencia de señal a ruido a la entrada del demodulador con aquélla a la salida del demodulador. Representaremos por S_i y S_o la potencia (valor cuadrático medio) de la señal útil a la entrada y a la salida, respectivamente, del demodulador. En la misma forma N_i y N_o representarán la potencia (valor cuadrático medio) de la señal de ruido interferente a la entrada y a la salida del demodulador. Examinemos en seguida las diferentes formas de modulación.

7.3 RUIDO EN LOS SISTEMAS DE AMPLITUD MODULADA

1. BLD-PS

El receptor para BLD-PS se muestra en la figura 3.1f y se reproduce en la figura 7.7.* Sea $f(t)$ la señal mensaje de banda limitada a ω_m radianes por segundo. ($\omega_m \leqslant \omega_c$, la frecuencia portadora). La señal útil a la entrada del demodulador es $f(t)\cos\omega_c t$. Hemos mostrado (ecuación 2.25b) que S_i, la potencia (valor cuadrático medio) de $f(t)\cos\omega_c t$, está dada por la mitad de la potencia de $f(t)$

$$S_i = \overline{[f(t)\cos\omega_c t]^2} = \tfrac{1}{2}\overline{f^2(t)} \tag{7.14}$$

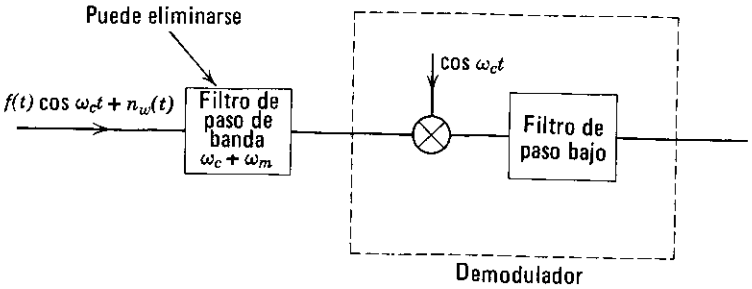


Figura 7.7

La potencia de señal útil a la salida es S_o, la cual se puede encontrar fácilmente si se observa que la salida del detector síncrono (para BLD-PS) es $1/2f(t)$ (ver ecuación 3.2). En consecuencia

$$\begin{aligned} S_o &= \overline{[\tfrac{1}{2}f(t)]^2} = \tfrac{1}{4}\overline{f^2(t)} \\ &= \tfrac{1}{2}S_i \end{aligned} \tag{7.15}$$

* En este caso, no se necesita el filtro de paso de banda a la entrada debido a que cualesquiera componentes de ruido fuera de la banda de señal útil quedan suprimidas por el filtro de banda base final. En consecuencia, este filtro puede eliminarse.

Para calcular N_i y N_o, las potencias de ruido a la entrada y a la salida del demodulador, empleamos el modelo de ruido de paso de banda de la ecuación 7.10, para $n_i(t)$, señal de ruido a la entrada del demodulador:

$$n_i(t) = n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \operatorname{sen} \omega_c t \tag{7.16}$$

en donde $n_i(t)$ es el ruido de paso de banda a la entrada del demodulador y N_i está dado por

$$N_i = \overline{n_i^2(t)} \tag{7.17}$$

Si $n_i(t)$ se aplica a la entrada de un detector síncrono (que multiplica la señal de entrada por $\cos \omega_c t$), entonces $n_d(t)$, ruido de salida del demodulador, está dado por $n_i(t) \cos \omega_c t$.

$$\begin{aligned} n_d(t) &= n_i(t) \cos \omega_c t \\ &= n_c(t) \cos^2 \omega_c t + n_s(t) \operatorname{sen} \omega_c t \cos \omega_c t \\ &= \tfrac{1}{2}[n_c(t) + n_c(t) \cos 2\omega_c t + n_s(t) \operatorname{sen} 2\omega_c t] \end{aligned}$$

Los términos $n_c(t) \cos 2\omega_c t$ y $n_s(t) \cos 2\omega_c t$ representan los espectros de $n_c(t)$ y $n_s(t)$ desplazados a $\pm 2\omega_c$ y se eliminan mediante el filtro de paso bajo a la salida del demodulador (véase la figura 7.7). Por lo tanto, $n_0(t)$, la salida de ruido final es $1/2n_c(t)$.

$$n_o(t) = \tfrac{1}{2} n_c(t)$$

y

$$N_o = \overline{n_o^2(t)} = \tfrac{1}{4}\overline{n_c^2(t)}$$

Mediante las ecuaciones 7.11 y 7.17 obtenemos

$$N_o = \tfrac{1}{4}\overline{n_i^2(t)} = \tfrac{1}{4} N_i \tag{7.18}$$

A partir de las ecuaciones 7.15 y 7.18, obtenemos

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = 2 \tag{7.19}$$

En consecuencia, para BLD-PS, la razón señal a ruido a la salida del demodulador es el doble de la que existe a la entrada del demodulador. Esto representa un mejoramiento de la razón S/N en un factor de 2 para los sistemas BLD-PS.

El factor 2 de mejoramiento para BLD-PS se puede explicar cualitativamente. Ya que la señal de ruido es aleatoria presenta componentes tanto senoidales como cosenoidales (ecuación 7.10). El demodulador multiplica estas componentes por $\cos \omega_c t$. Esto provoca que la componente senoidal se desplace al doble de la frecuencia ($\operatorname{sen} \omega_c t \cos \omega_c t = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\omega_c t$) y queda completamente eliminada por un filtro de paso bajo. Así, se elimina la mitad de la potencia (de la componente senoidal). Esto resulta en un incremento de 2 en la razón de potencia de señal a ruido.

2. BLU-PS

El receptor para BLU-PS es idéntico en todos los aspectos al empleado en BLD-PS, excepto por el filtro de paso de banda de entrada (véase la figura 3.20). Para BLD-PS, el filtro debe aceptar todas las frecuencias del rango $\omega_c \pm \omega_m$. Por otro lado, para BLU-PS la señal de entrada solamente tiene una banda lateral por lo que el ancho de banda del filtro será la mitad del ancho de banda del filtro empleado en BLD-PS.

El espectro de la señal de entrada y el de la señal de salida del demodulador para BLU-PS están en la figura 3.20 y se reproducen en la figura 7.8. El espectro de $f(t)$ es $F(\omega)$ y se muestra en la figura 7.8a. Cuando $f(t)$ se aplica a la entrada del sistema de la figura 3.18, la señal de salida es BLU-PS, con el espectro que se muestra en la figura 7.8b (véase la ecuación 3.27); ésta es $f_i(t)$, la señal a la entrada del demodulador. El espectro de la salida del demodulador se muestra en la figura 7.8c (véase la ecua-

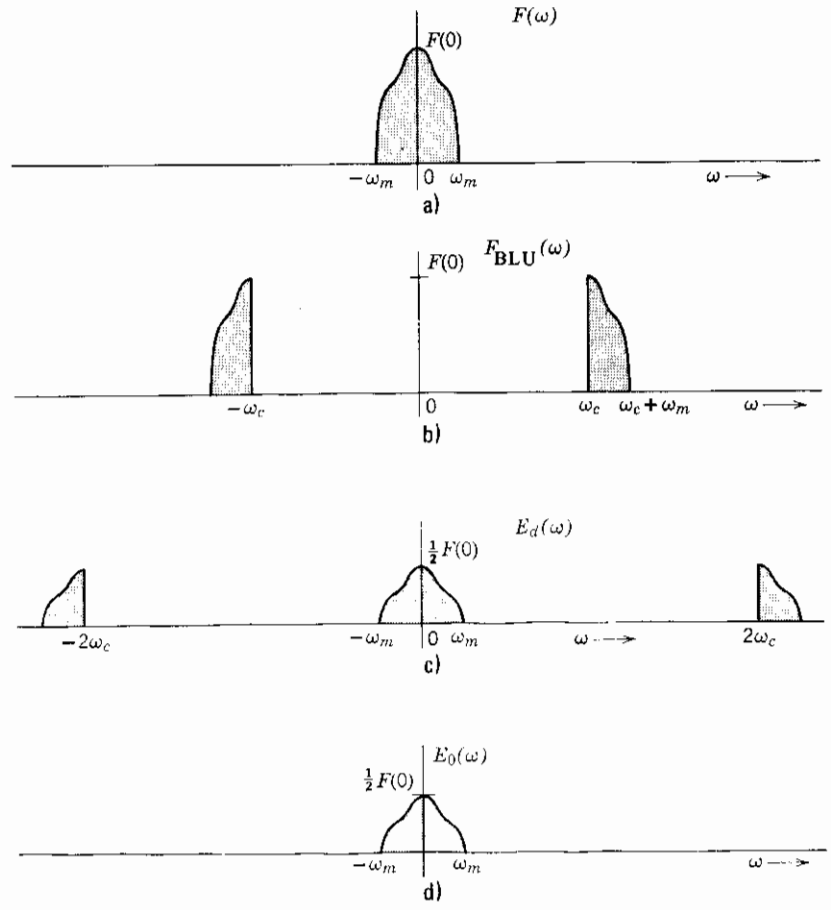


Figura 7.8

ción 3.31). Esta salida se hace pasar a través de un filtro de paso bajo para eliminar el espectro en $\pm 2\omega_c$. El espectro de salida final se muestra en la figura 7.8d.

La potencia de una señal (valor cuadrático medio) es $1/2\pi$ multiplicado por el área bajo el espectro de densidad de potencia. A partir de la figura 7.8a y b, es evidente que el área bajo la densidad de potencia de $f(t)$ y de $f_{\text{BLU}}(t)$ son idénticas. Por lo tanto, la potencia de la señal de BLU modulada (figura 7.8b) es idéntica a la señal original. Luego S_i, potencia de la señal en el demodulador, está dada por

$$S_i = \overline{f^2(t)} \tag{7.20}$$

La salida del demodulador es $1/2f(t)$, como se ve por la ecuación 3.31. En consecuencia $S_o(t)$, la potencia de la señal a la salida del demodulador, está dada por

$$\begin{aligned} S_o &= [\tfrac{1}{2}f(t)]^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\overline{f^2(t)} \\ &= \tfrac{1}{4}S_i \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{S_o}{S_i} = \frac{1}{4} \tag{7.21}$$

Para calcular N_i y N_o, observamos que los demoduladores síncronos para BLD y para BLU son idénticos. La demodulación en cada caso, se lleva a cabo multiplicando la señal de entrada por $\cos \omega_c t$ y filtrando el producto a través de un filtro de paso bajo para eliminar el espectro en $\pm 2\omega_c$. El ruido de entrada tanto para BLD como para BLU es señal de ruido de banda angosta. Es claro que la razón N_o/N_i debe ser idéntica para ambos sistemas, el BLD y el BLU. En consecuencia, de la ecuación 7.18 tenemos

$$\frac{N_o}{N_i} = \frac{1}{4} \tag{7.22}$$

De la ecuación 7.21 y 7.22, para sistemas BLU-PS tenemos:

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = 1 \tag{7.23}$$

Concluimos, por lo tanto, que las relaciones de potencia de señal a ruido a la entrada y a la salida del demodulador son idénticas. En consecuencia, no se mejora la razón señal a ruido. Superficialmente, esto dará la impresión de que BLD es superior a BLU ya que en BLD se mejora al doble la razón señal a ruido. Sin embargo, un examen detallado nos muestra que esta condición no es cierta. La señal de BLU requiere solamente la mitad del

ancho de banda de la señal para BLD. Por lo tanto N_i, potencia de ruido de entrada, es en el caso de BLD el doble* de aquélla para BLU. Aunque la razón S/N en BLD se mejora en un factor de 2, ésta tiene el doble de la potencia de ruido a la entrada. Desde luego, el mejoramiento en la demodulación se nulifica por el ruido de entrada mayor. Se puede ver fácilmente que para determinada potencia de ruido en la entrada, la relación señal a ruido en la salida es idéntica para BLD que para BLU. En consecuencia, el comportamiento de BLU es idéntico al de BLD desde el punto de vista de mejoramiento respecto del ruido.

3. AM con portadora (detector de envolvente)

En el caso de AM con alta potencia de portadora, la entrada al demodulador es $f_i(t)$, dada por

$$f_i(t) = [A + f(t)] \cos \omega_c t + n_i(t) \tag{7.24}$$

En este caso la señal es $[A + f(t)] \cos \omega_c t$. Es evidente que S_i y N_i, potencia de señal y potencia de ruido a la entrada del detector, están dadas por

$$S_i = \frac{A^2}{2} + \frac{\overline{f^2(t)}}{2} \tag{7.25a}$$

$$N_i = \overline{n_i^2(t)} \tag{7.25b}$$

Para calcular S_o y N_o, encontramos la envolvente de $f_i(t)$. Mediante la representación de la ecuación 7.10 para el ruido de banda angosta en la ecuación 7.24, obtenemos

$$\begin{aligned} f_i(t) &= [A + f(t)] \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \operatorname{sen} \omega_c t \\ &= [A + f(t) + n_c(t)] \cos \omega_c t + n_s(t) \operatorname{sen} \omega_c t \qquad (7.26) \\ &= E(t) \cos [\omega_c t + \psi(t)] \qquad (7.27) \end{aligned}$$

en donde

$$E(t) = \sqrt{[A + f(t) + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)} \tag{7.28a}$$

y

$$\psi(t) = -\tan^{-1}\left[\frac{n_s(t)}{A + f(t) + n_c(t)}\right] \tag{7.28b}$$

* Si la densidad de potencia de ruido es simétrica con respecto a $\omega = \omega_c$ (como en el caso de ruido blanco) la potencia de ruido a la entrada para BLD es exactamente el doble de la correspondiente a BLU. Para una densidad de potencia de ruido asimétrico, este factor puede ser mayor que 2, de acuerdo con la banda lateral que se suprima (véase el problema 5). Sin embargo, el ancho de banda de la señal modulada generalmente es tan pequeño que se puede suponer, con error muy pequeño, una densidad de potencia uniforme en la banda.

Desde luego que $E(t)$ es la envolvente de $f_i(t)$ y $\psi(t)$ es el ángulo de fase. Evidentemente, la salida del detector de envolvente es $E(t)$. Ahora, consideremos los dos casos en donde *a*) ruido bajo; $A + f(t) \gg n_i(t)$ y *b*) ruido alto; $n_i(t) \gg A + f(t)$.

a. Caso de ruido bajo. Podemos emplear vectores para representar $f_i(t)$ en la ecuación 7.26 (figura 7.9). Si $A + f(t) \gg n_i(t)$, entonces $A + f(t) \gg n_c(t)$ y $n_s(t)$. La resultante $E(t)$ en este caso se puede aproximar por $A + f(t) + n_c(t)$ como se muestra en la figura 7.9.

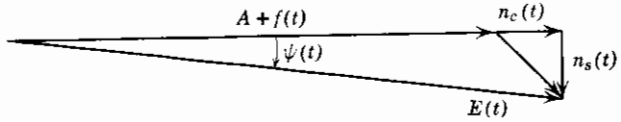


Figura 7.9

$$E(t) \simeq A + f(t) + n_c(t)$$

y

$$\psi(t) \simeq 0$$

Analíticamente llegamos a la misma conclusión. Si $A + f(t) \gg n_c(t)$ y $n_s(t)$,* entonces la ecuación 7.28a tiene la aproximación

$$\begin{aligned} E(t) &\simeq \sqrt{[A + f(t)]^2 + 2[A + f(t)]n_c(t)} \\ &= [A + f(t)]\left[1 + \frac{2n_c(t)}{A + f(t)}\right]^{1/2} \\ &\simeq [A + f(t)]\left[1 + \frac{n_c(t)}{A + f(t)}\right] \\ &= A + f(t) + n_c(t) \end{aligned}$$

Es claro, en esta ecuación, que la señal útil a la salida es $f(t)$ y el ruido es $n_c(t)$. Por lo tanto

$$S_o = \overline{f^2(t)} \tag{7.29a}$$

y

$$N_o = \overline{n_c^2(t)} = N_i \tag{7.29b}$$

Mediante las ecuaciones 7.25a, 7.25b, 7.29a y 7.29b, obtenemos

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{2\overline{f^2(t)}}{A^2 + \overline{f^2(t)}} \tag{7.30}$$

* Este postulado debe interpretarse con precaución. Ya que las señales $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son aleatorias con alguna distribución de amplitud, habrá casos en que $n_c(t)$ y $n_s(t)$ sean mayores que $A + f(t)$. Sin embargo, si $A + f(t)$ es muy grande, estos casos serán raros. El postulado correcto sería que $A + f(t) \gg n_c(t)$ y $n_c(t)$ la mayoría del tiempo.

El mejoramiento de la razón se incrementa en la medida que A se reduce. Pero, para el detector de envolvente, no se puede reducir A abajo de $|f(t)|_{\text{máx}}$.

$$A \geq |f(t)|_{\text{máx}}$$

Se puede ver fácilmente que la razón de potencia de señal a ruido a la salida, en AM es máxima para el máximo grado posible de modulación (100 %).

Para el caso particular en el que $f(t)$ sea una señal sinusoidal, la amplitud de $f(t)$ es A para el 100 % de modulación. Por lo tanto

$$\overline{f^2(t)} = \frac{A^2}{2}$$

y

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{2}{3}$$

Así, en este caso, el máximo mejoramiento que se puede obtener de la razón de potencia de señal a ruido es 2/3.

Si se utiliza la detección síncrona para la demodulación de AM con alta potencia de portadora, los resultados son idénticos a los que se obtuvieron para el detector de envolvente. Esto se ve con facilidad si se considera que S_i y N_i, las potencias de entrada de señal y de ruido, son idénticas en ambos casos:

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{A^2 + \overline{f^2(t)}}{2\overline{n_i^2(t)}}$$

El detector síncrono multiplica la señal de entrada $f_i(t)$ por $\cos \omega_c t$; por lo que $e_d(t)$, la salida, está dada por

$$e_d(t) = f_i(t) \cos \omega_c t$$

Al substituir la ecuación 7.26 para $f_i(t)$ y eliminar los términos con espectros en $2\omega_c$, obtenemos la salida final $e_o(t)$,

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}[A + f(t) + n_c(t)] \tag{7.31}$$

La salida contiene la señal útil $1/2f(t)$ y el ruido $1/2n_c(t)$. En consecuencia,

$$S_o = \tfrac{1}{4}\overline{f^2(t)}$$

$$V_o = \tfrac{1}{4}\overline{n_c^2(t)} = \tfrac{1}{4}\overline{n_i^2(t)}$$

Así

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\overline{f^2(t)}}{\overline{n_i^2(t)}} \tag{7.32}$$

y

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{2\overline{f^2(t)}}{A^2 + \overline{f^2(t)}} \tag{7.33}$$

Por lo tanto es evidente que, para AM, cuando el ruido es pequeño comparado con la señal, el comportamiento del detector de envolvente es idéntico al del detector síncrono. Obsérvese que al deducir la ecuación 7.33, no se hizo suposición alguna por lo que respecta a las magnitudes relativas de la señal y del ruido. Por lo tanto, la ecuación 7.33 es válida en todas las condiciones de ruido en la demodulación síncrona.

b. Caso de ruido alto. En seguida vamos a considerar el comportamiento del detector de envolvente en AM con ruido alto; $n_i(t) \gg [A + f(t)]$. Esto implica que $n_c(t)$ y $n_s(t) \gg [A + f(t)]$. En estas condiciones,

$$E(t) \simeq \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t) + 2n_c(t)[A + f(t)]}$$

$$= R(t)\sqrt{1 + \frac{2[A + f(t)]}{R(t)}\cos\theta(t)} \tag{7.34}$$

en donde $R(t)$ y $\theta(t)$ son la envolvente y la fase de $n_i(t)$ dadas por las ecuaciones 7.13a y 7.13b.

$$R(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)}$$

$$\theta(t) = -\tan^{-1}\left[\frac{n_s(t)}{n_c(t)}\right]$$

Ya que $R(t) \gg [A + f(t)]$, la ecuación 7.34 tiene una mejor aproximación como

$$E(t) \simeq R(t)\left[1 + \frac{A + f(t)}{R(t)}\cos\theta(t)\right]$$

$$= R(t) + [A + f(t)]\cos\theta(t) \tag{7.35}$$

Revisando la ecuación 7.35 observamos que la salida no contiene término proporcional a $f(t)$. La señal $f(t)\cos\theta(t)$ representa $f(t)$ multiplicada por una función variable con el tiempo (en realidad ruido) $\cos\theta(t)$ y carece de cualquier utilidad en la recuperación de $f(t)$. Así, la salida no contiene ninguna señal útil.

De este estudio es evidente que, para ruido alto, la señal queda completamente mutilada por el detector de envolvente. Es debido a este comportamiento que nos referimos al llamado efecto de umbral en los detectores de envolvente. Deseamos dar a entender por umbral el valor de una razón señal a ruido de entrada abajo del cual la razón señal a ruido a la salida se deteriora mucho más rápidamente que la razón señal a ruido a la entrada. El efecto de umbral comienza a aparecer en la región en donde la razón de la potencia de la portadora a la potencia de ruido se aproxima a la unidad.

Se debe acentuar que el efecto de umbral es una propiedad de los detectores de envolvente; tal efecto no se observa en los detectores síncronos. La señal de salida del detector síncrono está dada por la ecuación 7.31:

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}[A + f(t) + n_c(t)]$$

Al establecer esta ecuación, no se impusieron restricciones en las magnitudes de la señal ni del ruido. En consecuencia, es válida en todas las condiciones de ruido. La salida $e_o(t)$ contiene siempre un término $1/2f(t)$ por lo que el efecto de umbral no aparece. El mejoramiento de la razón S/N de la ecuación 7.33 se mantiene para cualquier condición de ruido. También se ha visto que para BLD-PS y BLU-PS (que emplea detectores síncronos) no hubo efectos de umbral.

Se concluye que en AM con ruido bajo, el comportamiento del detector de envolvente es casi igual al del detector síncrono. Pero con ruido alto, el detector de envolvente presenta el efecto de umbral y resulta inferior al detector síncrono.

7.4 RUIDO EN SISTEMAS CON MODULACION ANGULAR

1. Modulación en frecuencia

En la figura 7.10 se muestra el diagrama esquemático del modulador demodulado para FM. El primer filtro en el receptor elimina el ruido que se encuentra fuera de la banda $(\omega_c \pm \Delta\omega)$ en la cual existe la señal útil. Si $\Delta\omega$ es la desviación de la frecuencia portadora entonces, de acuerdo con la ecuación 4.27, la banda de paso de este filtro es $(\omega_c - \Delta\omega, \omega_c + \Delta\omega)$. La salida $e_d(t)$ del demodulador contiene la señal mensaje más el ruido con ancho de banda $\Delta\omega$. Ya que la señal mensaje tiene un ancho de banda ω_m, se puede eliminar el ruido que se encuentra fuera de la banda de la señal mediante un filtro de paso bajo con frecuencia de corte ω_m (figura 7.10).

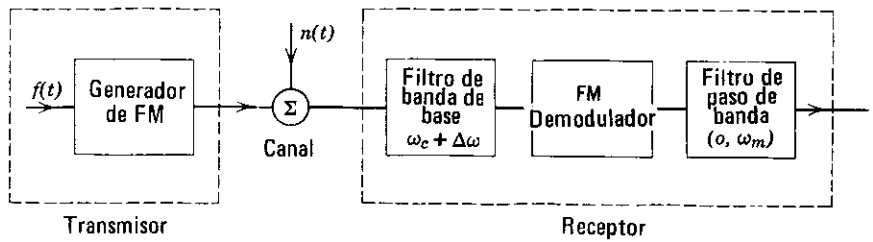


Figura 7.10

Para calcular potencia de la señal y del ruido a la salida, supondremos que es posible calcular cada una independientemente de la otra. Así, para calcular la potencia de la señal a la salida, se supondrá que el ruido en el canal es cero y para calcular la potencia de ruido a la salida, se supondrá que la señal $f(t)$ es cero. En el Apéndice A de este capítulo se encuentra la justificación de este procedimiento.

Considérese primero la señal sin ruido. La portadora de FM está dada por

$$f_c(t) = A \cos\left[\omega_c t + k_f \int f(t)\, dt\right]$$

Se observó en la sección 4.7 que para FM, la potencia de la portadora con o sin modulación es la misma y está dada por $A^2/2$. Así,

$$S_i = \frac{A^2}{2} \tag{7.36}$$

La salida del demodulador es proporcional a la frecuencia instantánea ω_i. Si la constante de proporcionalidad es α, entonces la señal de salida es

$$\begin{aligned} s_o(t) = \alpha\omega_i &= \alpha \frac{d}{dt}\left[\omega_c t + k_f \int f(t)\, dt\right] \\ &= \alpha\omega_c + \alpha k_f f(t) \end{aligned}$$

La señal útil es $\alpha k_f f(t)$ y

$$S_o = \alpha^2 k_f^2 \overline{f^2(t)} \tag{7.37}$$

Para calcular N_i y N_o, observamos que el ancho de banda de la señal a la entrada del demodulador es $2\,\Delta\omega$ en donde $\Delta\omega$ es la desviación máxima de la frecuencia portadora (ver ecuación 4.27). Así

$$N_i = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c - \Delta\omega}^{\omega_c + \Delta\omega} \mathcal{S}_n(\omega)\, d\omega \tag{7.38}$$

en donde $\mathcal{S}_n(\omega)$ es el espectro de densidad de potencia de $n_i(t)$. Si el ruido es blanco, con espectro de densidad de potencia de magnitud $\mathcal{N}/2$, entonces

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c - \Delta\omega}^{\omega_c + \Delta\omega} \frac{\mathcal{N}}{2}\, d\omega \\ &= 2\mathcal{N}\,\Delta f \qquad (\Delta\omega = 2\pi\,\Delta f) \end{aligned} \tag{7.39}$$

Para calcular N_o, suponemos que la señal mensaje $f(t)$ es cero. La entrada del demodulador $f_i(t)$ es la suma de la portadora y el ruido $n_i(t)$:

$$\begin{aligned} f_i(t) &= A \cos \omega_c t + n_i(t) \\ &= A \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \operatorname{sen} \omega_c t \\ &= [A + n_c(t)] \cos \omega_c t + n_s(t) \operatorname{sen} \omega_c t \\ &= E(t) \cos [\omega_c t + \psi(t)] \end{aligned} \tag{7.40}$$

en donde

$$E(t) = \sqrt{[A + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)} \tag{7.40a}$$

y

$$\psi(t) = -\tan^{-1}\left[\frac{n_s(t)}{A + n_c(t)}\right] \tag{7.40b}$$

Hemos supuesto un caso con ruido bajo, en donde $A \gg n_c(t)$ y $n_s(t)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \psi(t) &\simeq -\tan^{-1}\left[\frac{n_s(t)}{A}\right] \\ &\simeq \frac{-n_s(t)}{A} \end{aligned} \tag{7.41}$$

La salida del demodulador es $\alpha\omega_i$ en donde ω_i es la frecuencia instantánea de la señal de entrada y α es la constante de proporcionalidad.

Por la ecuación 7.40, obtenemos

$$\begin{aligned} \omega_i = \frac{d}{dt}[\theta(t)] &= \frac{d}{dt}[\omega_c t + \psi(t)] \\ &= \omega_c + \dot{\psi}(t) \end{aligned}$$

De la ecuación 7.41, se deduce que

$$\omega_i = \omega_c - \frac{\dot{n}_s(t)}{A} \tag{7.42}$$

La salida del demodulador es $\alpha\omega_i$, dada por

$$f_d(t) = \alpha\left[\omega_c - \frac{\dot{n}_s(t)}{A}\right]$$

De donde la componente de ruido $n_o(t)$ es

$$n_o(t) = -\frac{\alpha\dot{n}_s(t)}{A} \tag{7.43}$$

Si $n_s(t)$ tiene un espectro de densidad de potencia $\mathcal{S}_{n_s}(\omega)$ entonces su derivada $\dot{n}(s))$ tiene un espectro $\mathcal{S}_{\dot{n}_s}(\omega)$ dado por (véase la ecuación 2.39).

$$\mathcal{S}_{\dot{n}_s}(\omega) = \omega^2 \mathcal{S}_{n_s}(\omega)$$

y $\mathcal{S}_{n_o}(\omega)$, el espectro de densidad de potencia del ruido de salida $[-\alpha\dot{n}(t)]/A$, está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{n_o}(\omega) &= \frac{\alpha^2}{A^2}\, \mathcal{S}_{\dot{n}_s}(\omega) \\ &= \frac{\alpha^2\omega^2}{A^2}\, \mathcal{S}_{n_s}(\omega) \end{aligned} \tag{7.44}$$

A continuación, la salida del demodulador se pasa a través de un filtro de paso bajo con frecuencia de corte ω_m para eliminar el excedente de ruido de la parte exterior a la banda de la señal útil.

Después de substituir la ecuación 7.7 (y la 7.8) en la ecuación 7.44 y recordando que la señal de salida se filtra mediante un filtro de paso bajo (ω_m), obtenemos

$$S_{n_0}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^2\omega^2}{A^2}\left[S_n(\omega+\omega_c) + S_n(\omega-\omega_c)\right] & |\omega| < \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases} \tag{7.45}$$

Si el ruido del canal es blanco,

$$S_n(\omega) = \frac{\mathcal{N}}{2}$$

y

$$S_{n_0}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^2\omega^2\mathcal{N}}{A^2} & |\omega| < \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases} \tag{7.46}$$

Este es un espectro parabólico como se ilustra en la figura 7.11.

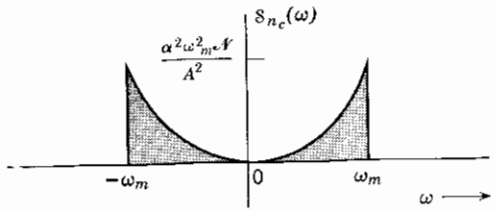


Figura 7.11

La potencia del ruido de salida N_o está dado por

$$N_o = \frac{\alpha^2\mathcal{N}}{\pi A^2}\int_0^{\omega_m}\omega^2\,d\omega = \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2\frac{\mathcal{N}\omega_m^3}{2\pi} \tag{7.47}$$

Mediante las ecuaciones 7.36, 7.37, 7.39 y 7.47, obtenemos

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{6k_f^2\overline{f^2(t)}\,\Delta\omega}{\omega_m^3} \tag{7.48}$$

Nótese que la razón de potencia de señal a ruido a la salida del demodulador está dada por (ecuación 7.37 y 7.47)

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{3}{2}\left(\frac{2\pi A^2}{\mathcal{N}}\right)\frac{k_f^2\overline{f^2(t)}}{\omega_m^2} \tag{7.49}$$

La desviación de la frecuencia portadora es directamente proporcional a k_f. Por lo tanto, el ancho de banda de la señal de FM es proporcional a k_f. En consecuencia, de la ecuación 7.49 se deduce que la razón de potencia de señal a ruido a la salida del demodulador de FM es proporcional al cuadrado del ancho de banda de transmisión.

Es interesante comparar la relación S/N a la salida del demodulador para FM y para AM. Si la señal $f(t)$ fuese transmitida en AM, la señal de salida del detector de envolvente estaría dada por (ecuación 7.29a).

$$S_o = \overline{f^2(t)}$$

y el ruido de salida N_o del detector de envolvente estaría dado por (ecuación 7.29b).

$$N_o = \overline{n_c^2(t)} = N_i$$

en donde N_i es la potencia de ruido a la entrada del detector. Para AM, el ancho de banda de transmisión es $2f_m$. Por lo tanto, para ruido blanco de densidad $\mathcal{N}/2$,

$$N_o = N_i = 2\mathcal{N}f_m$$

y

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{\text{AM}} = \frac{\overline{f^2(t)}}{2\mathcal{N}f_m}$$

Al substituir este resultado en la ecuación 7.49, obtenemos

$$\frac{(S_o/N_o)_{\text{FM}}}{(S_o/N_o)_{\text{AM}}} = 3\left(\frac{Ak_f}{\omega_m}\right)^2 \tag{7.50}$$

En la ecuación 7.50, A es la amplitud de la portadora de FM. Para que la comparación entre AM y FM sea significativa, supondremos que A también es la amplitud de la portadora de AM. Para obtener algunos resultados cuantitativos, consideremos un caso específico en el que la señal modulante $f(t)$ es una señal sinusoidal. Para la comparación, debemos considerar la condición más favorable para AM, 100% de modulación. En este caso la amplitud de $f(t)$ es A (la misma que la de la portadora). Además, la desviación $\Delta\omega$ de la frecuencia de la portadora de FM cuando $f(t)$ es una señal sinusoidal de amplitud A está dada por (ecuación 4.20)

$$\Delta\omega = Ak_f$$

y el índice de modulación m_f está dado por

$$m_f = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{Ak_f}{\omega_m}$$

en donde ω_m es la frecuencia de la señal modulante $f(t)$. Si substituimos este resultado en la ecuación 7.50, obtenemos

$$\frac{(S_o/N_o)_{\text{FM}}}{(S_o/N_o)_{\text{AM}}} = 3m_f^2 \tag{7.51a}$$

Si consideramos razones de voltaje raíz cuadrático medio de señal a ruido en lugar de razones de potencia, obtenemos

$$\frac{[(S_o/N_o)_{\text{FM}}]_{\text{vr}}}{[(S_o/N_o)_{\text{AM}}]_{\text{vr}}} = \sqrt{3}\, m_f \tag{7.51b}$$

Es evidente, a partir de la ecuación 7.51, que la razón señal a ruido se puede volver más alta en FM que en AM, incrementando el índice de modulación m_f. Sin embargo, nótese que, al incrementar m_f, aumenta el ancho de banda necesario. Así, cuando $m_f = 5$, la razón S_o/N_o para FM es 75 veces mayor que la de AM, pero el ancho de banda que se necesita aumenta aproximadamente 8 veces. Esto tiene la siguiente explicación. En AM, el ancho de banda es $2\omega_m$. En FM el ancho de banda correspondiente a $m_f = 5$ es $3.3\,\Delta\omega$ (véase la figura 4.5). Pero $\Delta\omega = m_f\omega_m$. En consecuencia, el ancho de banda necesario en FM es $3.3 \times 5\omega_m \simeq 16\omega_m$.

Para un valor grande de m_f ($m_f > 10$) el ancho de banda B de la señal de FM es aproximadamente $2\Delta f$

$$B \simeq 2\,\Delta f$$

y

$$m_f = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{1}{2}\frac{B}{f_m}$$

Así

$$\frac{(S_o/N_o)_{\text{FM}}}{(S_o/N_o)_{\text{AM}}} = \frac{3}{4}\left(\frac{B}{f_m}\right)^2 \tag{7.52}$$

De esta ecuación deducimos:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{\text{FM}} = \frac{3}{4}\left(\frac{B}{f_m}\right)^2\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{\text{AM}}$$

Si deseamos mejorar, en un factor de 2 (6 db), la razón S_o/N_o para el sistema de FM, se debe incrementar el ancho de banda B en un factor de 2. Así, la razón de potencia de señal a ruido se mejora en 6 db por cada incremento de dos a uno en la ocupación de la banda. Se debe recordar, sin embargo, que estos resultados se han obtenido con la suposición de ruido bajo.

Podemos escribir la ecuación 7.52 en términos de las razones de voltaje raíz cuadrático medio de señal a ruido en la salida.

$$\frac{[(S_o/N_o)_{\text{FM}}]_{\text{vr}}}{[(S_o/N_o)_{\text{AM}}]_{\text{vr}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{B}{f_m} \tag{7.53}$$

Así, la razón de voltaje raíz cuadrático medio S/N a la salida para FM es directamente proporcional al ancho de banda.

La propiedad de intercambiar el ancho de banda por la razón señal a ruido, suele ser válida para todos los sistemas de comunicación. Transformar una señal para que ocupe un ancho de banda más grande es volverla más inmune al ruido interferente. En el capítulo 8 se desarrollarán las bases teóricas de esta propiedad.

Se debe observar que un sistema de FM permite intercambiar la razón señal a ruido con el ancho de banda de transmisión. En los sistemas de AM, en donde el ancho de banda de transmisión es fijo, tal intercambio no es posible.

De la ecuación 7.51b se deduce claramente que, para obtener un mejoramiento de la razón S/N en FM con respecto a la de AM, debemos tener

$$m_f > \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0.6$$

Es importante notar que $m_f = 0.6$ es aproximadamente el punto de transición entre FM de banda angosta y FM de banda ancha. En consecuencia, FM de banda angosta no proporciona mejoramiento alguno sobre AM. Este resultado era de esperarse pues FM de banda angosta y AM tienen el mismo ancho de banda.

La razón señal a ruido en FM no se puede mejorar indefinidamente mediante el incremento del ancho de banda. A medida que el ancho de banda aumenta el ruido de entrada también aumenta llegándose, eventualmente a un punto en el que la potencia de la portadora es del orden de la potencia del ruido de entrada; los resultados obtenidos anteriormente, bajo la suposición de señal de entrada baja, ya no se cumplen. Bajo la condición de ruido de entrada suficientemente grande, comienzan a aparecer los fenómenos de umbral mencionados anteriormente.

Efecto de umbral en FM. El efecto de umbral en FM es bastante más pronunciado e importante que en AM. Para estudiar este efecto, expresemos la señal a la entrada del demodulador como

$$f_i(t) = A\cos[\omega_c t + \psi(t)] + n_i(t)$$

en donde

$$\psi(t) = k_f\int f(t)\,dt$$

Si usamos la ecuación 7.12 para expresar $n_i(t)$, obtenemos

$$f_i(t) = A\cos[\omega_c t + \psi(t)] + R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{7.54}$$

El diagrama vectorial que representa la ecuación 7.54 se muestra en la figura 7.12. Es claro en esta figura que

$$f_i(t) = E(t)\cos[\omega_c t + \theta(t) + \beta(t)] \tag{7.55}$$

en donde

$$\beta(t) = \tan^{-1}\left\{\frac{A\,\text{sen}\,[\psi(t) - \theta(t)]}{R(t) + A\cos[\psi(t) - \theta(t)]}\right\} \tag{7.56}$$

Para el caso de ruido alto, $R(t) \gg A$ y la ecuación 7.56 se puede expresar como

$$\beta(t) \simeq \tan^{-1}\left\{\frac{A \operatorname{sen}[\psi(t) - \theta(t)]}{R(t)}\right\}$$

$$\simeq \frac{A}{R(t)} \operatorname{sen}[\psi(t) - \theta(t)] \qquad (7.57)$$

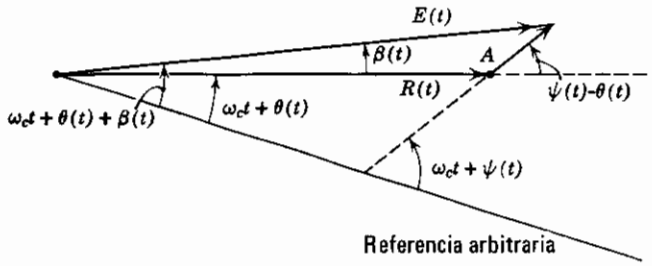


Figura 7.12

Nótese que $e_d(t)$, salida del demodulador, está dada por

$$e_d(t) = \alpha \frac{d}{dt}[\omega_c t + \theta(t) + \beta(t)]$$

$$= \alpha[\omega_c + \dot{\theta}(t) + \dot{\beta}(t)]$$

La señal $\alpha\theta(t)$ es la señal de ruido. La información de $f(t)$ está contenida en $\dot{\beta}(t)$. Se puede ver en la ecuación 7.57 que $\beta(t)$ contiene un factor $1/R(t)$ que es una señal de ruido. Por lo tanto, $\dot{\beta}(t)$ no contiene ninguna señal útil proporcional a $f(t)$; en consecuencia, la señal de salida estará distorsionada. Esto origina el efecto de umbral que se muestra en la figura 7.13.

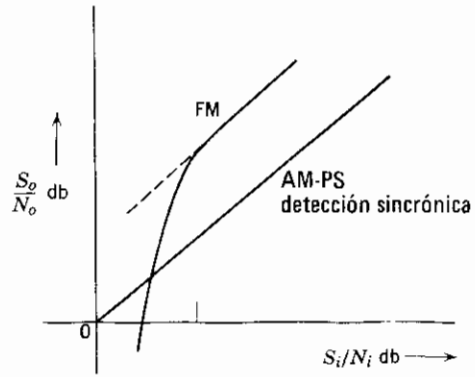


Figura 7.13

Reducción del efecto de umbral mediante de-énfasis. Hemos observado que la densidad de potencia de ruido a la salida del demodulador sube en forma parabólica con la frecuencia (figura 7.11). Esto es un grave inconveniente, porque para todas las señales mensaje prácticas la densidad de potencia decrece con la frecuencia. Así, el ruido es más fuerte en el rango de frecuencia en el que la señal es más débil. Por lo tanto las componentes de alta frecuencia de la señal mensaje se ven más afectadas por el ruido interferente del canal. Esta dificultad se puede aliviar mediante la técnica conocida como pre-énfasis y de-énfasis.

En el transmisor, se refuerzan las componentes de alta frecuencia de la señal mensaje $f(t)$ (pre-énfasis). Esta señal transformada $f'(t)$ se utiliza, en seguida, para modular en frecuencia la portadora. En el receptor, el demodulador produce la señal transformada $f'(t)$ y el ruido parabólico. La señal requerida se obtiene al transmitir la señal del demodulador a través de un filtro que restaura las componentes de alta frecuencia al nivel original (de-énfasis). Esto produce la señal original $f(t)$ y el ruido cuyo espectro de densidad de potencia también se reduce, en forma correspondiente, a altas frecuencias. La técnica de pre-énfasis y de-énfasis no sólo reduce el ruido alto e indeseable en la región de nivel bajo de señal sino que también disminuye todo el ruido de salida y mejora la razón señal a ruido. Esto, de hecho, reduce el efecto de umbral en FM. Ahora calcularemos el mejoramiento de la razón señal a ruido debido al pre-énfasis y al de-énfasis.

Consideremos un filtro de pre-énfasis muy simple como el de la figura 7.14a. Este es un filtro de un polo cuya respuesta en frecuencia se

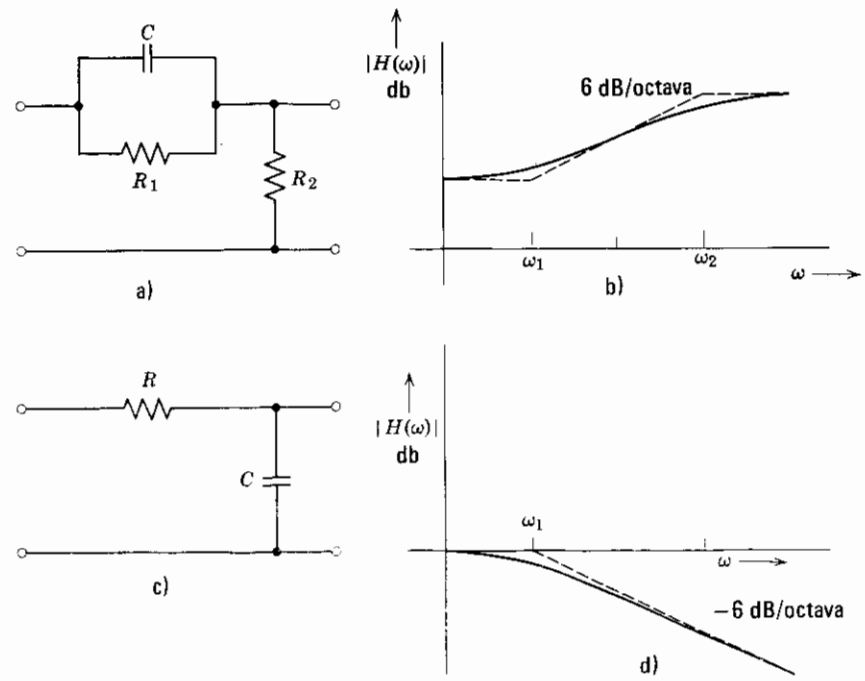


Figura 7.14

muestra en la figura 7.14b. Los puntos de ruptura ω_1 y ω_2 están dados por

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C} \qquad \text{y} \qquad \omega_2 \simeq \frac{1}{R_2 C} \qquad (R_1 \gg R_2)$$

En una elección razonable de ω_1 el espectro de $f(t)$ cae aproximadamente a 3 db de su valor de baja frecuencia. Para sistemas comerciales, se toma el valor de 2.1 KHz para f_1, $(\omega_1/2\pi)$. Se debe escoger un valor de ω_2 muy superior a la máxima frecuencia de $f(t)$. Para sistemas comerciales f_2, $(\omega_2/2\pi)$ tiene un valor típico de $f_2 \geqslant 30$ KHz. La red de de-énfasis correspondiente se ilustra en la figura 7.14c y su respuesta en frecuencia se muestra en la figura 7.14d. Ya que la señal útil desaparece para $\omega_1 > \omega_2$, no se necesita corrección en frecuencias superiores a ω_2. Para el filtro de de-énfasis.

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_1}$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{{\omega_1}^2}{\omega^2 + {\omega_1}^2} \tag{7.58}$$

Si $n_0'(t)$ representa la salida de ruido final (salida de la red de de-énfasis), entonces el espectro de densidad de ruido de salida $S_{n_o'}(\omega)$ para ruido blanco de canal está dado por (véase la ecuación 7.46)

$$S_{n_o'}(\omega) = \frac{\alpha^2\omega^2\mathcal{N}}{A^2}|H(\omega)|^2$$

$$= \frac{\alpha^2{\omega_1}^2\omega^2\mathcal{N}}{A^2(\omega^2 + {\omega_1}^2)}$$

La potencia de ruido de salida N_o' está dada por

$$N_o' = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_m} S_{n_o'}(\omega)\, d\omega$$

$$= \frac{\alpha^2{\omega_1}^2\mathcal{N}}{\pi A^2}\int_0^{\omega_m} \frac{\omega^2}{\omega^2 + {\omega_1}^2}\, d\omega$$

$$= \frac{\alpha^2{\omega_1}^3\mathcal{N}}{\pi A^2}\left[\frac{\omega_m}{\omega_1} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_m}{\omega_1}\right)\right] \tag{7.59}$$

Si se define el factor ρ de reducción de ruido como

$$\rho = \frac{N_o}{N_o'}$$

Entonces de las ecuaciones 7.47 y 7.59 deducimos

$$\rho = \frac{1}{3}\frac{(\omega_m/\omega_1)^3}{(\omega_m/\omega_1) - \tan^{-1}(\omega_m/\omega_1)} \tag{7.60}$$

La razón ρ de mejoramiento se ha representado en la figura 7.15 como función de ω_m/ω_1.

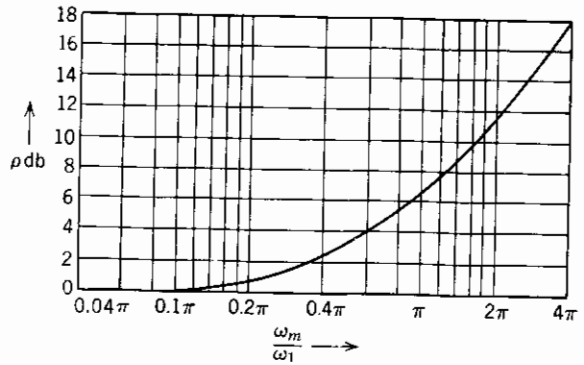


Figura 7.15

Es importante notar que el pre-énfasis no provoca incremento alguno en la potencia de la señal que se transmite. Esto se debe a que, para FM, la potencia de la señal que se transmite es idéntica a la potencia de la portadora sin modular $(A^2/2)$. La potencia de ruido N_i en el demodulador y la potencia de la señal de salida S_o tampoco cambian. Por lo tanto, el ρ de la ecuación 7.60 representa realmente el mejoramiento adicional de S/N en FM.

El mejoramiento ρ aumenta al crecer ω_m/ω_1. Esto significa que reducir la primera frecuencia de ruptura ω_1 mejora el comportamiento. Pero reducir la frecuencia de ruptura ω_1 provoca un aumento del ancho de banda de transmisión. Esto se debe a que, a medida que ω_1 disminuye, el circuito de pre-énfasis se aproxima más a un diferenciador ideal. Para $\omega_1 = 0$ (y $\omega_2 \gg \omega_m$), el circuito de pre-énfasis se comporta como un diferenciador ideal. En consecuencia, la señal original $f(t)$ se diferencia antes de usarla para modular en frecuencia la portadora. El proceso de la diferenciación tiende a producir picos de gran amplitud (en contraste con el efecto de igualación de un integrador). Ya que la constante k_f de modulación es constante, la amplitud máxima de la señal incrementada origina un aumento en $\Delta\omega$, desviación de la frecuencia de la portadora; desde luego, esto incrementa el ancho de banda de transmisión. Por lo tanto, es evidente que el mejoramiento de la razón señal a ruido mediante pre-énfasis y de-énfasis se efectúa a costa de otros parámetros. Cabe mencionar aquí que, si $\omega_1 = 0$ en el circuito de pre-énfasis, entonces la FM con circuitos de pre-énfasis y de de-énfasis equivale a la modulación de fase (MF). Esto se debe a que, cuando $\omega_1 = 0$, el circuito de pre-énfasis funciona como diferenciador. Sabemos que si se diferencia una señal y después se modula en frecuencia una portadora, la señal resultante es una portadora modulada en fase.

2. Modulación en fase

La modulación de fase puede tratarse como un caso especial de FM. Como se explicó anteriormente, la MF se puede generar con una diferenciación de $f(t)$ a fin de modular en frecuencia la portadora. Si se emplea un demodulador de FM en el receptor, la señal de salida será df/dt. La señal útil se puede recuperar agregando al receptor de FM un integrador ideal. La portadora MF se puede expresar como

$$\varphi_{\text{PM}}(t) = A \cos [\omega_c t + k_p f(t)]$$

$$= A \cos \left[\omega_c t + k_p \int \frac{df}{dt}\, dt\right]$$

$$S_i = \frac{A^2}{2}$$

$$N_i = 2\mathcal{N}\, \Delta f \qquad \text{(para ruido blanco)}$$

La señal de salida del demodulador de FM es $\alpha k_p(df/dt)$ en donde α es la constante del demodulador. La señal de salida se integra en seguida para obtener la salida $\alpha k_p f(t)$. En consecuencia

$$S_o = \alpha^2 k_p{}^2 \overline{f^2(t)}$$

El ruido a la salida del demodulador de FM está dado por $[-\alpha \dot{n}_s(t)/A]$ (véase la ecuación 7.43). La salida del integrador ideal que sigue al demodulador de FM es $n_o(t)$, señal de ruido final a la salida:

$$n_o(t) = \frac{-\alpha n_s(t)}{A}$$

y

$$\mathcal{S}_{n_o}(\omega) = \frac{\alpha^2}{A^2}\, \mathcal{S}_{n_s}(\omega)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{A^2}[\mathcal{S}_n(\omega - \omega_c) + \mathcal{S}_n(\omega + \omega_c)] & |\omega| < \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases}$$

Para ruido blanco en el canal

$$\mathcal{S}_n(\omega) = \frac{\mathcal{N}}{2}$$

y

$$\mathcal{S}_{n_o}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^2 \mathcal{N}}{A^2} & |\omega| < \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases}$$

Nótese que el ruido de salida para MF tiene una densidad de potencia uniforme, a diferencia de FM. En consecuencia, no hay necesidad de pre-énfasis o de de-énfasis adicional. De hecho, como se dijo anteriormente, MF se puede considerar como sistema de FM con pre-énfasis y de de-énfasis perfectos.

La potencia de ruido de salida N_o está dada por

$$N_o = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_m} \mathcal{S}_{n_o}(\omega)\, d\omega$$

$$= \frac{2\alpha^2 \mathcal{N} f_m}{A^2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{(Ak_p)^2}{2\mathcal{N} f_m}\overline{f^2(t)}$$

y

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{2k_p{}^2 \overline{f^2(t)}\, \Delta f}{f_m}$$

y

$$\frac{(S_o/N_o)_{\text{PM}}}{(S_o/N_o)_{\text{AM}}} = (Ak_p)^2$$

aquí, A es la amplitud de la portadora MF. Para que la comparación entre AM y MF sea significativa, sea A la portadora de AM. Para la condición más favorable en AM, la modulación es del 100 %. Consideremos el caso especial en el que $f(t)$ es una señal sinusoidal. para el 100 % de modulación,

$$f(t) = A \cos \omega_m t$$

y una portadora MF está dada por

$$\varphi_{\text{PM}}(t) = A \cos (\omega_c t + Ak_p \cos \omega_m t)$$

$$\omega_i = \omega_c + Ak_p\omega_m \cos \omega_m t$$

y

$$\Delta\omega = Ak_p\omega_m$$

En consecuencia

$$\frac{(S_o/N_o)_{\text{PM}}}{(S_o/N_o)_{\text{AM}}} = \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_m}\right)^2$$

El mejoramiento de la razón de voltaje raíz cuadrático medio S/N está dado por

$$\frac{[(S_o/N_o)_{\text{PM}}]_{\text{vr}}}{[(S_o/N_o)_{\text{AM}}]_{\text{vr}}} = \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_m}\right)$$

Nótese que la naturaleza del mejoramiento de la razón S/N en MF con respecto a AM es similar a la de FM con respecto a AM. En ambos casos, el mejoramiento de la razón de potencia S/N es proporcional al ancho de banda de transmisión.

7.5 RUIDO EN SISTEMAS DE MODULACION POR PULSOS

En sistemas de modulación por pulsos, estudiaremos: la modulación en amplitud de pulso (MAP), la modulación en posición de pulso (MPP) y la modulación en pulsos codificados (MPC).

1. MAP

El comportamiento señal a ruido de los sistemas MAP es idéntico al de los sistemas AM/PS. El mejoramiento de la razón S/N en MAP es unitario, lo mismo que para BLU-PS. De igual manera, el mejoramiento de la razón S/N para MAP/AM es 2, el mismo que para BLD-PS. El resultado no tiene nada de particular pues los requisitos de ancho de banda para MAP y para MAP/AM son idénticos a los de BLU y BLD, respectivamente (véase la sección 5.4).

En MAP, la señal $f(t)$ se muestrea; la señal muestreada $f_s(t)$ se transmite en seguida a través de un filtro de paso bajo* el cual produce la señal original continua. Así, de hecho, estamos transmitiendo $f(t)$ directamente. En el proceso de transmisión la señal resulta contaminada por el ruido. En el receptor, se emplea un filtro de paso bajo. Es evidente, que en este caso la razón señal a ruido no se altera. Así

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = 1 \tag{7.61}$$

se puede ver que

$$S_o = S_i = \overline{f^2(t)}$$

y

$$N_o = N_i = \mathcal{N} f_m \qquad \text{(para ruido blanco)}$$

En el Apéndice B se comprueba el resultado de la ecuación 7.61 para M señales con multicanalización por distribución de tiempo. Si una señal MAP se transmite por MAP-AM, se puede demostrar fácilmente que el mejoramiento de la razón señal a ruido es de 2 (lo mismo que para BLD-PS).

2. MPP (Modulación en posición de pulso)

En MPP, la señal mensaje $f(t)$ se muestrea y los valores-muestra se transmiten en la forma de posiciones de pulso. El pulso k se desplaza de su posición estática en una cantidad proporcional a $f(kT)$, la muestra k de $f(t)$ (véase la figura 5.9). Los pulsos se transmiten por un canal de ancho de banda B. Esto provoca la dispersión del pulso, como lo ilustra la figura 2.9 de la sección 2.6. Podemos aproximarnos con bastante precisión al pulso recibido mediante un pulso trapezoidal. Esto se muestra en la figura 7.16

* Realmente, existen M mensajes cuyas muestras se intercalan con el propósito de la multicanalización por división de tiempo. Entonces, estas muestras se transmiten a través de un filtro de paso bajo con frecuencia de corte Mf_m. Aquí, por conveniencia, consideraremos el caso de una señal únicamente.

(véase la figura 2.9). El tiempo de subida t_r de un pulso está dado por (véase la ecuación 2.11)

$$t_r \simeq \frac{1}{B} \tag{7.62}$$

en donde B es el ancho de banda (en Hz) del canal. La posición del pulso trapezoidal es sensible al ruido aditivo del canal. Esto se puede ver en la figura 7.16b. La adición de una señal constante de magnitud x desplazará la posición de pulso en ϵ, en donde

$$\frac{\epsilon}{x} = \frac{t_r}{A} \tag{7.63}$$

Si x varía en forma aleatoria, entonces ϵ variará en la misma forma. Como ϵ es proporcional a x, el valor raíz cuadrático medio de ϵ será proporcional al valor raíz cuadrático medio de x. De la ecuación 7.63 se infiere que

$$\frac{\overline{\epsilon^2}}{\overline{x^2}} = \left(\frac{t_r}{A}\right)^2$$

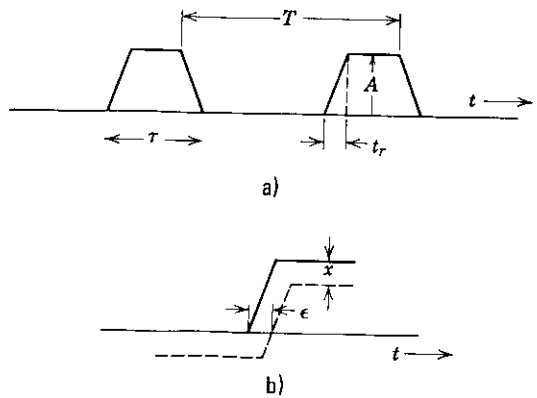


Figura 7.16

Así, si una señal de ruido $n(t)$ con valor cuadrático medio $\overline{n^2(t)}$ se suma a una señal MPP, el valor cuadrático medio de ϵ está dado por

$$\overline{\epsilon^2} = \left(\frac{t_r}{A}\right)^2 \overline{n^2(t)} \tag{7.64}$$

Cuando no existe ruido, la posición del pulso k varía en proporción a $f(kT)$, muestra k de $f(t)$. Si representamos por y_k el cambio en la posición del pulso k, entonces

$$y_k = k_1 f(kT)$$

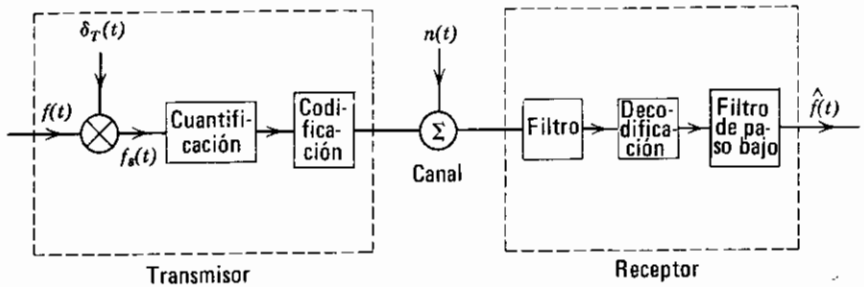


Figura 7.17

en donde k es una constante de proporcionalidad del modulador. Sin embargo, debido al ruido del canal, el cambio en la posición del pulso no es y_k, sino $y_k + \epsilon_k$ en donde ϵ_k es aleatoria, con valor cuadrático medio dado por la ecuación 7.64. Sea

$$\hat{y}_k = y_k + \varepsilon_k = k_1 f(kT) + \varepsilon_k \tag{7.65}$$

En el receptor, las posiciones de pulso se convierten de nuevo en muestras. La muestra k en el receptor es $\hat{y}_k$ (ecuación 7.65). Para obtener el mensaje original $f(t)$, las muestras se transmiten por un filtro de paso bajo con frecuencia de corte ω_m (véase la figura 1.47). La salida de este filtro es $\hat{y}(t)$, dada por (véase la ecuación 1.140b)

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= \sum_k \hat{y}_k Sa(\omega_m t - k\pi) \\ &= \sum_k [k_1 f(kT) + \varepsilon_k] Sa(\omega_m t - k\pi) \\ &= \sum_k k_1 f(kT) Sa(\omega_m t - k\pi) + \sum_k \varepsilon_k Sa(\omega_m t - k\pi)\end{aligned}$$

Cada uno de los sumandos representa una señal limitada en banda a ω_m radianes por segundo. Ya que $f(kT)$ representa la muestra de $f(t)$, de la ecuación 1.140b es evidente que el primer sumando es igual a $k_1 f(t)$. El segundo sumando representa una señal de ruido $\epsilon(t)$. Así, la salida $\hat{y}(t)$ está dada por

$$\hat{y}(t) = k_1 f(t) + \varepsilon(t)$$

así

$$\begin{aligned}s_o(t) &= k_1 f(t) \\ S_o &= k_1^2 \overline{f^2(t)} \\ n_o(t) &= \varepsilon(t)\end{aligned}$$

y

$$N_o = \overline{n_o^2(t)} = \overline{\varepsilon^2(t)}$$

Ahora bien mediante el resultado del ejemplo 2.2 (ecuación 2.31), donde se declara que el valor cuadrático medio de una señal es igual al valor

cuadrático medio de sus muestras, $\overline{\epsilon^2(t)}$, el valor cuadrático medio de $\epsilon(t)$, es igual a $\overline{\epsilon_k^2}$. Pero el valor cuadrático medio de ϵ_k está dado por la ecuación 7.64. Por lo tanto

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{\varepsilon_k^2} = \left(\frac{t_r}{A}\right)^2 \overline{n^2(t)}$$

así

$$N_o = \left(\frac{t_r}{A}\right)^2 \overline{n^2(t)}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{S_o}{N_o} &= \frac{k_1^2}{\overline{n^2(t)}} \left(\frac{A}{t_r}\right)^2 \overline{f^2(t)} \\ &= k_1^2 \frac{A^2}{\overline{n^2(t)}} \overline{f^2(t)}\, B^2\end{aligned}$$

en donde B es el ancho de banda del canal (en Hz).

Si la razón de la duración del pulso τ al período T es α, entonces la potencia de la señal de entrada S_i está dada por (si suponemos que $t_r \ll T$)

$$S_i = \alpha A^2$$

y la potencia de ruido a la entrada N_i está dada por

$$N_i = \overline{n^2(t)}$$

Por lo tanto

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{k_1^2}{\alpha} \overline{f^2(t)}\, B^2 \tag{7.66a}$$

Si consideramos razones de voltaje raíz cuadrático medio de señal a ruido en lugar de razones de potencia, obtenemos

$$\frac{(S_o/N_o)_{\text{vr}}}{(S_i/N_i)_{\text{vr}}} = k_1 \left(\frac{\overline{f^2(t)}}{\alpha}\right)^{1/2} B \tag{7.66b}$$

Así, el mejoramiento de la razón de potencia S/N es proporcional al cuadrado del ancho de banda. Este comportamiento es idéntico al de FM de banda ancha, como se ve en la ecuación 7.49. Es posible, en ambos sistemas, combinar el ancho de banda con la razón señal a ruido. La razón de voltaje S/N es linealmente proporcional al ancho de banda B. Esta es la característica de los sistemas sin codificación.

A continuación demostraremos que en los sistemas codificados, como el MPC, la razón de voltaje S/N se puede incrementar exponencialmente con el ancho de banda. Así, los sistemas codificados, por naturaleza, son capaces de mejor eficiencia de transmisión que los sistemas no codificados.

3. Sistemas codificados

En forma general, los sistemas de modulación se pueden dividir en dos clases: *a*) sistemas no codificados y *b*) sistemas codificados. En los sistemas no codificados un símbolo en el espacio del mensaje se transforma en un símbolo en el espacio de la señal modulada. Así, en AM, cada amplitud posible del mensaje original se transforma en una amplitud particular de la señal modulada. De la misma manera, en MPP cada amplitud del mensaje resulta un desplazamiento determinado de la posición del pulso. En sistemas codificados (como el MPC), sin embargo, cada símbolo del mensaje o amplitud se transforma en un cierto número de símbolos de señal. Tuller* ha demostrado que solamente con sistemas codificados se puede obtener teóricamente la combinación más eficiente, del ancho de banda con la razón señal a ruido.** Los sistemas no codificados (como FM o MPP) son por naturaleza incapaces de combinar el ancho de banda con la razón señal a ruido eficientemente. A continuación consideraremos el sistema MPC desde el punto de vista de la combinación ancho de banda-razón señal a ruido.

MPC binario

En MPC, la señal modulante se muestrea. Cada una de las muestras se transmite mediante un código formado por un grupo de pulsos, como se estudió en la sección 5.2. En general, las muestras pueden tomar cualquier valor en un cierto rango continuo de la amplitud; sin embargo, se permite que las muestras tomen cualquiera del número finito de niveles en este rango por medio de la aproximación de cada muestra el nivel permitido más cercano, como se muestra en la figura 5.10a. Esta aproximación que se conoce como cuantificación, es una fuente de error. La señal que se transmite es aproximada, por lo cual existe una inseguridad en la amplitud de la señal cuya cantidad es igual a la diferencia de los niveles permitidos. El error o la inseguridad se puede hacer tan pequeña como sea posible al aumentar el número de niveles en un rango dado de amplitud. En la figura 5.10a hay 16 niveles permitidos, con una separación de 0.1 volts entre dos niveles contiguos.

Consideraremos, primero, el caso de un código de pulsos binario en donde los pulsos pueden tomar amplitudes de 0 y A volts solamente. Como se observó en la figura 5.10b, para representar una muestra que puede tomar cualquiera de los 16 valores posibles se necesita un grupo de 4 pulsos binarios. Esto se debe a que 4 pulsos binarios pueden formar $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ patrones distintos. De igual forma, se necesita un grupo de 5 pulsos binarios para representar una muestra que pueda tomar cualquiera de 32 valores posibles. Es fácil ver que para representar una muestra que pueda tomar cualquiera de M valores posibles, necesitamos un grupo de $\log_2 M$ pulsos binarios por muestra. Nótese que se necesitaría un número infinito de pulsos por muestra si se las transmitiera exactamente, sin cuantificación. Esto se debe a que, haciendo $M = \infty$, las muestras pueden tomar cualquier valor en un rango continuo.

* W. G. Tuller "Theoretical Limits on the Rate of Transmission of Information" Proc. *IRE*, 37, 468, 1949.

** Sin embargo, se puede demostrar que, con un demodulador de fase óptimo (circuito retroalimentado en fase), se puede alcanzar un comportamiento cercano a la frontera teórica superior en el límite a medida que el ancho de banda de transmisión tiende a infinito y la densidad de potencia de la señal transmitida es uniforme en la banda de paso. Véase, por ejemplo, A. Viterbi, *Principles of Coherent Communication*, McGraw-Hill, New York, 1966.

En el receptor, los pulsos binarios se convierten de nuevo en las muestras (las muestras cuantificadas) y se hacen pasar, a continuación por un filtro de paso bajo para recuperar $f(t)$ (véase la figura 7.17).

Supongamos que las muestras de la señal $f(t)$ que estamos considerando se cuantifican a M niveles, cada uno separado por Δv volts; cada muestra queda representada por un grupo de $\log_2 M$ pulsos binarios. En la figura 5.10a, $M = 16$, $\Delta v = 0.1$ volts y $\log_2 M = 4$. Sea $\sigma_n{}^2$ el valor cuadrático medio del ruido. En seguida calcularemos la potencia de la señal en la entrada del demodulador; esta entrada consiste de pulsos binarios. Para calcular la potencia de la señal codificada, debemos conocer la distribución de amplitud de la señal modulante $f(t)$. Por conveniencia, supongamos que las amplitudes de $f(t)$ están uniformemente distribuidas en* el rango dado (0 a 1.5 volts en la figura 5.10a). Esto implica que la probabilidad de observar la amplitud de la señal en cualquier valor del rango es la misma que la de cualquier otro valor del mismo rango. En conclusión, la probabilidad de ocurrencia de cualquier nivel cuantificado es la misma que la de cualquier otro (igual a $1/M$). Por lo tanto, es evidente que la probabilidad de observar cualquier patrón de código es la misma que la de cualquier otro patrón (es decir 1/16 para los patrones de la figura 5.10b). Así, cada uno de los patrones de código ocurren con la misma frecuencia. En consecuencia, la probabilidad de observar un pulso de 0 volts es igual a la de observar un pulso de A volts (igual a 1/2). En promedio, el pulso en A volts estará presente la mitad del tiempo y en la otra mitad no habrá pulso. Es evidente que la potencia de señal promedio S_i está dada por

$$S_i = \frac{A^2}{2}$$

¿Cuál debe ser la magnitud de A? Es claro que la elección de A se determina por consideraciones de ruido. Si A es grande con respecto al voltaje de ruido raíz cuadrático medio, será posible reconocer el pulso en la presencia de ruido con muy poca probabilidad de error.

Para MPC, la detección de la señal se concreta a reconocer la presencia o ausencia del pulso. Si hacemos que $A = K\sigma_n$ entonces, cuando K es suficientemente grande, se reduce tanto como se quiera la probabilidad de error. En el capítulo 9 consideraremos este tema. Se demuestra que, para $K = 10$, la probabilidad de error se reduce al orden de 10^{-6}. Sin embargo, en este capítulo, K quedará como constante desconocida. Si el pulso tiene la misma probabilidad de presencia y ausencia, entonces

* Esta suposición no es necesaria. Se puede demostrar que los resultados deducidos aquí son válidos para cualquier distribución de amplitud siempre que el intervalo de cuantificación sea suficientemente pequeño.

$$S_i = \frac{A^2}{2} = \frac{K^2\sigma_n^2}{2}$$

y

$$N_i = \sigma_n^2$$

Por lo tanto

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{K^2}{2} \tag{7.67}$$

Al tomar K suficientemente grande, podemos reducir la probabilidad de error en esta detección tanto como sea posible. En consecuencia, el ruido del canal se elimina. Sin embargo, debido a la cuantificación, se tiene un error en la señal recibida. Existe una inseguridad que se introduce en el mismo transmisor y el error entre las señales real y aproximada se presenta como ruido.

Para calcular el ruido de cuantificación, empleamos los resultados del ejemplo 2.2, ecuación 2.31. Esta establece que el valor cuadrático medio de una señal limitada en banda es igual a valor cuadrático medio de sus muestras (tomadas a una velocidad mayor o igual a la velocidad de Nyquist):

$$\overline{f^2(t)} = \overline{f_k^2}$$

Calcularemos a continuación el valor cuadrático medio del error (ruido de cuantificación) que introduce el proceso de cuantificación. Cada muestra de $f(t)$ se aproxima al valor permitido más cercano. Sea f_k la muestra k de $f(t)$ y $\hat{f}_k$ la muestra k aproximada. Desde luego, $\hat{f}_k$ es uno de los M niveles permisibles más cercanos a f_k. Podemos expresar la señal $f(t)$ en términos de sus muestras f_k (ecuación 1.140b),

$$f(t) = \sum_k f_k Sa(\omega_m t - k\pi) \tag{7.68a}$$

En el receptor, al decodificarse el tren de pulsos, genera las muestras $\hat{f}_k$. Dichas muestras, al pasar por un filtro de paso bajo, producen una señal continua $\hat{f}(t)$ (ecuación 1.140),

$$\hat{f}(t) = \sum_k \hat{f}_k Sa(\omega_m t - k\pi) \tag{7.68b}$$

La señal error $e(t)$ (que actúa como ruido) está dada por

$$e(t) = f(t) - \hat{f}(t) = \sum_k (f_k - \hat{f}_k) Sa(\omega_m t - k\pi) \tag{7.68c}$$

Si ponemos

$$e_k = f_k - \hat{f}_k$$

entonces

$$e(t) = \sum_k e_k Sa(\omega_m t - k\pi)$$

De los resultados del ejemplo 2.2 es claro que el valor cuadrático medio de $e(t)$ es igual al valor cuadrático medio de sus muestras e_k.

$$\overline{e^2(t)} = \overline{e_k^2}$$

Notamos que e_k es la diferencia entre el valor de la muestra real $f(t)$ y el valor de la muestra cuantificada $\hat{f}_k$. Como los niveles cuantificados están separados por Δv volts, e_k debe estar en el intervalo $(-\Delta v/2)$, $(\Delta v/2)$. Como se supone uniforme la distribución de amplitud de $f(t)$ en el intervalo $[0, (M-1)\,\Delta v]$, la distribución de e_k también será uniforme en el intervalo $(-\Delta v/2)$, $(\Delta v/2)$; es decir, la probabilidad de observar e_k, error de cuantificación típico en un valor del rango $(-\Delta v/2)$, $(\Delta v/2)$, es la misma que la de observarlo en cualquier otro valor del mismo intervalo. Para calcular el valor cuadrático medio de e_k, dividimos el intervalo $(-\Delta v/2)$, $(\Delta v/2)$ en N incrementos pequeños de anchura $\Delta v/N$ cada uno. La cantidad e_k tomará estos valores separados por $\Delta v/N$ volts con la misma frecuencia. A continuación, debemos encontrar el valor cuadrático medio de todos estos valores* en el límite cuando $N \to \infty$ (o el incremento tiende a cero). Así, en promedio, e_k tomará valores $0, \pm \Delta v/N, \pm 2\,\Delta v/N, \ldots, \pm r\,\Delta v/N, \ldots, \pm \Delta v/2$ con la misma frecuencia. Desde luego, el valor cuadrático medio de e_k está dado por

$$\begin{aligned}
\overline{e_k^2} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} \left(\frac{n\,\Delta v}{N}\right)^2 \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N} \sum_{N=0}^{N/2} \left(\frac{n\,\Delta v}{N}\right)^2 \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{2(\Delta v)^2}{N^3} \sum_{N=0}^{N/2} n^2 \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{2(\Delta v)^2}{N^3} \left[\frac{\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)(N+1)}{6}\right] \\
&= \frac{(\Delta v)^2}{12}
\end{aligned}$$

* Los que conocen de teoría de la probabilidad sabrán que en donde $p(e_k)$ es la

$$\overline{e_k^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e_k^2 p(e_k)\, de_k$$

función de densidad de probabilidad de e_k. En este caso

$$p(e_k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta v} & \dfrac{-\Delta v}{2} < e_k < \dfrac{\Delta v}{2} \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\overline{e_k^2} = \frac{1}{\Delta v} \int_{-\Delta v/2}^{\Delta v/2} e_k^2\, de_k = \frac{(\Delta v)^2}{12}$$

Así,

$$\overline{e^2(t)} = \frac{(\Delta v)^2}{12}$$

Pero $\overline{e^2(t)}$ es el valor cuadrático medio del error de cuantificación o ruido de cuantificación a la salida. Representaremos por N_q la potencia del ruido de cuantificación. Por lo tanto.

$$N_o = N_q = \frac{(\Delta v)^2}{12} \tag{7.69}$$

En seguida calculamos la potencia de la señal en la salida. La señal de salida $f(t)$ está dada por (ecuación 7.68b).

$$\hat{f}(t) = \sum_k \hat{f}_k Sa(\omega_m t - k\pi)$$

Empleamos los resultados del ejemplo 2.2 (ecuación 2.31) para obtener

$$\overline{\hat{f}^2(t)} = \overline{(\hat{f}_k)^2}$$

Así, el valor cuadrático medio de la señai de salida es igual al valor cuadrático medio de las muestras cuantificadas. las muestras cuantificadas pueden tomar M valores discretos y cada uno tiene la misma probabilidad. Esto se debe a que hemos supuesto que la amplitud de la señal $f(t)$ tiene la misma probabilidad de ocurrencia en el rango 0 a $(M-1)\,\Delta v$. La muestra $\hat{f}_k$ puede tomar cualquiera de los M valores $0, \Delta v, 2\,\Delta v, \ldots, (M-1)\,\Delta v$, con la misma probabilidad. Por lo tanto, el valor cuadrático medio de f_k es

$$\begin{aligned}
\overline{(\hat{f}_k)^2} &= \frac{1}{M}\{0^2 + (\Delta v)^2 + (2\,\Delta v)^2 + \cdots + [(M-1)\,\Delta v]^2\} \\
&= \frac{(\Delta v)^2}{M}\sum_{k=0}^{M-1} k^2 \\
&= \frac{\Delta v^2}{M}\frac{M(M-1)(2M-1)}{6} \\
&= \frac{\Delta v^2(M-1)(2M-1)}{6}
\end{aligned}$$

En la práctica, $M \gg 1$ y

$$\overline{(\hat{f}_k)^2} \simeq \frac{M^2}{3}(\Delta v)^2$$

En consecuencia

$$S_o = \overline{(\hat{f}_k{}^2)} = \frac{M^2}{3}(\Delta v)^2 \tag{7.70}$$

De las ecuaciones 7.67, 7.69 y 7.70, obtenemos*

$$\frac{(S_o/N_o)}{(S_i/N_i)} = \frac{4M^2}{K^2/2} = \frac{8M^2}{K^2} \tag{7.71}$$

Debemos ahora relacionar el mejoramiento de la razón señal a ruido con el ancho de banda del sistema. Hemos visto que para M niveles de cuantificación, necesitamos $\log_2 M$ pulsos por muestra. Ya que para una señal de banda limitada a f_m Hz, necesitamos $2f_m$ muestras por segundo, el sistema debe ser capaz de transmitir $2f_m \log_2 M$ pulsos por segundo. De lo tratado en la sección 5.4, se observa que un sistema con ancho de banda B es capaz de transmitir $2B$ pulsos independientes por segundo. En consecuencia, para transmitir $2f_m \log_2 M$ pulsos por segundo, el ancho de banda necesario es $f_m \log_2 M$.

$$B = f_m \log_2 M$$

y

$$M^2 = (2)^{2B/f_m}$$

Así

$$\frac{(S_o/N_o)}{(S_i/N_i)} = \frac{8}{K^2}(2)^{2B/f_m} \tag{7.72}$$

Si consideramos la razón de voltaje raíz cuadrático medio S/N en lugar de la razón de potencia, obtenemos

$$\frac{(S_o/N_o)_{\text{vr}}}{(S_i/N_i)_{\text{vr}}} = \frac{\sqrt{8}}{K}(2)^{B/f_m} \tag{7.73}$$

MPC *S*-ario

Hemos estudiado el MPC binario, en donde los pulsos pueden tomar dos valores solamente. También se puede emplear pulsos s-arios; aquí, los pulsos pueden tomar s niveles. Así, para un MPC 3-ario, se pueden emplear pulsos con tres amplitudes; por ejemplo, 0 volts, A volts y $2A$ volts. Para el caso s-ario, se necesita un grupo de $\log_s M$ pulsos para representar una muestra que pueda tomar cualquiera de M valores posibles. Esto se puede ver fácilmente al considerar el hecho de que un grupo de k pulsos s-arios pueden formar

$$\underbrace{s \times s \times s \times \cdots \times s}_{k \text{ veces}} = s^k$$

patrones diferentes. Por lo que para formar M patrones distintos necesitamos

$$M = s^k \qquad \text{y} \qquad k = \log_s M \qquad \text{pulsos por muestra}$$

* En esta deducción se supone en forma implícita que $f(t) > 0$ (véase figura 5.10a). Realmente, $f(t)$ puede ser positiva y negativa pudiendo tener valor medio cero. En tal caso $S_o = (M^2/12)\,(\Delta v)^2$.

Suponemos que cada nivel del pulso s-ario está separado por $K\sigma_n$. El nivel número r del pulso tiene una amplitud finita $rK\sigma_n$. Si suponemos que las amplitudes de $f(t)$ tienen la misma probabilidad de encontrarse en cualquier punto de un rango dado, entonces en la señal transmitida (empleando pulsos s-arios), la probabilidad de observar un pulso de un nivel es la misma que la de observar un pulso de cualquier otro nivel. Por lo tanto, el valor cuadrático medio de la señal de entrada está dado por

$$S_i = \frac{1}{s}[(A_0)^2 + (A_1)^2 + \cdots + (A_{s-1})^2] \quad \text{en donde } A_r = rK\sigma_n$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{r=0}^{s-1} A_r^2$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{r=0}^{s-1} r^2K^2\sigma_n^2$$

$$= K^2\sigma_n^2\frac{(s-1)(2s-1)}{6} \tag{7.74}$$

En el receptor, la señal de pulsos se decodifica para obtener las muestras cuantificadas. Estas, por supuesto, son idénticas a las que se obtienen con MPC binario. Es evidente que la potencia de la señal de salida S_o y la potencia del ruido a la salida (potencia de ruido de cuantificación) son las mismas que para MPC binario. Así

$$S_o = \frac{M^2}{3}(\Delta v)^2$$

$$N_o = \frac{(\Delta v)^2}{12}$$

También

$$N_i = \sigma_n^2$$

Por lo tanto

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{24M^2}{K^2(s-1)(2s-1)} \tag{7.75}$$

Para un pulso s-ario se necesitan $\log_s M$ pulsos por muestra solamente y un total de $2f_m \log_s M$ pulsos por segundo. Esto requiere de un ancho de banda B dado por

$$B = f_m \log_s M$$

En consecuencia,

$$M^2 = s^{2B/f_m}$$

y

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{24}{K^2(s-1)(2s-1)}s^{2B/f_m} \tag{7.76}$$

Nótese que la substitución de $s = 2$ en la ecuación 7.76 da la ecuación 7.72 como era de esperarse.

El cociente de las razones de voltaje S/N está dado por

$$\frac{(S_o/N_o)_{vr}}{(S_i/N_i)_{vr}} = \frac{2\sqrt{6}}{K\sqrt{(s-1)(2s-1)}}s^{B/f_m} \tag{7.77}$$

En este estudio hemos empleado pulsos s-arios cuyas amplitudes están en el rango de 0 a $(s-1)K\sigma_n$ en pasos de $K\sigma_n$. Aquí todos los pulsos son positivos. Así. la señal codificada tiene un valor de corriente directa (en este caso $K\sigma_n(s-1)/2$). La transmisión de esta componente de corriente directa no tiene propósito útil alguno. Por lo que podemos eliminar dicha componente y reducir la potencia de señal en una cantidad $[K\sigma_n(s-1)/2]^2$. La nueva potencia de señal S_i' está dada por

$$S_i' = S_i - \left[\frac{K\sigma_n(s-1)}{2}\right]^2$$

$$= K^2\sigma_n^2\left[\frac{(s-1)(2s-1)}{6} - \frac{(s-1)^2}{4}\right]$$

$$= \frac{K^2\sigma_n^2(s^2-1)}{12} \tag{7.78}$$

La eliminación del nivel de corriente directa $K\sigma_n(s-1)/2$ de la señal codificada equivale a emplear s pulsos en pasos de $K\sigma_n$ en el rango $-K\sigma_n(s-1)/2$ a $K\sigma_n(s-1)/2$. Así, empleando pulsos binarios (permitiendo que los pulsos tomen valores positivos y negativos con una separación en niveles dada) hemos reducido la potencia en la cantidad $[K\sigma_n(s-1)/2]^2$. En el caso binario, esto significa emplear dos pulsos de altura $A/2$ y $-A/2$ en lugar de 0 y A. Sin duda, la potencia promedio del esquema bipolar es $A^2/4$ y la del esquema unipolar es $A^2/2$.

El mejoramiento del cociente con la reducción de la potencia de señal a la entrada es

$$\frac{S_o/N_o}{S_i'/N_i'} = \frac{48}{K^2(s^2-1)}s^{2B/f_m} \tag{7.79}$$

El cociente de las razones de voltaje S/N está dada por

$$\frac{(S_0/N_0)_{vr}}{(S_i'/N_0')_{vr}} = \frac{4\sqrt{3}}{K\sqrt{s^2-1}}s^{B/f_m} \tag{7.80}$$

Nótese que la razón S'/N' de señal a ruido a la entrada está dada por (ecuación 7.78)

$$\frac{S_i'}{N_i'} = \frac{S_i'}{\quad} - \frac{K^2(s^2-1)}{12} \tag{7.81}$$

7.6 COMPARACION ENTRE LOS SISTEMAS CODIFICADOS Y NO CODIFICADOS

Ya se han estudiado algunos sistemas de banda ancha que permiten combinar la razón S/N con el ancho de banda. Los sistemas de FM (también MF) y MPP son ejemplos de sistemas de banda ancha no codificados. El MPC es un ejemplo de sistemas codificados de banda ancha. En los sistemas no codificados (FM y MPP) hemos observado que el mejoramiento de la razón de voltaje S/N es lineal con el ancho de banda (ecuación 7.53, 7.66b). Para los sistemas codificados (MPC), se observó que el mejoramiento de la razón de voltaje S/N es exponencial con el ancho de banda (ecuación 7.80). Así, la combinación del ancho de banda y la razón S/N es mucho más eficiente en los sistemas codificados que en los no codificados. Los sistemas codificados son por naturaleza capaces de mejor eficiencia para transmitir que los sistemas no codificados.

Se demostrará en el capítulo 8 que el mejoramiento máximo teórico de la razón S/N que se puede alcanzar es exponencial con el ancho de banda. Es decir, los sistemas codificados se acercan más a realizar la eficiencia máxima teórica que se puede obtener. No es difícil entender la razón cualitativa de la relación exponencial en la MPC. En los sistemas no codificados, duplicar el ancho de banda es duplicar la razón de voltaje S/N. Pero en MPC, duplicar el ancho de banda permite el doble del número de pulsos que se van a transmitir. Si se duplica el número de pulsos, el número de patrones posibles que se pueden formar aumenta con el cuadrado. Por ejemplo, un grupo de 2 pulsos binarios pueden formar 4 patrones; pero un grupo de 4 pulsos binarios puede formar 16 patrones. En consecuencia, duplicar el ancho de banda es elevar al cuadrado el número de niveles de cuantificación. De igual forma, triplicar el ancho de banda permite triplicar el número de pulsos. Pero al triplicar el número de pulsos se incrementa el número de patrones con la potencia 3. En general, cuando se incrementa n veces el ancho de banda, aumenta exponencialmente (a la potencia n) el número de patrones. Esto permite el incremento exponencial de los niveles de cuantificación en un rango dado. Es evidente que Δv, la separación de los niveles de cuantificación, disminuye exponencialmente con el ancho de banda. La potencia de ruido de cuantificación (potencia de ruido a la salida) es $(\Delta v/12)^2$ y se reduce exponencialmente. Esto provoca que la razón S/N se mejore en forma exponencial.

La ventaja más importante de un sistema codificado es su conveniencia para la comunicación de larga distancia empleando varias estaciones repetidoras. En cada estación repetidora, la señal mezclada con el ruido queda restituida mediante la regeneración de los pulsos. Así, en cada estación se transmite una señal libre de ruido. De hecho, esto implica que para MPC solamente necesitamos preocuparnos por el ruido del enlace entre las estaciones repetidoras. El ruido no se acumula a lo largo de la trayectoria de transmisión. Así, los requisitos de transmisión en MPC son casi independientes de la longitud total del sistema. En realidad, por MPC, se puede transmitir a cualquier distancia colocando suficientes estaciones repetidoras. Esta es la razón lógica del empleo de los sistemas codificados. En contraste, en

los sistemas no codificados o de modulación analógica la señal está constantemente afectada por el ruido y no puede depurarse o regenerarse periódicamente a lo largo de la trayectoria. Ya que el ruido se acumula a lo largo de la trayectoria, cuanto más larga sea la trayectoria de transmisión, mayor será el ruido. Esto restringe la distancia en la que las señales se pueden transmitir.

El lector reconocerá la similitud entre los sistemas codificados y no codificados con los sistemas digitales y analógicos respectivamente. En los sistemas analógicos, por ejemplo, las computadoras analógicas, el incremento del voltaje que representa la variable física aumenta la precisión linealmente. Sin embargo, en los sistemas digitales el incremento del número de dígitos aumenta la precisión exponencialmente. En los sistemas analógicos los errores se acumulan, en tanto que en los sistemas digitales (por ejemplo la computadora digital) dicha acumulación no se presenta, y por debajo de cierto nivel el ruido no tiene influencia alguna.

APENDICE A. ACLARACION ACERCA DEL CALCULO DE LA POTENCIA DE SEÑAL Y RUIDO POR SEPARADO EN FM

A la entrada del demodulador, el ruido es de paso de banda con un ancho de banda de aproximadamente $2\,\Delta\omega$. Por otro lado, la frecuencia portadora, varía en proporción a la señal modulante $f(t)$ que es de banda limitada a ω_m radianes por segundo. Para FM de banda ancha, $\Delta\omega \gg \omega_m$. Por lo tanto, la variación de la señal de ruido es mucho más rápida que las variaciones en la frecuencia portadora. En consecuencia, es razonable suponer que la frecuencia portadora es constante en un intervalo de Nyquist de $1/2f_m$ mediante una función en forma de escalera, como se ilustra en la figura 4.3a. Así, entre cualesquiera dos instantes de muestreo sucesivos, la portadora tiene una frecuencia constante. Esto puede interpretarse como si la señal modulante $f(t) = 0$ y la frecuencia portadora $\omega_k = \omega_c + k_f f(t_k)$. La señal de ruido de paso de banda $n_i(t)$ se puede expresar con ω_k como la frecuencia central como sigue.

$$n_i(t) = n_c(t) \cos \omega_k t + n_s(t) \operatorname{sen} \omega_k t$$

Siguiendo el desarrollo de la ecuación 7.43 en el texto, obtenemos

$$S_{n_0}(\omega) = \frac{\alpha^2\omega^2}{A^2} S_{n_s}(\omega)$$

en donde

$$S_{n_s}(\omega) = \begin{cases} S_n(\omega - \omega_k) + S_n(\omega + \omega_k) & |\omega| < \Delta\omega + 2\omega_m + k_f f(t_k) \\ 0 & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

Nótese que el ancho de banda de transmisión es $2(\Delta\omega + 2\omega_m)$. Para ruido blanco

$$S_n(\omega) = \frac{\mathcal{N}}{2}$$

El filtro final de banda base suprime todo el ruido en el rango $|\omega| > \omega_m$. Si $S_n(\omega) = \mathcal{N}/2$ entonces, evidentemente $S_{n0}(\omega)$, la densidad de potencia del ruido de salida, está dado por (figura A7.1)

$$S_{n_s}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^2\omega^2\mathcal{N}}{A^2} & |\omega| < \omega_m \\ 0 & \text{en cualquier otro punto} \end{cases} \tag{A7.1}$$

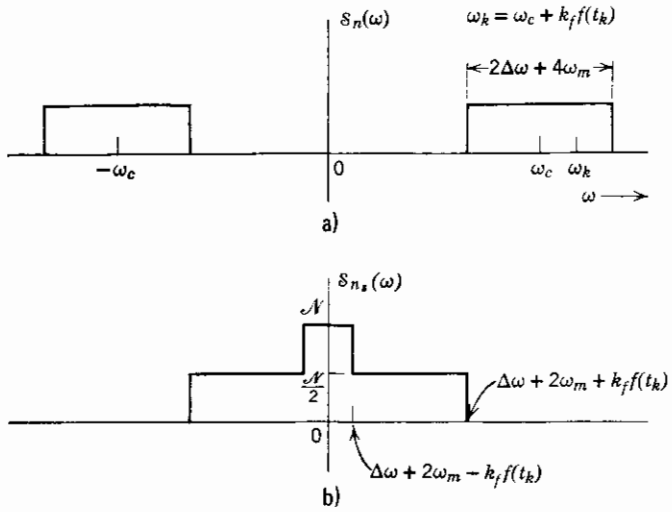


Figura A7.1

este resultado es idéntico al de la ecución 7.46. La potencia del ruido de salida N_o está dada por

$$N_o = \frac{\alpha^2\mathcal{N}}{\pi A^2}\int_0^{\omega_m}\omega^2\,d\omega$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2\frac{\mathcal{N}{\omega_m}^3}{2\pi} \tag{A7.2}$$

Este resultado es el mismo que el de la ecuación 7.47. Así, la potencia de ruido en cada intervalo es la misma y está dada por la ecuación 7.47. Evidentemente, la potencia de ruido en todo el intervalo será la misma.

Cabe notar que las razones dadas aquí son válidas sólo si $\Delta\omega \gg \omega_m$ (FM de banda ancha) y el ruido es blanco.

APENDICE B. RELACION SEÑAL A RUIDO EN SISTEMAS DE MULTICANALIZACION MAP POR DIVISION DE TIEMPO

Consideremos el sistema de multicanalización MAP por división de tiempo mostrado en la figura A7.2. Este es el mismo arreglo que el estudiado en la sección 5.4. Existen M señales mensaje $f_1(t)$, $f_2(t)$, . . . , $f_M(t)$, cada una de banda limitada a B Hz. Todas estas señales se muestrean individualmente y todas las muestras se intercalan, como se hizo en la sección 5.3. Las muestras multicanalizadas se transmiten en seguida por un filtro de paso bajo con frecuencia de corte MB Hz. La salida de este filtro es una

señal continua cuyas amplitudes en los instantes de muestreo son idénticas a los valores muestras.* Representemos la salida de este filtro por $\varphi(t)$. Para calcular la potencia de $\varphi(t)$, empleamos el resultado de la ecuación 2.31 que establece que, para una señal de banda limitada $f(t)$, el valor cuadrático medio de la señal es igual al valor cuadrático medio de sus muestras.

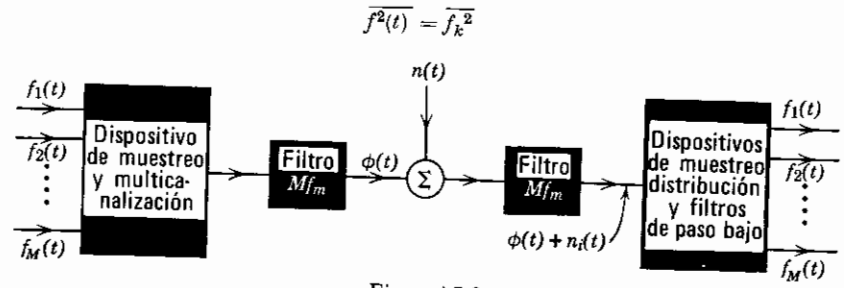


Figura A7.2

en donde $\overline{f_k^2}$ es el valor cuadrático medio de las muestras. Esto se obtiene sumando el cuadrado de las muestras (tomadas en un intervalo de tiempo grande) y dividiendo entre el número total de muestras. Si $f(t)$ es de banda limitada a B Hz, entonces

$$\overline{f_k^2} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2B\tau}\sum_k f_k^2$$

Aquí, f_k es la muestra número k de $f(t)$ y $2B\tau$ es el número total de muestras en τ segundos (a una velocidad de $2B$ muestras por segundo).

Es claro ahora, que el valor cuadrático medio de $\varphi(t)$ es el valor cuadrático medio de sus muestras

$$\overline{\varphi^2(t)} = \overline{\varphi_k^2}$$

Pero las muestras de $\varphi(t)$ son las muestras de M señales $f_1(t)$, $f_2(t)$, . . . , $f_M(t)$ intercaladas. Supongamos, por facilidad, que todas estas señales tienen la misma potencia (valores cuadráticos medios iguales):

$$\overline{f_1^2(t)} = \overline{f_2^2(t)} = \cdots = \overline{f_M^2(t)} = \overline{f^2(t)}$$

Desde luego, la media de los cuadrados de las muestras de cada señal será $\overline{f^2(t)}$. Si todas estas muestras se intercalan, la media (del cuadrado) permanecerá igual pues todas las muestras tienen la misma media (del cuadrado). Así

$$\overline{\varphi^2(t)} = \overline{f^2(t)}$$

* Realmente, las amplitudes de la señal continua son $1/T$ multiplicado por los valores de las muestras, en donde T es el intervalo de muestreo (en este caso $T = 1/2\,MB$). Esto se puede ver por la ecuación 5.1. Por conveniencia, supondremos un filtro ideal con ganancia T, para que la salida del filtro sea una señal continua cuyas amplitudes en el instante de muestreo sean idénticas a las muestras correspondientes. Esta suposición no afecta nuestros cálculos, únicamente añade un factor de ganacia en el sistema.

de donde la potencia (valor cuadrático medio) de $\varphi(t)$ es la misma que la de las señales mensaje individuales. La media cuadrática de $\varphi(t)$ es la potencia S_i de la señal de entrada.

$$S_i = \overline{f^2(t)}$$

El ancho de banda de $\varphi(t)$ es MB y en consecuencia el filtro de entrada del receptor tiene un ancho de banda MB. Si suponemos que el ruido del canal es blanco, con densidad de potencia $\mathcal{N}/2$, entonces la potencia (valor cuadrático medio) del ruido de entrada $n_i(t)$ está dado por

$$\overline{n_i^2(t)} = 2(MB)\frac{\mathcal{N}}{2} = M\mathcal{N}B$$

Esto es la potencia del ruido de entrada N_i. En consecuencia,

$$N_i = M\mathcal{N}B$$

Nótese que el valor cuadrático medio de las muestras de ruido también será $M\mathcal{N}B$. Así

$$n_k^2 = M\mathcal{N}B$$

A continuación, en el detector, la señal continua de entrada $\varphi(t) + n_i(t)$ se muestrea con una velocidad de $2MB$ muestras por segundo. La muestra número k es $(\varphi_k + n_k)$, la suma de la muestra k de $\varphi(t)$ con la muestra k de $n_i(t)$. El valor cuadrático medio de φ_k es $\overline{f^2(t)}$ y el valor cuadrático medio de n_k es $M\mathcal{N}B$. Estas muestras se distribuyen a los M canales, en forma sucesiva, por el detector. Los valores cuadráticos medios de las muestras en cada uno de los M canales, sin embargo, no se afecta. En seguida, estas muestras se transmiten por un filtro de paso bajo para producir M señales individuales. El valor cuadrático medio de cada señal es $\varphi_k^2 = \overline{f^2(t)}$ y el valor cuadrático medio del ruido a la salida en cada canal será $n_k^2 = M\mathcal{N}f_m$. Por lo tanto,

$$S_o = \overline{f^2(t)}$$

$$N_o = M\mathcal{N}B$$

Luego

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = 1$$

PROBLEMAS

1. A través de un filtro de paso de banda, cuya función de transferencia se muestra en la figura P-7.1, se transmite un ruido blanco con densidad de potencia

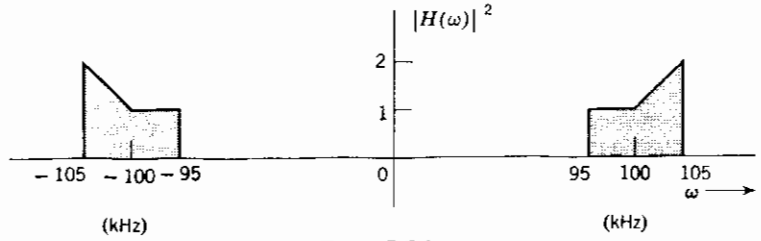


Figura P-7.1

$\mathcal{N}/2$. La salida del filtro es un ruido de paso de banda. Expresar esta señal en términos de las componentes en cuadratura, como en la figura 7.10. Determinar los espectros de densidad de potencia y los valores cuadráticos medio de $n_c(t)$ y $n_s(t)$.

2. A través del filtro ideal de paso de banda de la figura P-7.2b, se transmite una señal de ruido con espectro de densidad de potencia $\mathcal{S}_n(\omega)$ que se ilustra en la figura P-7.2a. Encontrar los espectros de densidad de potencia de las componentes en cuadratura $n_c(t)$ y $n_s(t)$.

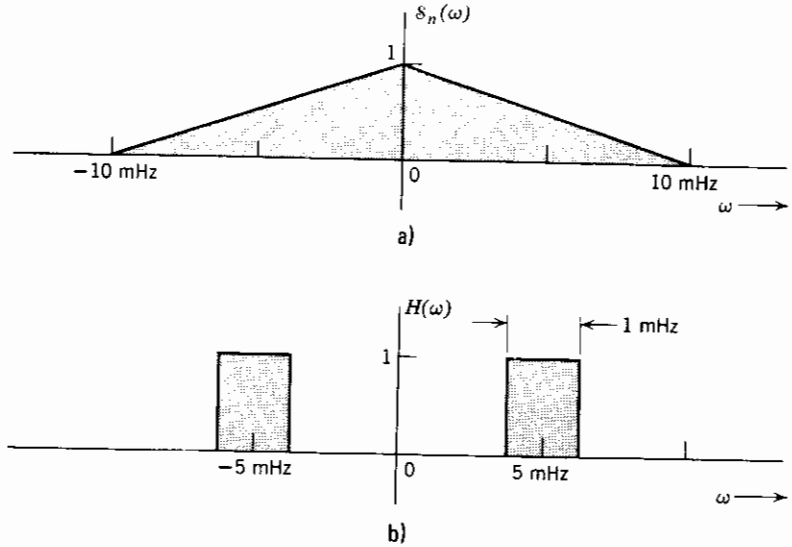


Figura P-7.2

3. Un determinado canal tiene un espectro de densidad de potencia de ruido uniforme $\mathcal{S}_n(\omega) = 0.5 \times 10^{-3}$. Por este canal se transmite una señal de BLD-PS. La señal modulante $f(t)$ es de banda limitada a 5 KHz y la frecuencia de la portadora es 100 KHz. La potencia de la señal modulada (bandas laterales) es de 10 KW. La señal de entrada en el receptor se filtra con un filtro de paso de banda antes de que sea alimentada al demodulador.

a) ¿Cuál debe ser la función de transferencia de este filtro?

b) ¿Cuál es la razón de potencia de señal a ruido en la entrada del demodulador?

c) ¿Cuál es la razón de potencia de señal a ruido en la salida del demodulador?

d) Encontrar y dibujar el espectro de densidad de potencia de ruido en la salida del demodulador.

4. Considérese el canal del problema 3 con densidad de potencia de ruido uniforme $\mathcal{S}_n(\omega) = 0.5 \times 10^{-3}$. Por este canal se transmite una señal de BLU-PS. La señal modulante $f(t)$ es de banda limitada a 5 KHz y la frecuencia de la portadora es de 100 KHz. La potencia de la señal modulada es de 10 KW. La señal de entrada en el receptor se filtra con un filtro de paso de banda ideal antes de alimentar el demodulador. Considérese la banda lateral superior (BLS) como la transmitida.

a) ¿Cuál debe ser la función de transferencia del filtro de paso de banda de entrada?

b) ¿Cuál es la razón de potencia de señal a ruido a la entrada del demodulador?

c) ¿Cuál es la razón de potencia de señal a ruido a la salida del demodulador?

d) Comparar la razón anterior con la de BLD-PS del problema 3.

Repetir este problema en el caso de la banda lateral inferior (BLI). Comentar la situación.

5. El espectro de densidad de potencia $\mathcal{S}_n(\omega)$ del ruido de un determinado canal se muestra en la figura P-7.5. Por dicho canal se transmite una señal BLD-PS. La señal modulante $f(t)$ es de banda limitada a 5 KHz, y la frecuencia de la portadora es de

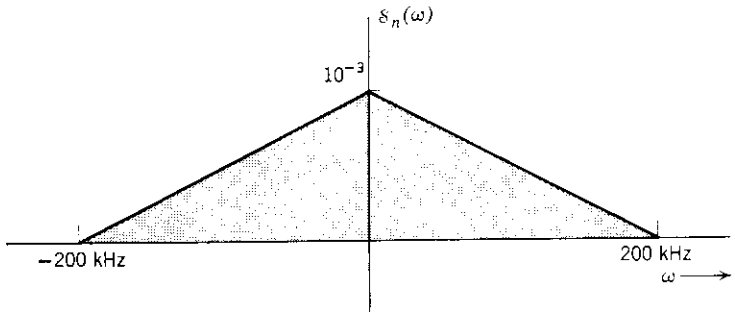


Figura P-7.5

100 KHz. La potencia de la señal modulada es de 10 KW. La señal de entrada al receptor se filtra con un filtro de paso de banda ideal antes de alimentarla al demodulador.

a) ¿Cuál debe ser la función de transferencia de este filtro?

b) ¿Cuál es la razón de potencia de señal a ruido a la entrada del demodulador?

c) ¿Cuál es la razón de potencia de señal a ruido a la salida del demodulador?

d) Encontrar y dibujar la densidad de potencia de ruido a la salida del demodulador.

6. Considérese el canal de problema 5 cuyo espectro de densidad de potencia de ruido es el de la figura P-7.5. Por este canal se transmite una señal BLU-PS. La señal modulante $f(t)$ (la misma del problema 5) es de banda limitada a 5 KHz y la frecuencia de la portadora es de 100 KHz. La potencia de la señal modulada es de 10 KW. La señal de entrada al receptor se filtra con un filtro de paso de banda ideal antes de alimentarla al demodulador.

Considérese la tansmisión de la banda lateral superior (BLS).

a) ¿Cuál debe ser la función de transferencia del filtro de paso de banda a la entrada del receptor?

b) ¿Cuál es la razón de potencia de señal a ruido a la entrada del demodulador?

c) ¿Cuál es la razón de potencia de señal a ruido a la salida del demodulador?

d) Comparar la razón de *c*) con la razón de señal a ruido de salida para BLD-PS del problema 5.

e) Encontrar y dibujar la densidad de potencia de ruido a la salida del demodulador.

f) Repetir el problema para el caso de la banda lateral inferior (BLI). Comentar la situación.

7. Se emplea un canal con ruido blanco (densidad de potencia $\mathcal{S}_n(\omega) = 0.5 \times 10^{-3}$) para transmitir una señal de AM. La señal modulante $f(t)$ está limitada en banda a 5 KHz y la frecuencia de la portadora es de 100 KHz. La potencia de la banda lateral es de 10 KW y la amplitud de la portadora es de 300 volts (potencia de la portadora = 45 KW). En el receptor, la señal se demodula con un detector de envolvente después de haber pasado por un filtro de paso de banda ideal apropiado.

a) Encontrar la razón señal a ruido a la entrada del demodulador.

b) Encontrar la razón señal a ruido a la salida del demodulador.

8. Repetir el problema 7 con el espectro de densidad de potencia de ruido que se muestra en la figura P-7.5.

9. Una señal $f(t)$ tiene valor cuadrático medio de $\frac{4}{3}[\overline{f^2(t)} = \frac{4}{3}]$. El valor pico positivo de $f(t)$ es de 2 volts y el valor pico negativo es de −2 volts. Se sabe que la señal $f(t)$ es limitada en banda a 5 KHz. La señal se transmite en FM por un canal con ruido blanco. Encontrar el ancho de banda de transmisión si el mejoramiento de la razón señal a ruido que se necesita a la salida del demodulador es de 60. (*Sugerencia:* Emplear la ecuación 7.48, recordando que $\Delta\omega = k_f|f(t)|_{\text{máx.}} = 2k_f$.)

10. En un sistema de FM de banda ancha, la amplitud de la portadora es de 100 volts y la frecuencia es de 100 MHz. La señal modulante es de banda limitada a 5 KHz con valor cuadrático medio de 5000. La constante de modulación k_f es 500π y la desviación máxima de la frecuencia portadora es de $\Delta f = 75$ KHz. La densidad de potencia de ruido del canal es uniforme y de valor $\mathcal{S}_n(\omega) = 10^{-3}$.

a) Encontrar la función de transferencia del filtro de paso de banda ideal a la entrada del receptor.

b) Encontrar la razón de potencia de señal a ruido a la entrada del demodulador.

c) Encontrar la razón de potencia de señal a ruido a la salida del demodulador.

d) Encontrar y dibujar la densidad de potencia de ruido a la salida del demodulador.

e) Si la señal $f(t)$ se transmite en AM, encontrar la razón señal a ruido a la salida y compararla con la obtenida en FM.

11. Considérese el sistema de FM del problema 10. Se ha decidido emplear pre-énfasis y de-énfasis para reducir el ruido a la salida. En el circuito de pre-énfasis, las frecuencias de ruptura son 1.5 KHz y 30 KHz, respectivamente. Encontrar la razón señal a ruido a la salida del demodulador. Compararla con la que se obtuvo en el problema 10.

12. El mejoramiento de la razón señal a ruido para MPP está dado por la ecuación 7.66a. Dicho mejoramiento es proporcional a $k_1{}^2\overline{f^2(t)}\,B$. Es decir, la razón se puede mejorar si se incrementa B, $\overline{f^2(t)}$, o k_1. Al incrementar B, aumentamos el ancho de banda de transmisión, y al crecer $\overline{f^2(t)}$ disminuye la velocidad de transmisión. Por lo tanto, se debe sacrificar algo para mejorar la razón S/N. ¿Qué se sacrifica si el mejoramiento se obtiene mediante el incremento de k_1? ¿Se puede incrementar k_1 indefinidamente y mejorar la razón S/N? Se puede ver, a partir de la ecuación 7.66a, que la razón S/N también mejora al reducir α. ¿Qué se sacrifica al reducir α? ¿Se puede reducir α indefinidamente? Discutirlo. Examinar la situación en que el ancho de banda del canal se hace muy pequeño.

13. Mediante MPP se transmite una señal modulante $f(t)$. Se sabe que $|f(t)|_{\text{máx}} = 2$ volts, $\overline{f^2(t)} = \frac{4}{3}$. La señal $f(t)$ es de banda limitada a 5 KHz. Se muestrea con una rapidez de 10,000 muestras por segundo, transmitiéndose estas muestras mediante MPP. El ancho del canal es de 300 KHz y la anchura del pulso es $\tau = 20$ μs. ¿Cuál es el valor máximo permitido de k_1? Determinar, para este valor de k_1, el mejoramiento de la razón señal a ruido.

¿Qué ancho de banda se necesita para obtener este mejoramiento por medio de FM?

14. El mejoramiento de la razón de potencia de señal a ruido de la ecuación 7.72 se dedujo para pulsos binarios unipolares, es decir, los dos pulsos toman los valores 0 y $K\sigma_n$. Deducir esta razón para cuando se emplean pulsos bipolares de amplitud.

$$\frac{-K\sigma_n}{2} \quad \text{y} \quad \frac{K\sigma_n}{2}$$

15. Considérese de nuevo la señal $f(t)$ del problema 13 en donde $|f(t)|_{\text{máx}} = 2$ volts y $\overline{f^2(t)} = \frac{4}{3}$. El signo $f(t)$ es de banda limitada a 5 KHz y se muestrea con una rapidez de 10,000 muestras por segundo. Estas muestras se cuantifican y se codifican

en pulsos binarios. Los niveles de cuantificación están separados por 1/32 volts. El valor raíz cuadrático medio del ruido del canal es de 0.1 volt. (Se supone que las amplitudes de la señal $f(t)$ están uniformemente distribuidas en el rango -2 a 2.) Se supone que los pulsos son binarios y unipolares de amplitud 0 y $K\sigma_n$ en donde $K = 10$. Encontrar lo siguiente:

a) El ancho de banda de transmisión.

b) La razón señal a ruido a la entrada del demodulador.

c) La razón de señal a ruido (de cuantificación) en la salida del demodulador.

d) El mejoramiento de la razón *S/N*.

e) ¿Cuál es el ancho de banda que se necesita para obtener este mejoramiento de *S/N* mediante FM?

Repetir el problema para pulsos binarios bipolares de amplitud

$$\frac{-K\sigma_n}{2} \quad \text{y} \quad \frac{K\sigma_n}{2} \qquad (K = 10)$$

Compárese este sistema con el de MPP del problema 13.

16. Repetir el problema 15 con pulsos 4-arios, en lugar de binarios, para transmitir la señal; el nivel de cuantificación es de 1/64 volt. Calcular para pulsos 4-arios unipolares y bipolares. Supóngase $K = 10$ para detección sin error.

CAPITULO **8**

Introducción a la transmisión de información

8.1 MEDICION DE INFORMACION

La comunicación tiene por objeto enviar información. Estudiaremos en forma intuitiva y también desde el punto de vista de la ingeniería, la naturaleza del contenido informativo de un mensaje. Se verá que ambos puntos de vista conducen a la misma definición cuantitativa de la unidad de información.

1. Punto de vista intuitivo

En cualquier mensaje se envía información, pero algunos mensajes contienen más que otros. Investigando más minuciosamente, vemos que la probabilidad de ocurrir de un suceso se relaciona mucho con la cantidad de información. Si alguien nos habla de la ocurrencia de un evento sumamente probable, transmite poca información comparada con la que entregaría si el suceso fuese menos probable. El elemento de sorpresa o inseguridad en el ocurrir de un evento parece ser proporcional a la cantidad de información. Si alguien dice que el sol sale por el este, no transmite información alguna, pues todo el mundo lo sabe. No existe inseguridad en el suceso de que el sol sale por el este todos los días. En otras palabras, la probabilidad del evento es uno. Sin embargo, si un día de enero el servicio de radiodifusión nacional anuncia que la temperatura en Mineápolis alcanzó los 150°F, la declaración transmitiría una gran cantidad de información. Esto se debe a que el suceso es completamente inesperado y su probabilidad de ocurrir muy pequeña ($P \to 0$). Es decir, ese evento es muy inseguro y la información tiende a ser muy grande.

Consideremos un cable de un servicio de noticias como "Los Estados Unidos invaden Cuba." Sin duda, la frase contiene una gran cantidad de información porque el evento tiene probabilidad muy pequeña y, en consecuencia, la noticia es una sorpresa. Pero la sorpresa no es tan grande como

la de "Cuba invade a los Estados Unidos", porque la probabilidad del segundo reporte es extremadamente pequeña comparada con la del primero. Por supuesto, la sorpresa aparece como resultado de la inseguridad o lo inesperado del suceso. Cuanto menos esperado es un evento, tanto mayor es la sorpresa y, en consecuencia, mayor es la información. La probabilidad de un evento es la medida de lo esperado y por eso se relaciona con el contenido de información del evento.

Desde el punto de vista intuitivo, la cantidad de información que se recibe al conocer el ocurrir de determinado evento se relaciona con la probabilidad de ocurrir de dicho evento. ¿Cuál debe ser la naturaleza de esta relación? Es claro que si el evento es seguro (probabilidad 1) se envía cero cantidad de información. Por otra parte, si el evento es imposible (probabilidad cero), entonces su ocurrir transmite una cantidad infinita de información. Esto sugiere que la cantidad de información debe ser función logarítmica del recíproco de la probabilidad del evento.

$$\text{Información } I \sim \log \frac{1}{P} \tag{8.1}$$

en donde P es la probabilidad de ocurrir del evento e I es la cantidad de información que se recibe del conocimiento de la ocurrencia del evento.

2. Punto de vista técnico

Demostraremos ahora, desde el punto de vista de la ingeniería, que la información de un evento es idéntica a la que se obtuvo en forma intuitiva (ecuación 8.1) ¿Qué se entiende por tal enfoque? El ingeniero estudia mensajes portadores de información para la comunicación eficiente. Desde este punto de vista, la cantidad de información de un mensaje es proporcional al tiempo necesario para transmitir el mensaje. A continuación veremos que este concepto de información también conduce a la ecuación 8.1, lo cual implica que se requiere menos tiempo para transmitir un mensaje de seguridad alta (o probabilidad alta) con respecto al que se necesita para transmitir mensajes de probabilidad baja. Este hecho se puede verificar facilmente con el ejemplo de transmitir símbolos alfabéticos del idioma inglés mediante el código Morse.

El código Morse está compuesto por varias combinaciones de dos símbolos (como raya y espacio o pulsos de altura a y $-a$ volts). Cada letra se representa por cierta combinación de estos símbolos y tiene determinada longitud. Es evidente que a las letras *e, t, a* y *o,* las cuales aparecen más a menudo, se les asignan las palabras de código más cortas. Las palabras de código más largas quedan asignadas a las letras *x, k, q,* y *z,* que aparecen con menor frecuencia Cada una de las letras se puede considerar como mensaje. Es claro que las letras de probabilidad más alta necesitan menos tiempo para transmitirse (palabras de código cortas) que las de probabilidad pequeña. Ahora, demostraremos que el tiempo mínimo que se requiere para transmitir un símbolo (o un mensaje) de probabilidad P es proporcional a $\log (1/P)$.

Empezamos por suponer que necesitamos transmitir uno cualquiera de dos mensajes, *a* y *b,* que tienen la misma probabilidad.* Estos pueden ser, por ejemplo, reseñas del tiempo como "asoleado" o "lluvioso". Podemos transmitir cada uno de estos mensajes mediante una forma de onda apropiada. Si suponemos que empleamos pulsos binarios para su transmisión, se puede asignar la no existencia de pulso (pulso de cero volt) al mensaje *a* (asoleado) y un pulso (de 1 volt) al mensaje *b* (lluvioso).

Sin duda, se necesita un mínimo de 1 pulso binario para transmitir cualquiera de los dos mensajes equiprobables.* En consecuencia, la información de cualquiera de ellos se define como 1 bit.** Nótese que la longitud del mensaje no tiene nada que ver con su contenido de información. Siempre se necesitará un pulso binario para transmitir cualquiera de los dos mensajes equiprobables, al margen de su longitud o cualquier otra característica. También, es evidente que un pulso binario es capaz de transmitir un bit de información.

En seguida, considérese el caso de 4 mensajes equiprobables. Si estos mensajes se transmiten mediante pulsos binarios, necesitamos un grupo de dos pulsos binarios para transmitir cualquiera de ellos. Cada pulso binario puede representar dos estados, y por eso se forman cuatro patrones distintos con la combinación de dos pulsos, los cuales se pueden asignar a cada uno de los cuatro mensajes (figura 8.1). Por lo tanto, se necesitan dos pulsos binarios para transmitir cualquiera de los cuatro mensajes equiprobables. Cada uno de estos mensajes requiere el doble de tiempo de transmisión respecto del requerido para transmitir cualquiera de los dos mensajes equiprobables y, por lo tanto, contiene el doble de información, es decir, 2 bits.

De igual manera, se puede transmitir cualquiera de 8 mensajes equiprobables mediante un grupo de 3 pulsos binarios. Esto se debe a que 3 pulsos

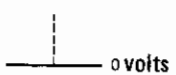
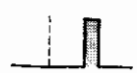
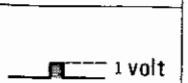
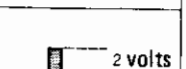
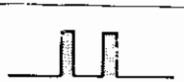
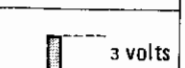
Símbolo	Dígito binario equivalente	Forma de onda del pulso binario	Dígito cuaternario equivalente	Forma de onda del pulso cuaternario
A	00		0	
B	01		1	
C	10		2	
D	11		3	

Figura 8.1

* N. del T. Llamaremos equiprobables a dos mensajes *a* y *b* que tienen la misma probabilidad.

** N. del T. "bit" proviene de las palabras inglesas *BI*nary Uni*T*.

binarios forman 8 patrones distintos que pueden representar cada uno de los 8 mensajes. En consecuencia, cada uno de los 8 mensajes contiene 3 bits de información. Se puede ver fácilmente que, en general, cualquiera de n mensajes equiprobables contiene $\log_2 n$ bits de información de acuerdo con los fundamentos de la ingeniería de información. Insistimos: la cantidad de información contenida en cualquiera de los n mensajes equiprobables es igual a $\log_2 n$ bits. Esto implica que, para transmitir tal mensaje, se necesita un mínimo de $\log_2 n$ pulsos binarios. Nótese que P, la probabilidad de ocurrir de cualquiera de estos eventos, es $1/n$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{Información } I &= \log_2 n \\ &= \log_2 \frac{1}{P} \end{aligned} \tag{8.2}$$

Este resultado se ha demostrado en un caso muy especial, el de mensajes equiprobables. También se puede demostrar que, aun si los mensajes no son equiprobables, se necesita un promedio de $\log_2 (1/P)$ pulsos binarios para transmitir un mensaje de probabilidad P. La prueba se hace en el Apéndice (al final de este capítulo).

A partir del estudio anterior, es claro que la medida de la información (en bits) de un mensaje es igual al número mínimo de pulsos binarios que se necesitan para codificar el mensaje.

Aparentemente, esta definición de información es restrictiva pues se aplica solamente a la información de naturaleza discreta como es la transmisión de algún número discreto y finito de símbolos o mensajes. Sin embargo, el principal resultado de la teoría de la información es que cualquier forma de información para transmitir siempre puede representarse en forma binaria sin perder generalidad. Ya hemos visto, en el capítulo anterior, que la información de una señal continua limitada en banda se puede representar por un número discreto de valores-muestra por segundo. Entonces, es posible representar estas muestras mediante un código de pulsos binarios.

En la siguiente sección, demostraremos que todo sistema (o canal) de comunicación es capaz de transmitir determinada cantidad de información por segundo. Esto se conoce como la capacidad C del canal. Así, determinado canal puede transmitir una cantidad de información no mayor de C bits por segundo. Se verá que la capacidad del canal está limitada por el ancho de banda y por la razón de potencia de señal a ruido del sistema.

En lugar de pulsos binarios se pueden emplear pulsos M-arios (pulsos que pueden tomar M valores distintos) para la codificación. A continuación demostraremos que cada pulso M-ario puede llevar una cantidad de información de $\log_2 M$ bits.

Para demostrar lo anterior, supóngase que necesitamos transmitir uno cualquiera de cuatro mensajes equiprobables, en lugar de dos. Claramente, no es posible transmitir esta información con un solo pulso binario que adquiere únicamente dos estados. Pero se puede transmitir cualquiera de los cuatro pulsos mediante un grupo de dos pulsos binarios. Cada pulso binario puede adquirir dos estados y, en consecuencia, se formarán cuatro patrones distintos (como se ilustra en la figura 8.1) con la combinación de dos pulsos. El estado cero de un pulso (ausencia de pulso) se representa por una

línea punteada. Por lo tanto, se necesitan dos pulsos binarios para transmitir cualquiera de los cuatro mensajes equiprobables. Así, la información que se transmite por mensaje es de 2 bits.

También se puede transmitir esta información con un pulso cuaternario que pueda tomar cuatro estados o niveles, por ejemplo 0, 1, 2 y 3 volts. Cada estado corresponde a uno de los cuatro posibles símbolos. Es evidente que cualquiera de los cuatro símbolos posibles se puede transmitir con un solo pulso cuaternario (figura 8.1). Se deduce que un pulso cuaternario puede transmitir la información de dos pulsos binarios y, en consecuencia, transmite 2 bits de información. Del mismo modo, si se desea transmitir uno cualquiera de ocho mensajes posibles, necesitamos un grupo de tres pulsos binarios. Como cada pulso binario tiene dos estados, la combinación de tres pulsos nos dará ocho patrones distintos. Cada uno de los ocho posibles mensajes también se puede transmitir con un solo pulso 8-ario (pulso que puede tomar 8 estados o valores). Por lo tanto, un pulso 8-ario transmite 3 bits de información. Es fácil ver que un pulso que pueda tomar M estados o niveles distintos transmite la información de $\log_2 M$ bits.

Se deduce, por lo tanto, que cuanto mayor sea el número de niveles distintos que pueda tomar un pulso, tanto mayor es la información transmitida por cada pulso. Un pulso capaz de tomar un número infinito de valores distintos transmite una cantidad infinita de información. Esto significa que se puede transmitir cualquier cantidad de información con un solo pulso que tome un número infinito de valores distintos. Aunque este resultado parece fantástico es perfectamente lógico y razonable. Si un pulso puede tomar un número infinito de niveles distintos, entonces es posible asignar uno de los niveles a cualquier mensaje o señal concebible, sin importar su longitud. Por ejemplo, se puede asignar uno de los niveles infinitos para representar todo el contenido de este libro. Ahora bien, si se desea transmitir dicho contenido, tan sólo será preciso transmitir un pulso del nivel correspondiente. Como existe un número infinito de niveles, es posible asignar un nivel a cualquier mensaje o señal de cualquier longitud concebible en este universo. Catalogar el código en este caso podrá resultar poco menos que imposible; sin embargo, esto ilustra la posibilidad de transmitir una cantidad infinita de información mediante un solo pulso.

A estas alturas, podemos preguntar por qué no usamos pulsos capaces de tomar un número infinito de niveles distintos. Se limita el sistema debido a consideraciones prácticas. Se debe recordar que, en nuestro estudio sobre transmitir información mediante pulsos, nos referimos al sistema compuesto que transmite la información en el transmisor y la recibe en el punto de destino. Por lo tanto, para transmitir determinada información, debemos poder así transmitir cómo recibir tales pulsos. Además, debemos reconocer los niveles distintos de los pulsos. Ahora bien, ¿que nos prohíbe transmitir pulsos que tomen un número infinito de valores? Es evidente que, como por consideraciones prácticas los pulsos deben tener amplitudes finitas, el número infinito de estados distintos implica que cada estado está separado del estado vecino por una cantidad infinitesimal. Ya que, en cualquier canal, siempre existe determinada cantidad de ruido, será imposible distinguir en el receptor los niveles que queden dentro de la amplitud de la señal de ruido.

Por lo tanto, la consideración del ruido indica que los niveles deben estar separados, como mínimo, por la amplitud de la señal de ruido.

8.2 CAPACIDAD DE CANAL

Enunciamos antes que el ancho de banda y la potencia de ruido restringen la cantidad de información que puede transmitirse por un canal. Se puede demostrar con rigor que en un canal afectado por ruido blanco gaussiano, se puede transmitir información con una velocidad no mayor de C bits por segundo, en donde C es la capacidad del canal, dada por

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \tag{8.3}$$

B es el ancho de banda del canal en Hz, S es la potencia de señal y N es la potencia de ruido. La expresión de la ecuación 8.3 de la capacidad de canal es válida para ruido blanco gaussiano. Con otros tipos de ruido, la expresión se modifica. Queda fuera de los objetivos de este libro la comprobación rigurosa de esta fórmula.* En su lugar presentaremos una prueba rudimentaria, basada en la suposición plausible de que si una señal se mezcla con ruido, se puede reconocer la amplitud de la señal solamente dentro del voltaje de ruido raíz cuadrático medio. En otras palabras, la inseguridad de reconocer la amplitud exacta de la señal es igual al voltaje de ruido raíz cuadrático medio.

Supongamos que la potencia promedio de señal y la potencia de ruido son respectivamente S watts y N watts. La conclusión evidente indica que el valor cuadrático medio de la señal recibida es $\sqrt{S+N}$ volts y el valor cuadrático medio del voltaje de ruido $\sqrt{N}$ volts. Queremos distinguir la señal recibida de amplitud $\sqrt{S+N}$ volts en presencia del ruido de amplitud $\sqrt{N}$ volts. Se deduce, de nuestra suposición, que una variación menor de $\sqrt{N}$ volts de la señal de entrada no será perceptible en el receptor. En consecuencia, el número de niveles distintos que se pueden distinguir sin error estará dado por

$$M = \frac{\sqrt{S+N}}{\sqrt{N}} = \sqrt{1 + \frac{S}{N}} \tag{8.4}$$

Por lo tanto, el máximo valor de M se determina por la ecuación 8.4. La máxima cantidad de información transmitida por cada pulso con $\sqrt{1+S/N}$ niveles distintos es

$$I = \log_2 \sqrt{1 + \frac{S}{N}} \tag{8.5}$$

$$= \tfrac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \quad \text{bits} \tag{8.6}$$

* Ver Bibliografía.

Estamos ahora en condiciones de determinar la capacidad de canal. La capacidad de canal es la máxima cantidad de información por segundo que se puede transmitir por un canal. Si el canal puede transmitir un máximo de K pulsos por segundo, entonces, sin duda, la capacidad C del canal está dada por

$$C = \frac{K}{2} \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \quad \text{bits por segundo} \tag{8.7}$$

Se demostró en el capítulo 5, con relación a los requisitos de ancho de banda de señales MAP, que un sistema con ancho de banda nf_m Hz puede transmitir $2nf_m$ pulsos independientes por segundo. Se demostró que bajo estas condiciones la señal que se recibe producirá los valores correctos de las amplitudes de los pulsos pero no reproducirá los detalles de las formas de pulso. Pero tan sólo nos interesa las amplitudes de pulso y no sus formas, y deducimos que un sistema con ancho de banda de B Hz puede transmitir un máximo de $2B$ pulsos por segundo. Como cada pulso puede llevar una información máxima de $1/2 \log_2 (1 + S/N)$ bits, se infiere que un sistema de ancho de banda B puede transmitir información a una velocidad máxima de

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \quad \text{bits por segundo} \tag{8.8}$$

Así, la capacidad del canal está limitada por el ancho de banda del canal (o del sistema) y por la señal de ruido. Para un canal sin ruido, $N = 0$ y la capacidad del canal es infinita. Sin embargo, en la práctica N siempre es finito y también lo es la capacidad del canal.*

La ecuación 8.8 se conoce como ley de Shannon-Hartley y se considera como el teorema central de la Teoría de la Información.** Por este teorema,

* Esto es válido aun si el ancho de banda B es infinito. La señal de ruido es ruido blanco con espectro de densidad de potencia uniforme en todo el rango de frecuencias. En consecuencia, a medida que el ancho de banda B se incrementa, N crece también y la capacidad de canal permanece finita aun cuando $B = \infty$. Si $\mathcal{N}/2$ es la densidad de potencia, entonces $N = \mathcal{N}B$ y

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{\mathcal{N}B}\right)$$

y

$$\lim_{B \to \infty} C = \frac{S}{\mathcal{N}} \frac{\mathcal{N}B}{S} \log_2 \left(1 + \frac{S}{\mathcal{N}B}\right)$$

El último límite se puede encontrar si se observa que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log_2 (1 + x) = \log_2 e = 1.44$$

por lo tanto

$$\lim_{B \to \infty} C = \frac{S}{\mathcal{N}} \log_2 e = 1.44 \frac{S}{\mathcal{N}}$$

** La teoría de la información es un conjunto de resultados que se basan en una definición cuantitativa particular de una cantidad de información y es una subdivisión de un campo más amplio, la teoría estadística de la comunicación, que incluye todo el análisis probabilístico de los problemas de comunicaciones. Véase por ejemplo, P. Elias, *"Information Theory"*, en Grabbe, Ramo, y Wooldridge, *Handbook of Automation, Computation and Control*, Vol. 1, ch. 16, John Wiley and Sons, New York, 1961.

vemos que el ancho de banda y la potencia de señal pueden intercambiarse. Para transmitir la información a una velocidad determinada, podemos reducir la potencia de señal transmitida, siempre que el ancho de banda se incremente en forma correspondiente. De igual manera, se puede reducir el ancho de banda a condición de incrementar la potencia de la señal. Como ya dijimos, el fin del proceso de la modulación consiste realmente en efectuar esta combinación entre el ancho de banda y la razón señal a ruido. A la luz de este teorema, se puede entender adecuadamente el mejoramiento de la razón señal a ruido en FM de banda ancha y en MPC.

Sin embargo, se debe recordar que la capacidad de canal representa la máxima cantidad de información por segundo que se puede transmitir por el canal. Para alcanzar esta velocidad de transmisión, la información debe procesarse o codificarse de la manera más eficiente. La viabilidad de tal codificación constituye uno de los resultados importantes de la teoría de la información atribuida a Shannon. En la realidad, sin embargo, no todos los sistemas de comunicación que se emplean (sistemas no codificados como AM, FM, etc.) alcanzan esta velocidad máxima.

8.3 TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Expondremos las implicaciones de la ley Shannon-Hartley considerando la combinación del ancho de banda y la razón señal a ruido de una señal continua de banda limitada a f_m Hz. Sabemos por el teorema de muestreo que la información de tal señal queda completamente especificada por $2f_m$ muestras por segundo. Así, para transmitir la información de tal señal tan sólo es preciso transmitir esas muestras discretas.

La siguiente pregunta importante es: ¿Cuánta información contiene cada muestra? Esto depende de los niveles o valores discretos que puede tomar cada muestra. En realidad, estas muestras pueden tomar cualquier valor y, en consecuencia, para transmitirlas necesitamos pulsos capaces de tomar un número infinito de niveles. Sin duda, la información transmitida por cada muestra es de infinitos bits. Por lo tanto, la información de una señal continua y limitada en banda es infinita. En presencia de ruido (valor finito de N), la capacidad del canal es finita. En consecuencia, es imposible transmitir toda la información de una señal limitada en banda por un canal físico con ruido (que existe en la misma banda). En ausencia de ruido, $N = 0$, la capacidad del canal es infinita y se puede transmitir cualquier señal. Desde luego, es imposible transmitir toda la información de una señal continua a menos que la potencia de señal transmitida sea infinita. Debido al ruido, siempre existe una cierta inseguridad en la señal que se recibe. La transmisión de toda la información de una señal significaría cero de inseguridad. Realmente, la inseguridad se hace tan pequeña como se quiera al incrementar la capacidad del canal (incrementar el ancho de banda y/o incrementar la potencia de señal), pero nunca puede hacerse cero.

Es importante notar que la inseguridad se introduce en el proceso de transmisión. Por lo tanto, aunque sea posible transmitir toda la información de una señal continua en el extremo transmisor, es imposible recuperar esta cantidad infinita de información en el receptor. La cantidad de información

que se puede recuperar por segundo en el receptor es de no más de C bits por segundo en donde C es la capacidad de canal. Esto es precisamente lo que sucede cuando se transmite en forma directa una señal continua, como por ejemplo AM y FM. En estos casos se envía la información completa de una señal en el transmisor. Pero como el canal tiene una capacidad finita de C bits por segundo no se puede recuperar más que C bits de información en el receptor.

De otra manera, en lugar de transmitir toda la información en el transmisor, se puede aproximar la señal para que su contenido de información se reduzca a C bits por segundo y transmitir esta señal aproximada que tiene un contenido finito de información. Será posible, con esto, recuperar toda la información que se ha transmitido. Esto es exactamente lo que se hace en modulación por pulsos codificados. ¿Cómo podemos aproximar una señal de suerte que la señal aproximada tenga un contenido finito de información por segundo? Esto se puede llevar a cabo con el proceso de cuantificación que se estudió en el capítulo 7. Considérese la señal continua limitada en banda a f_m Hz, como se ilustra en la figura 8.2. Para transmitir la información de esta señal, es necesario transmitir $2f_m$ muestras por segundo. Las

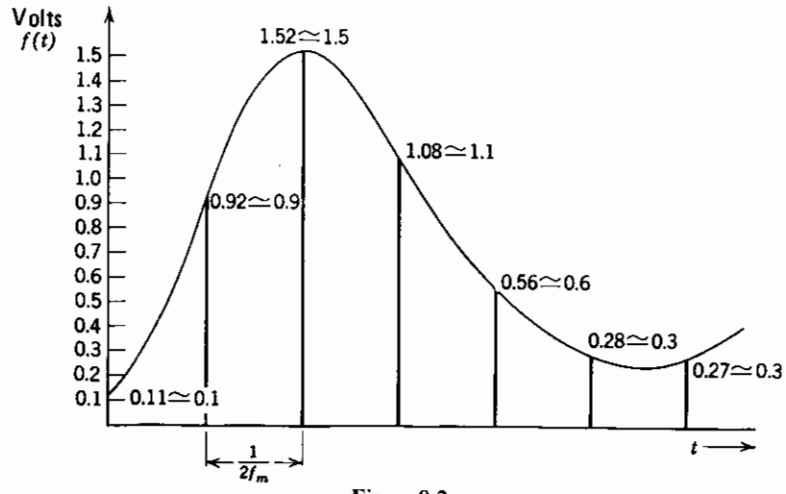


Figura 8.2

muestras también se ilustran en la figura. Como ya se dijo antes, las muestras pueden tomar cualquier valor y para transmitirlas directamente se necesitan pulsos que puedan adquirir un número infinito de niveles. (Hemos visto que aunque sea posible transmitir tales pulsos en el extremo transmisor, debido al ruido no es posible recuperar las alturas exactas de estos pulsos en el receptor.) Por lo tanto, en lugar de transmitir los valores exactos de dichos pulsos, aproximamos las amplitudes al valor más cercano del número finito de valores permitidos. En este ejemplo, todos los pulsos están aproximados al décimo de volt más cercano. Es evidente, de la figura, que cada uno de los pulsos transmitidos toma cualquiera de los 16 niveles y, en consecuencia, transmite una cantidad de información de $\log_2$

$16 = 4$ bits. Como existen $2f_m$ muestras por segundo, el contenido total de información de la señal aproximada es de $8f_m$ bits por segundo. Si la capacidad del canal es mayor o igual a $8f_m$ bits por segundo toda la información que ha sido transmitida se recuperará íntegramente, sin incertidumbre. Esto significa que la señal que se recibe será réplica exacta de la señal aproximada que se transmitió.

El problema consiste en que el ruido que se introduce en el proceso de transmisión podría causar un grado adicional de inseguridad, capaz de incrementar la inseguridad total a más de 0.1 volts en la amplitud de la señal recibida. Se puede demostrar fácilmente que, si la capacidad del canal es $8f_m$ bits por segundo, el proceso de transmisión no introduce grado adicional alguno de inseguridad. Supongamos que se emplea un canal con ancho de banda de f_m Hz para transmitir esas muestras; entonces, como la capacidad de canal que se requiere es de $8f_m$ bits por segundo, la razón de potencia de señal a ruido necesaria estará dada por

$$8f_m = f_m \log_2 \left(\frac{S+N}{N}\right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{S+N}{N} = 256$$

Se vio antes que el número de niveles que se pueden distinguir en el receptor es de $\sqrt{(S+N)/N}$. Se deduce que, en este caso, el receptor puede distinguir los 16 estados sin error. En consecuencia, aunque el proceso de transmisión introduce algo de ruido en la señal deseable, los niveles están suficientemente separados para distinguirse en el receptor. Esta es otra forma de decir que un canal con la capacidad de $8f_m$ bits por segundo puede transmitir, sin error, $8f_m$ bits por segundo.

8.4 INTERCAMBIO ENTRE EL ANCHO DE BANDA Y LA RAZON SEÑAL A RUIDO

Por un canal de capacidad finita se puede transmitir determinada señal con cierta cantidad de inseguridad. Hemos visto que se puede obtener una capacidad mediante cualquier número de combinaciones del ancho de banda y la potencia de señal. De hecho, es posible cambiar una en función de la otra. En seguida, demostraremos que el cambio se puede realizar.

Considérese la transmisión de la señal $f(t)$ de la figura 8.2. Se ha visto que si se tolera una inseguridad de 0.1 volt, el contenido de información de la señal está dado por $8f_m$ bits por segundo. Ahora, se demostrará que esta información se puede transmitir con diferentes combinaciones de ancho de banda y potencia de señal.

Una forma posible de transmisión es enviar directamente $2f_m$ muestras por segundo. Cada muestra puede tomar cualquiera de los 16 estados (pulso 16-ario). En este caso debemos tener una razón señal a ruido que nos permita distinguir 16 estados. Es evidente que $\sqrt{S+N}/\sqrt{N} = 16$. Además,

para transmitir $2f_m$ pulsos por segundo, necesitamos un canal con ancho de banda de f_m Hz. En consecuencia, la capacidad C de canal requerida está dada por (ecuación 8.8)

$$\begin{aligned} C &= f_m \log_2 \frac{S+N}{N} \\ &= f_m \log_2 (16)^2 \\ &= 8f_m \qquad \text{bits por segundo} \end{aligned}$$

Así, la capacidad de canal es exactamente igual a la cantidad de información por segundo de la señal $f(t)$.

De otra forma, podemos transmitir las muestras de la figura 8.2 mediante pulsos cuaternarios (pulsos que pueden adquirir cuatro estados). Es claro que necesitamos un grupo de dos pulsos cuaternarios para transmitir cada muestra que puede tomar 16 estados. Ahora bien, la razón señal a ruido que se requiere en el receptor para distinguir pulsos que toman cuatro estados diferentes es $\sqrt{S+N}/\sqrt{N} = 4$. Es evidente que en este modo de transmisión se reduce la potencia de señal requerida. Sin embargo, tenemos que transmitir ahora el doble de pulsos por segundo, es decir, $4f_m$ pulsos por segundo. Por lo tanto el ancho de banda necesario es $2f_m$ Hz. La capacidad del canal en este caso es

$$\begin{aligned} C &= 2f_m \log_2 \frac{S+N}{N} \\ &= 2f_m \log_2 (4)^2 \\ &= 8f_m \qquad \text{bits por segundo} \end{aligned}$$

A partir de este ejemplo, es evidente que se puede transmitir una cantidad dada de información mediante diferentes combinaciones de potencia de señal y ancho de banda y que una puede cambiar en función de la otra. La señal $f(t)$ también se puede transmitir por pulsos binarios ($8f_m$ pulsos por segundo), lo cual requiere de $\sqrt{S+N}/\sqrt{N} = 2$ y un ancho de banda de canal de $4f_m$ Hz. Es interesante notar que también se puede transmitir $f(t)$ por un canal con ancho de banda menor que f_m Hz si se transmite suficiente potencia de señal (ver problema 3 al final de este capítulo).

Se debe observar que el proceso de intercambio entre el ancho de banda y la potencia de señal no es automático. Debemos modificar o transformar la información de la señal (codificación) para que ocupe el ancho de banda deseado. En la práctica, esto se realiza mediante diferentes tipos de modulación. Sin embargo, se debe reconocer que no todos los sistemas de comunicación materializan todas sus posibilidades inherentes de ancho de banda y potencia de señal empleados. Algunas formas de modulación son superiores a otras en la utilización de la capacidad de canal. Hemos demostrado en el capítulo 7 que los sistemas codificados son superiores a los no codificados (como FM, MPP) al efectuar el intercambio entre el ancho de banda y la razón S/N.

Se puede deducir, de la ley de Shannon-Hartley, la ley ideal para combinar el ancho de banda con la relación S/N. Considérese un mensaje con ancho de banda de f_m Hz. Supongamos que el contenido de información de esta señal es de I bits por segundo. Supóngase, además, que dicha señal se codifica (o modula) de manera que el ancho de banda resultante es B Hz. La modulación de la señal no modifica en absoluto el contenido de información de la señal. La señal modulada se aplica, a continuación, a la entrada del demodulador (figura 8.3). Sean S_i y N_i la potencia de la señal y del ruido, respectivamente, a la entrada del demodulador. Es evidente que

$$I = B \log_2 \left(1 + \frac{S_i}{N_i}\right) \tag{8.9}$$

La salida del demodulador produce la señal original $f(t)$, con ancho de banda de f_m, más ruido. Sean S_o y N_o la potencia de señal y de ruido, respectivamente. En un demodulador ideal, la información I de la señal de salida debe ser idéntica a la de la señal de entrada. En consecuencia

$$I = f_m \log_2 \left(1 + \frac{S_o}{N_o}\right) \tag{8.10}$$

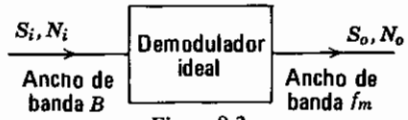


Figura 8.3

Por las ecuaciones 8.9 y 8.10 obtenemos

$$B \log_2 \left(1 + \frac{S_i}{N_i}\right) = f_m \log_2 \left(1 + \frac{S_o}{N_o}\right)$$

Por lo tanto,

$$\left(1 + \frac{S_o}{N_o}\right) = \left(1 + \frac{S_i}{N_i}\right)^{B/f_m} \tag{8.11}$$

En la práctica, S_o/N_o y $S_i/N_i \gg 1$ obteniéndose

$$\frac{S_o}{N_o} \simeq \left(\frac{S_i}{N_i}\right)^{B/f_m} \tag{8.12}$$

Si consideramos razones de voltaje de señal a ruido en lugar de razones de potencia, obtenemos

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{vr} \simeq \left(\frac{S_i}{N_i}\right)^{B/2f_m}_{vr} \tag{8.13}$$

Así, en un sistema ideal, la razón de potencia de señal a ruido a la salida (S_o/N_o) se incrementa en forma exponencial con el ancho de banda B. El mismo resultado se obtiene con razones de voltaje de señal a ruido. Sin duda, su comportamiento es bastante superior al de los sistemas no codificados de banda ancha, como FM y MPP, que se discutieron en el capítulo 7. En aquellos sistemas, se demostró que la razón de potencia de señal a ruido se incrementa con el cuadrado del ancho de banda B. En cambio, en el caso de los sistemas codificados (MPC), se observó que el mejoramiento de la razón señal a ruido es exponencial con el ancho de banda (ecuación 7.79).

Ejemplo 8.1

En este ejemplo, con los conceptos de la teoría de la información, calcularemos el ancho de banda de la señal de video (imagen) para TV.

Se puede considerar una señal de televisión compuesta de aproximadamente 300,000 elementos pequeños de imagen. Cada uno de estos elementos puede tomar 10 niveles perceptibles de brillo (como negro y sombras de gris) para producir el contraste adecuado. Suponemos que, para cualquier elemento de imagen, los 10 niveles de brillo tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Se transmiten 30 cuadros de imagen por segundo. Se establece también que para reproducción satisfactoria de la imagen se necesita una razón de señal a ruido de 1000 (30 db).

Con esta información, calcularemos el ancho de banda que se requiere para transmitir la señal de video de TV. Primero, calcularemos la información por elemento de imagen. Como cada elemento de imagen puede tomar 10 niveles con la misma probabilidad,

$$\text{Información por elemento de imagen} = \log_2 10 = 3.32 \text{ bits/elemento}$$

$$\text{Información por cuadro de imagen} = 300{,}000 \times 3.32$$
$$= 996{,}000 \text{ bits/cuadro de imagen}$$

Ya que existen 30 cuadros de imagen por segundo, obtenemos

$$\text{Información por segundo} = 996{,}000 \times 30 = 29.9 \times 10^6 \text{ bits/segundo}$$

Así, la señal de video tiene una información de 29.9×10^6 bits por segundo. Para transmitir esta información, la capacidad C del canal debe ser igual a 29.9×10^6 bits por segundo

$$C = 29.9 \times 10^6 \text{ bits/segundo}$$

Pero, para cualquier canal con ancho de banda, B (en Hz) está dada por

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

Sin embargo, tenemos $S/N = 1000$. Por lo tanto,

$$C = 29.9 \times 10^6 \simeq B \log_2 1000$$
$$= 9.95\, B$$

En consecuencia,

$$B = 3.02 \times 10^6$$
$$\simeq 3 \text{ MHz}$$

8.5 EFICIENCIA DE LOS SISTEMAS MPC

Aunque el incremento de la razón señal a ruido en la salida para MPC es exponencial con el ancho de banda, como se requiere en un sistema ideal, el comportamiento del sistema MPC aún es inferior al predicho por la ley de Shannon-Hartley. Consideremos un sistema MPC s-ario. La señal mensaje $f(t)$ tiene un ancho de banda de f_m Hz. Existen $2f_m$ muestras por segundo. Supondremos que hay M niveles de cuantificación. Así, una muestra de la señal $f(t)$ se aproxima a cualquiera de los M niveles. Si suponemos que todos los niveles son equiprobables, la informacion por muestra es $\log_2 M$ bits. O sea que el contenido total de información de la señal es $2f_m \log_2 M$ bits por segundo. Para transmitir esta señal en forma ideal, necesitamos una capacidad de canal

$$C = 2f_m \log_2 M \text{ bits/segundo} \tag{8.14}$$

Empleando pulsos s-arios (pulsos que pueden tomar s estados), se necesita un grupo de $\log_s M$ pulsos s-arios para representar una muestra que pueda tomar uno de los M valores. En consecuencia, necesitamos transmitir un total de $2f_m \log_s M$ pulsos s-arios por segundo. El ancho de banda necesario para transmitir estos pulsos está dado por

$$B = f_m \log_s M \qquad \text{Hz} \tag{8.15}$$

De la ecuación 8.14, se deduce que

$$\begin{aligned} C &= (f_m \log_s M)(2 \log_2 s) \\ &= B \log_2 s^2 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Pero, para MPC s-ario, la razón de potencia de señal a ruido de entrada está dada por (ecuación 7.81)

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{K^2(s^2 - 1)}{12}$$

Por lo tanto,

$$s^2 = 1 + \frac{12}{K^2}\frac{S_i}{N_i}$$

y

$$C = B \log \left(1 + \frac{12}{K^2}\frac{S_i}{N_i}\right) \tag{8.17}$$

La ecuación 8.17 establece la capacidad teórica de canal necesaria para transmitir el mensaje cuantificado $f(t)$. Sin embargo, en la realidad se transmite este mensaje por un canal de ancho de banda B (ecuación 8.15) y con las potencias de señal y de ruido S_i y N_i, respectivamente. En consecuencia C', la capacidad del canal real empleado, está dada por (ecuación 8.8)

$$C' = B \log \left(1 + \frac{S_i}{N_i}\right) \text{ bits/segundo} \tag{8.18}$$

Así, C (ecuación 8.17) es la capacidad de canal óptima o teórica necesaria para transmitir el mensaje cuantificado $f(t)$ y C' (ecuación 8.18) es la capacidad real del canal necesaria para transmitir $f(t)$ cuantificada mediante MPC. Obviamente, la S_i/N_i de MPC es $K^2/12$ veces la requerida por el sistema ideal. En el capítulo 9 se demuestra que $K = 10$ es un valor razonable para una probabilidad de error aceptable (10^{-6}). En consecuencia, los requisitos de potencia para MPC son, a *grosso modo*, 100/12 (9.2 db) veces los necesarios para el sistema ideal.

Con probabilidad de error de 10^{-5}, la discrepancia es de aproximadamente 8 db. El comportamiento de un sistema ideal y de un sistema MPC, para diferentes valores de s se ilustran en la figura 8.4. El error promedio en detección es 1 en 10^5. La curva real está a la derecha de la curva ideal en 8 db.

En la figura 8.4, se observa el efecto de saturación con respecto a la velocidad máxima de transmisión para una s dada. Así, para $s = 2$ (MPC

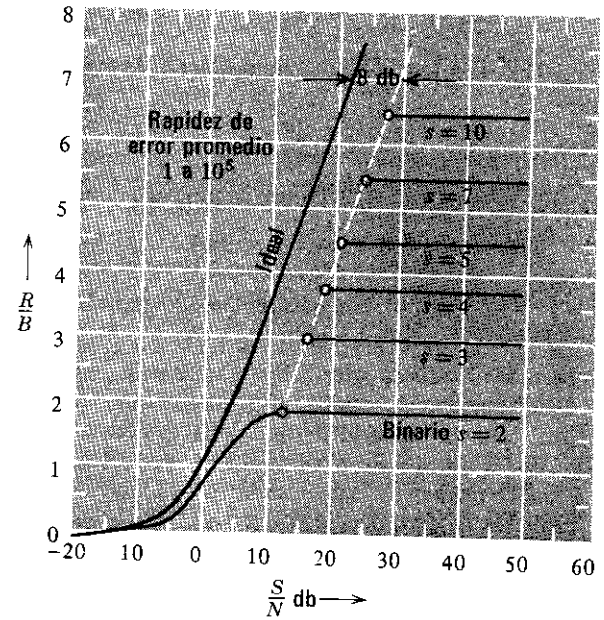


Figura 8.4

binario) la velocidad de transmisión por ancho de banda unitario no se puede incrementar a más de 2 bits. No es difícil entender la razón. Un pulso binario puede transmitir un máximo de 1 bit de información. Si un sistema tiene un ancho de banda de B Hz, entonces podemos transmitir $2B$ pulsos por segundo. Así R, la velocidad de transmisión, está dada por

$$R = 2B \text{ bits/segundo}$$

y

$$\frac{R}{B} = 2 \text{ bits/segundo/ancho de banda} \tag{8.19}$$

Cuando la razón señal a ruido es pequeña, no se pueden distinguir adecuadamente los pulsos en el receptor y, en consecuencia, existe una alta probabilidad de error. Esto provoca que la cantidad R/B disminuya a menos de 2 para una razón señal a ruido pequeña. A medida que mejora la razón señal a ruido, la probabilidad de error disminuye y R/B se acerca a su valor ideal de 2. Cuando el nivel de la razón señal a ruido llega al valor en que los pulsos se pueden distinguir claramente en el ruido, cualquier incremento adicional de la potencia de señal (o de la razón señal a ruido) ejerce influencia despreciable en el comportamiento del sistema. A esto se debe el efecto de saturación. El nivel de saturación se puede incrementar al aumentar s como se muestra en la figura 8.4. En general, la información máxima transmitida por un pulso s-ario es $\log_2 s$ bits por segundo. Un sistema con ancho de banda B puede transmitir $2B$ pulsos por segundo. Por lo tanto R, velocidad máxima de transmisión de información está dada por

$$R = 2B \log_2 s \text{ bits/segundo}$$

y

$$\frac{R}{B} = 2 \log_2 s \text{ bits/segundo/ancho de banda} \tag{8.20}$$

Así, para $s = 3$

$$\left(\frac{R}{B}\right)_{\text{máx}} = 2 \log_2 3 = 3.16 \text{ bits/segundo/ancho de banda}$$

Para $s = 4$

$$\left(\frac{R}{B}\right)_{\text{máx}} = 2 \log_2 4 = 4 \text{ bits/segundo/ancho de banda}$$

En consecuencia, los niveles de saturación para $s = 3$ y 4 están dados por 3.16 y 4 bits/segundo/ancho de banda, respectivamente.

Notamos aquí, que la capacidad de canal predicha por la Ley de Shannon-Hartley no se puede alcanzar mediante una codificación finita. Se puede llevar a cabo mediante codificación de bloque, en donde una secuencia de N símbolos se considera como un símbolo y en el límite $N \to \infty$. La complejidad de tal codificación es tan grande que, en la práctica, se aceptan con gusto situaciones inferiores a lo idóneo.

APENDICE. CONTENIDO DE INFORMACION DE MENSAJES NO EQUIPROBABLES

Considérese una fuente que genera los mensajes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ con probabilidad $P_1, P_2, \ldots, P_n$. La fuente genera una serie de N mensajes. Si N crece mucho, entonces, de acuerdo con la ley de los números grandes, dicha serie contendrá un número NP_1 de veces el mensaje a_1, un número NP_2 de veces el mensaje a_2, etc. Como el ocurrir de cada mensaje es independiente, la probabilidad $P(S)$ de ocurrencia de cualquier serie S de N mensajes es

$$P(S) = (P_1)^{NP_1}(P_2)^{NP_2} \cdots (P_n)^{NP_n} \tag{A8.1}$$

Nótese que como N es muy grande, cada una de las series posibles tiene el mismo número de mensajes $a_1(NP_1)$, $a_2(NP_2)$, etc. Por lo tanto, todas estas series son equiprobables con probabilidad $P(S)$ dada en la ecuación A8.1. Una de tales series tiene la información $I(S)$

$$I(S) = \log_2 \frac{1}{P(S)}$$

$$= N \sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 \frac{1}{P_i} \tag{A8.2}$$

Como la serie S se compone de N mensajes, la información promedio por mensaje es $I(s)/N$:

$$\frac{I(s)}{N} = \sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 \frac{1}{P_i} \text{ bits} \tag{A8.3}$$

Esta es la información promedio por mensaje. Como los mensajes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ocurren con probabilidad $P_1, P_2, \ldots, P_n$, es evidente que el mensaje a_k con probabilidad P_k envía una información de $\log 1/P_k$ bits, que es el resultado deseado.

PROBLEMAS

1. La forma de onda de voltaje $Sa(2000\pi t)$ se va a transmitir con una inseguridad que no excede de 1/80 volt. Determinar la capacidad de canal que se requiere (véase la figura 1.12).

2. Repetir el problema 1 para la forma de onda $Sa(2000\pi t)^2$ si la inseguridad no es mayor de 1/64 volt (véase la figura 1.12).

3. Trazar un esquema para transmitir la señal continua $f(t)$ de la figura 8.2 con una inseguridad que no exceda de 0.1 volt por un canal con ancho de banda de $(f_m/2)$ Hz. Supóngase que la señal $f(t)$ es de banda limitada a f_m Hz.

4. Repetir el problema 3 si la inseguridad no excede de 0.025 volts.

5. En el ejemplo 8.1 del texto, se encontró que la cantidad de información por cuadro de la imagen de televisión es aproximadamente de $9.96 \times 10^5 \simeq 10^6$ bits. Un anunciador de radio trata de describir oralmente una imagen de televisión mediante 1000 palabras tomadas de su vocabulario de 10,000. Supóngase que cada una de las 10,000 palabras tiene la misma probabilidad de aparecer en la descripción de esa imagen (una aproximación burda, pero suficientemente buena para dar la idea). Determinar la cantidad de información radiada por el anunciador al describir la imagen. ¿Se pensaría que el anunciador describe fielmente la imagen empleando 1000 palabras? ¿El antiguo adagio "más vale una imagen que 1000 palabras" está exagerando o subestimando la realidad?

6. En la transmisión de imágenes por facsímil, hay aproximadamente 2.25×10^6 elementos de imagen por cuadro. Se necesitan 12 niveles de brillo para una buena reproducción. Supóngase que todos estos niveles tienen la misma probabilidad de ocurrir. Calcular el ancho de banda del canal que se necesita para transmitir la imagen cada 3 minutos. Supóngase que la razón de potencia de señal a ruido en el canal es de 30 db (1000).

7. Considérese la transmisión por cable de las condiciones del tiempo. Existen cuatro posibles mensajes; asoleado, nublado, lluvioso y con neblina. Si cada uno de los mensajes tiene la misma probabilidad ¿Cuál es el número mínimo de pulsos binarios que se requiere por mensaje transmitido? Dar un patrón de código típico para los cuatro mensajes empleando pulsos binarios.

Supóngase, ahora, que las probabilidades de los cuatro mensajes son 1/4, 1/8, 1/8 y 1/2, respectivamente. En este caso, la información por mensaje en promedio es menor de 2 bits. Esto se deduce de la ecuación A8.3.

$$\text{Información promedio por mensaje} = \sum_{i=1}^{4} P_i \log \frac{1}{P_i}$$

En este caso, P_1, P_2, P_3 y P_4 son 1/4, 1/8, 1/8 y 1/2. Por lo tanto, es posible emplear el código que necesitará en promedio menos de 2 bits. Verificar que el empleo del siguiente código en realidad sólo requiere de 1.75 bits/mensaje.

Asoleado	10
Nublado	110
Lluvioso	111
Con neblina	0

Nótese que este código es decodificable en forma única, es decir, cualquier secuencia que se forme empleando este código es decodificable en forma única. El lector puede verificar que no existe algún otro código decodificable en forma única que sea mejor que éste. Esto se debe a que la información promedio por mensaje en este caso (véase la figura A-8.3) es 1.75 bits.

8. Existen 81 monedas en una bolsa. 80 de ellas son idénticas. La moneda restante es ligeramente más pesada que las demás. ¿Qué cantidad de información se necesitará para localizar esta moneda? (*Sugerencia:* Considérese el número mínimo de mediciones necesario para localizar la moneda más pesada.)

9. Si, en el problema 8, se sabe que una de las monedas difiere en peso (pero no se sabe si es más o menos pesada que las demás), ¿qué cantidad de información se necesita para localizar esta moneda y determinar si es más o menos pesada que las demás?

CAPITULO **9**

Elementos de comunicación digital

Hasta aquí, hemos estudiado la comunicación de señales continuas. Existe un número infinito de formas de onda que se pueden formar con señales continuas. En contraste, se plantea un caso en donde nos interesa transmitir una de un número finito de formas de onda o mensajes. La transmisión de un texto en inglés empleando un código como el de Morse, es un ejemplo simple de esto. En este caso, existe un total de 27 símbolos o mensajes (26 letras y un espacio). Estos símbolos se transmiten por diferentes combinaciones de marca y espacio. En consecuencia, el problema de transmitirlo se reduce al problema de transmitir una serie de formas de onda, seleccionadas cada una de un grupo específico y finito. Este tipo de comunicación se conoce como *comunicación digital.* Esto contrasta con el caso de transmitir información analógica, por ejemplo, la transmisión de radio o televisión en donde el conjunto resultante tiene un número infinito de formas de onda posibles.

Ya es evidente la diferencia fundamental entre los sistemas de comunicación de datos digitales y de datos continuos (o datos analógicos). En la comunicación digital, interviene la transmisión y detección de una forma de un grupo finito de formas conocidas, mientras que en la comunicación continua, existe un número infinito de mensajes y las formas de onda correspondientes no se conocen. Se debe notar que el sistema MPC estudiado es un sistema de comunicación de datos digitales que se emplea para transmitir datos continuos. Esta transmisión se vuelve posible gracias al proceso de cuantificación. En efecto, en este proceso se aproximan las señales continuas para que puedan tomar tan sólo ciertas amplitudes discretas. Esencialmente, esto es la digitalización de la señal continua. Los mensajes se pueden transmitir mediante un número finito de símbolos (o niveles).

En los sistemas digitales, el problema de detección es un poco más sencillo que en los sistemas continuos. Durante la transmisión, las formas de onda sufren los efectos del ruido del canal. Cuando la señal llega al receptor, es necesario decidir cuál de las n formas de onda conocidas posibles se ha transmitido. Una vez adoptada tal decisión, se recupera exactamente la

forma de onda transmitida, sin ningun ruido. Por lo tanto, en este sentido, el ruido del canal no ejerce influencia alguna; sin embargo, provocará algún error en nuestra decisión. Por ejemplo, podemos quedar desorientados por el ruido y realizar una decisión incorrecta. De modo que debemos aceptar el hecho de que algunas decisiones serán equivocadas y que el error crecerá con el incremento del ruido. Sin duda, la ocasión de cometer un error (probabilidad de error) constituye un criterio muy significativo para detectar señales en sistemas digitales. En este capítulo, estudiaremos el problema de la detección óptima. Nos restringiremos a la comunicación binaria, es decir, la comunicación que emplea dos símbolos únicamente. Este es uno de los tipos que con más frecuencia se observa.

9.1 DETECCION DE SEÑALES BINARIAS: EL FILTRO OPTIMO*

En el caso de la comunicación binaria, los mensajes se transmiten mediante dos símbolos solamente (como el MPC binario). Uno de los símbolos se representa por un pulso $s(t)$, que se muestra en la figura 9.1a y el otro por la ausencia de pulso (no hay señal). Sea T segundos la duración del pulso $s(t)$. La duración del espacio [ausencia de $s(t)$] también es T segundos. Se debe insistir de nuevo en que aquí no importa detectar la forma de onda, pues ya se conoce. Se desea determinar si el pulso está presente o no. Por lo tanto, el detector en el receptor debe ser un dispositivo capaz de decidir. Debe examinar el contenido de la señal de entrada cada T segundos y después decidir si el pulso está presente o no. El detector óptimo será aquel con la menor probabilidad de error al hacer una decisión.

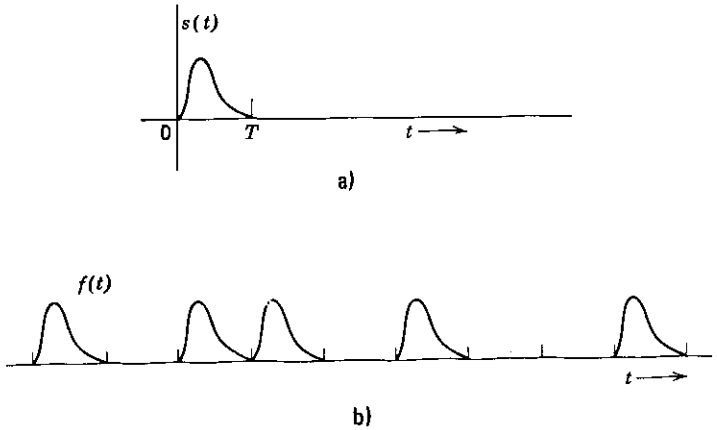


Figura 9.1

La decisión se puede facilitar si pasamos la señal por un filtro que acentúe la señal útil $s(t)$ y suprima al mismo tiempo el ruido $n(t)$. Por lo

* N. del T. Versión del término en inglés "matched filter".

tanto, buscaremos un filtro que reciba la componente de señal en algún instante y suprima al mismo tiempo la amplitud del ruido. Esto producirá un contraste marcado entre la señal y el ruido y si el pulso $s(t)$ está presente, la salida tendrá un gran pico en este instante. Si el pulso no está presente no existirá tal pico. Este arreglo permitirá decidir, con una probabilidad de error reducida, si el pulso está presente o ausente. El filtro que realiza esto se conoce como *filtro óptimo*. El objetivo de dicho filtro es incrementar la componente de señal y reducir la componente de ruido al mismo tiempo. Es claro que esto equivale a optimizar en la salida la razón de la amplitud de la señal a la amplitud del ruido en algún instante. Resulta más conveniente emplear el cuadrado de las amplitudes; así que, diseñaremos un filtro que optimice la razón del cuadrado de la amplitud de la señal al cuadrado de la amplitud del ruido.

Sea $s(t)+n(t)$ la señal de entrada, en donde $s(t)$ es la señal pulso útil, $n(t)$ es el ruido del canal y $s_o(t)+n_o(t)$ es la salida del filtro (figura 9.2). La componente de señal a la salida es $s_o(t)$ y la componente del ruido es $n_o(t)$. Así, deseamos optimizar la razón $s_o^2(t)/n_o^2(t)$ en algún instante $t=t_m$ (instante de efectuar la decisión). Nótese que $n_o(t)$ es una señal

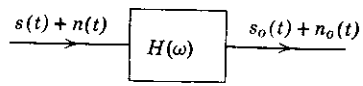


Figura 9.2

aleatoria por lo que no puede determinarse exactamente. Por lo tanto, debemos conformarnos con tomar su valor cuadrático medio $\overline{n_o^2(t)}$. Así, deseamos optimizar la razón ρ dada por

$$\rho = \frac{s_o^2(t_m)}{\overline{n_o^2(t_m)}} \tag{9.1}$$

Sea $S(\omega)$ la transformada de Fourier de $s(t)$ y $H(\omega)$ la función de transferencia del filtro óptimo deseado. Entonces,

$$\begin{aligned} s_o(t) &= \mathscr{F}^{-1}[S(\omega)H(\omega)] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \end{aligned}$$

y

$$s_o(t_m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t_m}\,d\omega \tag{9.2}$$

El valor cuadrático medio de la señal de ruido se puede expresar en términos del espectro de densidad de potencia de ruido a la salida (ecuación 2.37). Si $\mathcal{S}_n(\omega)$ es el espectro de densidad de potencia de la señal de ruido $n(t)$ a la entrada, entonces $|H(\omega)|^2\,\mathcal{S}_n(\omega)$ es el espectro de densidad de potencia de $n_o(t)$. Por lo tanto,

$$\overline{n_o^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega \tag{9.3}$$

Nótese que el valor cuadrático medio de $n_o(t)$ es independiente de t. En consecuencia,

$$\overline{n_o^2(t_m)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega \tag{9.4}$$

Supongamos que el ruido de canal $n(t)$ es blanco, con densidad de potencia $\mathcal{N}/2$.

$$S_n(\omega) = \frac{\mathcal{N}}{2}$$

y

$$\overline{n_o^2(t_m)} = \frac{\mathcal{N}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2\,d\omega \tag{9.5}$$

Substituyendo las ecuaciones 9.2 y 9.4 en la ecuación 9.1, obtenemos

$$\rho = \frac{s_o^2(t_m)}{\overline{n_o^2(t_m)}} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t_m}\,d\omega\right|^2}{\pi\mathcal{N}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2\,d\omega} \tag{9.6}$$

Nótese que como $s_o(t)$ es un número real, $s_o^2(t) = |s_o(t)|^2$. Aquí empleamos la desigualdad de Schwartz. Una forma de dicha desigualdad establece que si $F_1(\omega)$ y $F_2(\omega)$ son funciones complejas, entonces

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(\omega)\,d\omega\right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|F_1(\omega)|^2\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty}|F_2(\omega)|^2\,d\omega \tag{9.7a}$$

La desigualdad se cumple sólo si (ver Apéndice)

$$F_1(\omega) = kF_2^*(\omega) \tag{9.7b}$$

en donde k es una constante arbitraria. Si ponemos

$$F_1(\omega) = H(\omega) \qquad \text{y} \qquad F_2(\omega) = S(\omega)e^{j\omega t_m}$$

entonces

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t_m}\,d\omega\right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty}|S(\omega)|^2\,d\omega \tag{9.8}$$

Al substituir la desigualdad 9.8 en la ecuación 9.6 obtenemos

$$\frac{s_o^2(t_m)}{\overline{n_o^2(t_m)}} \leqslant \frac{1}{\pi\mathcal{N}}\int_{-\infty}^{\infty}|S(\omega)|^2\,d\omega$$

Por lo tanto,

$$\rho_{\text{máx}} = \left.\frac{s_o^2(t_m)}{\overline{n_o^2(t_m)}}\right|_{\text{máx}} = \frac{1}{\pi\mathcal{N}}\int_{-\infty}^{\infty}|S(\omega)|^2\,d\omega \tag{9.9}$$

lo cual ocurre cuando la desigualdad de la ecuación 9.8 se vuelve igualdad. Esto es posible sólo si (ecuación 9.7)

$$\begin{aligned} H(\omega) &= kS^*(\omega)e^{-j\omega t_m} \\ &= kS(-\omega)e^{-j\omega t_m} \end{aligned} \tag{9.10}$$

en donde k es una constante arbitraria.

La respuesta $h(t)$ al impulso del sistema óptimo está dada por

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[kS(-\omega)e^{-j\omega t_m}] \end{aligned}$$

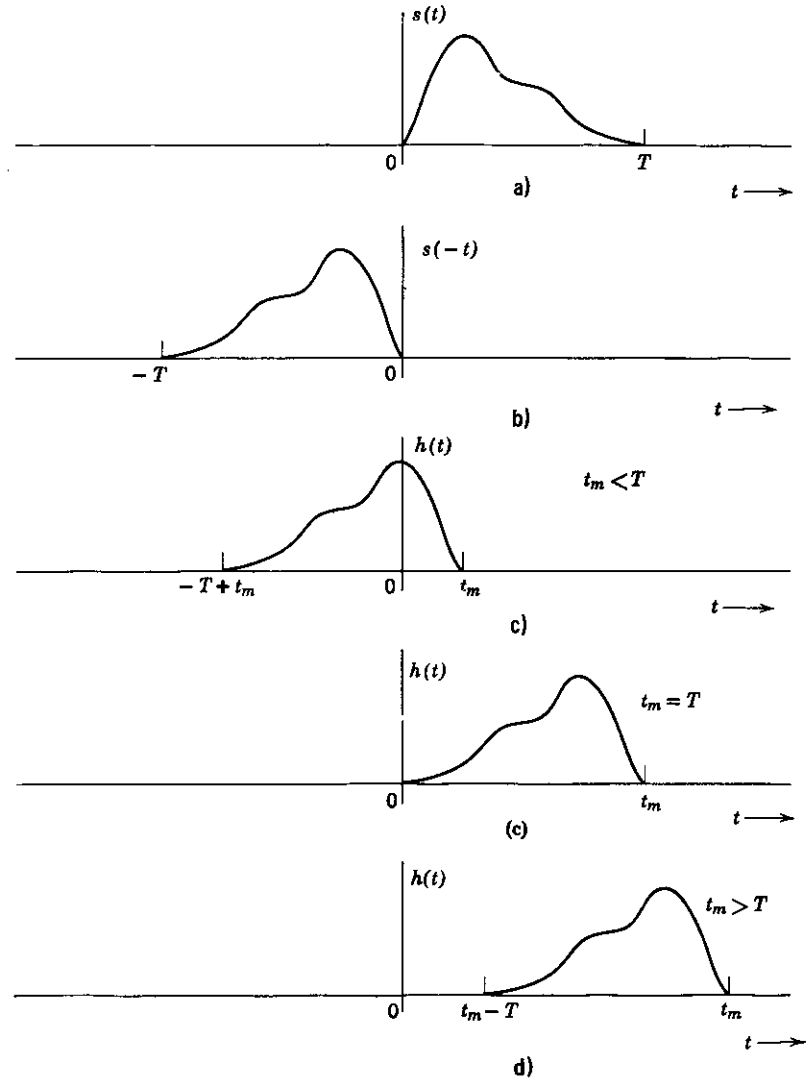


Figura 9.3

Nótese que la transformada inversa de Fourier de $S(-\omega)$ es $s(-t)$ y el término $e^{-j\omega t_m}$ representa un desplazamiento en tiempo de t_m segundos. Por lo tanto,

$$h(t) = ks(t_m - t) \tag{9.11}$$

Por conveniencia, supondremos que $k = 1$.

Como se dijo antes la señal mensaje $s(t)$ es de duración finita. Sea $s(t) = 0$ fuera del intervalo $(0, T)$ como se ilustra en la figura 9.3a. La señal $s(t_m - t)$ se puede obtener al hacer girar $s(t)$ alrededor del eje vertical, desplazándola después a la derecha en t_m segundos. En la figura 9.3 se ilustran tres casos en donde $t_m < T$, $t_m = T$ y $t_m > T$. Obsérvese que la respuesta $h(t)$ al impulso es no causal para $t_m < T$ (figura 9.3c). Esto representa un sistema físicamente irrealizable. Para su realización física $t_m \geqslant T$, como se muestra en las figuras 9.3c y d. Ambos sistemas darán el resultado deseado. Sin embargo, para realizar rápidamente la decisión el tiempo de observación t_m debe ser tan pequeño como sea posible. Para valores de t_m más grandes, debemos esperar tiempos correspondientes mayores para la observación deseada. En consecuencia, $t_m = T$ es preferible a $t_m > T$. Se concluye, por lo tanto, que la respuesta al impulso del sistema óptimo es la imagen especular de la señal mensaje deseada $s(t)$ con respecto al eje vertical y desplazada a la derecha en T segundos. Tal receptor se llama *filtro óptimo* o *receptor óptimo.*

En un filtro óptimo, la razón señal a ruido (ecuación 9.1) es máxima en el instante t_m, que también es el instante en que toda la señal $s(t)$ entra al receptor (figura 9.4). Debe observarse que este filtro es el óptimo de todos los filtros lineales. En general, se puede obtener una mejor razón señal a ruido si se elimina la restricción de linealidad del filtro. Esto, por supuesto, produce un filtro no lineal.

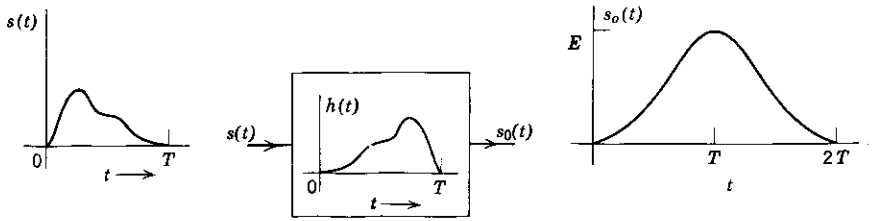


Figura 9.4

El valor máximo de la razón señal a ruido que se obtiene con el filtro óptimo está dado por la ecuación 9.9. Nótese que E, energía de la señal $s(t)$, está dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2\,d\omega$$

Por lo tanto,

$$\rho = \frac{s_o^2(t_m)}{\overline{n_o^2(t_m)}} = \frac{E}{\mathcal{N}/2} = \frac{2E}{\mathcal{N}} \tag{9.12}$$

$$= \frac{\text{Energía de la señal } s(t)}{\text{Espectro de densidad de potencia de la señal de ruido de entrada}}$$

La amplitud de la señal $s_o(t_m)$ se obtiene substituyendo la ecuación 9.10 en la ecuación 9.2

$$s_o(t_m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2\,d\omega$$

$$= E \tag{9.13}$$

En consecuencia, la amplitud máxima de la componente de señal a la salida ocurre en $t = t_m$ tiene como magnitud E, la energía de la señal $s(t)$ (véase la figura 9.4). Este es un resultado notable. La amplitud máxima es independiente de la forma de onda $s(t)$ y depende únicamente de su energía.

El valor cuadrático medio de la señal de ruido en la salida se puede obtener substituyendo la ecuación 9.13 en la ecuación 9.12

$$\overline{n_o^2(t_m)} = \frac{\mathcal{N}E}{2} \tag{9.14}$$

El filtro óptimo se puede implementar mediante el arreglo de la figura 9.5. Si la entrada al filtro es $f(t)$, entonces $r(t)$, su salida, está dada por

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(t - x)\,dx$$

en donde $h(t)$ es la respuesta al impulso dada por $h(t) = s(t_m - t)$ y $h(t - x) = s(x + t_m - t)$. Por lo que

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)s(x + t_m - t)\,dx$$

La decisión a la salida se hace a partir de $r(t_m)$, salida en $t = t_m$.

$$r(t_m) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)s(x)\,dx \tag{9.15}$$

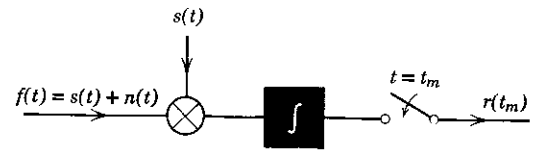


Figura 9.5

Podemos obtener $r(t_m)$ mediante un arreglo (conocido como correlador de tiempo) que se ilustra en la figura 9.5. En él, la señal de entrada $s(t) + n(t)$ se multiplica por $s(t)$. Evidentemente, esto es detección síncrona (o coherente). Es decir, la detección con filtro óptimo es esencialmente detección síncrona.

9.2 DECISION DE UMBRAL EN EL FILTRO OPTIMO

El filtro óptimo se diseña para optimizar la razón señal a ruido en el instante $t_m(t_m = T)$. La presencia de la señal $s(t)$ se decide, por tanto, por la observación de la salida en $t = T$. Si $r(t)$ representa la salida del filtro óptimo en $t = T$, entonces

$$r(T) = s_o(T) + n_o(T).$$

Al substituir la ecuación 9.13 en la última ecuación, obtenemos

$$r(T) = E + n_o(T) \tag{9.16}$$

Como la señal de ruido de entrada es aleatoria, $n_o(T)$ también es aleatoria. En consecuencia, si la señal $s(t)$ está presente a la entrada, la salida $r(T)$ está dada por una constante E más una variable aleatoria $n_o(T)$. Por lo tanto la salida diferirá de E por la amplitud del ruido. Si la señal $s(t)$ está ausente en la entrada, la salida del filtro estará dada únicamente por el término de ruido

$$r(T) = n_o(T) \tag{9.17}$$

Así, si la señal está presente, la salida será $E + n_o(T)$; y si está ausente, la salida será $n_o(T)$. La decisión de que la señal esté presente o ausente podría hacerse fácilmente a partir de esta información, pero $n_o(T)$ es aleatoria y su valor exacto no es predecible; puede ser grande o pequeño y positivo o negativo. Es posible que la señal $s(t)$ esté presente en la entrada, pero $n_o(T)$ quizá tenga un valor negativo grande. Esto hará la salida $r(T)$ muy pequeña. Por otro lado, aun si la señal $s(t)$ está ausente, $n_o(T)$ puede ser bastante grande. Esto causará que la salida $r(T)$ sea grande. Así pues, no hay forma segura de decidir si $s(t)$ está presente o no. Sin embargo, es evidente que cuando $r(T)$ es grande, hay más probabilidad de que $s(t)$ esté presente. Por otro lado, si $r(T)$ es muy pequeña, hay más probabilidad de que la señal no esté presente. Aparte de la decisión asumida, siempre existe alguna probabilidad de error. Por lo tanto, debemos encontrar una regla de decisión que lleve al mínimo tal probabilidad.

Considérese como regla de decisión: "presencia de señal" si $r(T) > a$ y "ausencia de señal" si $r(T) < a$. Encontraremos el umbral óptimo a de decisión que minimiza la probabilidad de error de la decisión.

Para encontrar el umbral óptimo, primero debemos considerar la naturaleza de la amplitud de ruido $n_o(T)$. El ruido es una señal aleatoria con amplitudes de cierta distribución. La distribución más comúnmente observada de dichas amplitudes es la de Gauss.* Esto significa que la frecuencia relativa del ocurrir de las amplitudes del ruido tiene forma gaussiana. Esta distribución $p(x)$ recibe el nombre de función de densidad de probabilidad de la amplitud x y está dada por

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma_x^2} \tag{9.18}$$

en donde σ_x^2 es el valor cuadrático medio de la señal. Esta distribución se ilustra en la figura 9.6a. Se puede ver que la distribución de amplitud es simétrica respecto a $x = 0$. La señal tiene la misma probabilidad de ser positiva y negativa, por lo cual su valor medio es cero. La densidad de probabilidad representa la frecuencia de ocurrencia de amplitudes. La función está normalizada de tal manera que el área $p(x)dx$ (mostrada en la figura 9.6a) representa la probabilidad de observar la amplitud de la señal en el intervalo $(x, x + dx)$. Así, si observamos una señal en el intervalo 0, $T (T \to \infty)$, como se ilustra en la figura 9.6b, la amplitud está en el intervalo $x, x + dx$ en cierto tiempo dT dado por

$$dT = \sum_{j=1}^{8} dt_i$$

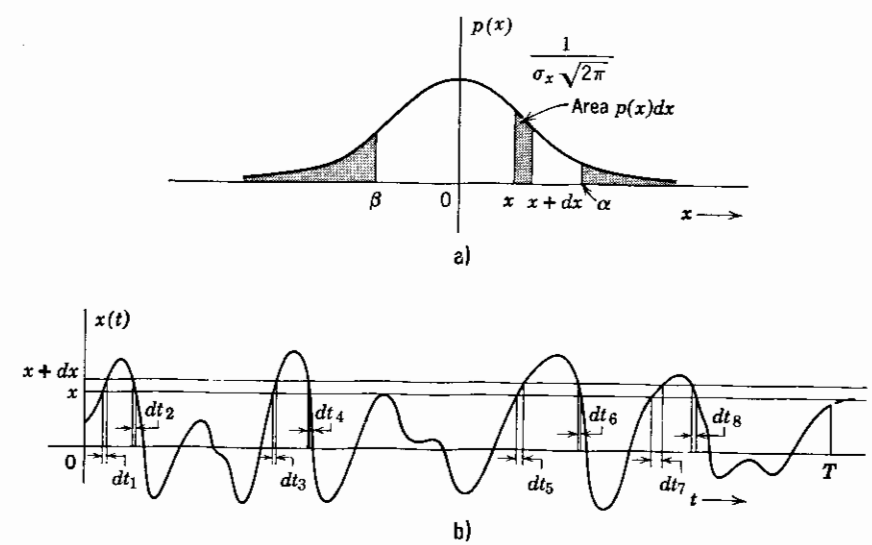


Figura 9.6

En consecuencia, la frecuencia relativa de observar la señal en el intervalo x, $x + dx$ es dT/T. Por lo tanto

$$p(x)\,dx = \frac{\sum dt_i}{T}$$

* Mediante el teorema de límite central de la teoría de la probabilidad, se puede demostrar que una señal compuesta de un gran número de señales relativamente independientes tiende a ser gaussiana. La mayoría de las señales de ruido son el resultado de numerosas perturbaciones relativamente independientes. Evidentemente, el ruido de disparo y el ruido térmico caen dentro de esta categoría. En consecuencia, la suposición gaussiana del ruido se justifica en la mayoría de los casos.

Ahora, es claro que la probabilidad de observar x en el intervalo (x_1, x_2) está dada por el área de $p(x)$ bajo (x_1, x_2):

$$\text{Probabilidad } (x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx \tag{9.19}$$

de igual manera, la probabilidad de observar $x > \alpha$ está dada por

$$\text{Probabilidad } (x > \alpha) = \int_{x}^{\infty} p(x)\,dx \tag{9.20}$$

y

$$\text{Probabilidad } (x < \beta) = \int_{-\infty}^{\beta} p(x)\,dx \tag{9.21}$$

Para el ruido de salida $n_o(t)$, el valor cuadrático medio está dado por $\mathcal{N}E/2$ (ecuación 9.14). En la ecuación 9.18, $\sigma_x{}^2$ representa el valor cuadrático medio. Por lo tanto

$$\sigma_x{}^2 = \frac{\mathcal{N}E}{2}$$

y

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi \mathcal{N} E}}\, e^{-x^2/\mathcal{N}E} \tag{9.22}$$

Desviemos ahora nuestra atención a la salida del filtro óptimo. Cuando $s(t)$ está ausente, la salida es $n_o(T)$ con distribución de amplitud dada por la ecuación 9.22. Esto se ilustra en la figura 9.7a. Si representamos por r la amplitud de la salida, entonces $r = n_o(T)$ y

$$p(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi \mathcal{N} E}}\, e^{-r^2/\mathcal{N}E} \tag{9.23}$$

Si la señal $s(t)$ está presente, entonces

$$r = E + n_o(T)$$

La salida r consiste de una constante E más una componente aleatoria $n_o(T)$. Evidentemente la distribución de amplitud de r es la misma de la ecuación 9.23, pero desplazada por una constante E. Así, en este caso

$$p(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi \mathcal{N} E}}\, e^{-(r-E)^2/\mathcal{N}E} \tag{9.24}$$

Esta distribución se muestra en la figura 9.7b. Ambas distribuciones se muestran juntas en la figura 9.8

Sea a el umbral de decisión. La decisión es "señal presente" si $r > a$ y es "señal ausente" si $r < a$. Por la figura 9.7a, es evidente que existen momentos en que $r > a$ aun si la señal no está presente. La probabilidad de que

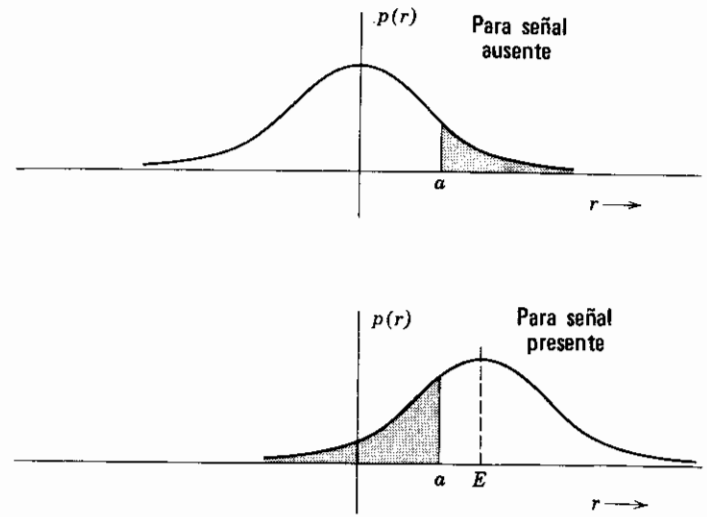


Figura 9.7

$r > a$ cuando la señal no está presente se representa por el área sombreada de la figura 9.7a. Es evidente que empleando a como el umbral, cometemos un error (llamado "de falsa alarma") con probabilidad igual al área sombreada de la figura 9.7a. Por otra parte, aun cuando la señal está presente, la amplitud r de la salida puede descender a menos de a. En este momento nuestra decisión es "señal ausente" aún cuando en realidad la señal está presente. Este tipo de error se llama de falsa normalidad y su probabilidad está dada por el área sombreada de la figura 9.7b. Así, para un umbral a dado, cometemos dos clases diferentes de error, el de señal presente y de señal ausente.

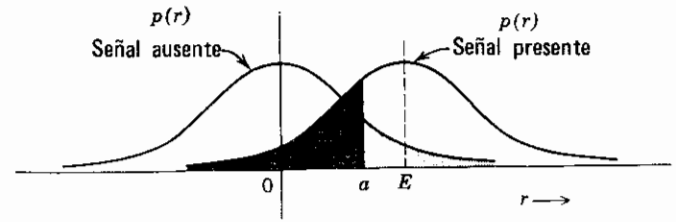


Figura 9.8

Si la señal $s(t)$ tiene la misma probabilidad de estar presente y ausente, entonces, en promedio, $s(t)$ estará presente la mitad del tiempo y la mitad restante estará ausente. Cuando $s(t)$ está presente, cometemos el error de tipo falsa normalidad y cuando $s(t)$ está ausente, cometemos el error de tipo falsa alarma. En consecuencia, la probabilidad de error en la decisión estará dada por la media de las dos áreas sombreadas de las figuras 9.7a y 9.7b. Esto es la mitad de la suma de las dos áreas. Por la figura 9.8, es evidente que la suma de áreas es mínima si elegimos

$$a = \frac{E}{2} \tag{9.25}$$

Por lo cual el umbral óptimo está dado por la ecuación 9.25

Probabilidad de error

Hemos visto que cuando la señal $s(t)$ tiene la misma probabilidad de estar presente y ausente, entonces la probabilidad de error en la decisión está dada por la mitad de la suma de las áreas de la figura 9.7a y 9.7b. Además, el umbral óptimo de decisión $a = E/2$. Por lo tanto, las dos áreas son idénticas. Por consiguiente, la probabilidad de error $P(\epsilon)$ está dado por cualquiera de las áreas. Emplearemos el área de la figura 9.7a.

$$P(\varepsilon) = \int_a^\infty p(r)\, dr$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi \mathcal{N} E}} \int_a^\infty e^{-r^2/\mathcal{N}E}\, dr \tag{9.26}$$

La integral del segundo miembro de la ecuación 9.26 no se puede evaluar en forma cerrada. Sin embargo, se encuentra ampliamente tabulada en tablas normales con el nombre de integral de probabilidad o función de error erf (x).

Definimos la función de error erf (x) como*

$$\text{erf}\ (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy \tag{9.27}$$

y la función de error complementaria erfc (x) como

$$\text{erf}\ (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy \tag{9.28}$$

De estas definiciones, es evidente que

$$\text{erf}\ (x) + \text{erf}\ (x) = 1 \tag{9.29}$$

Una aproximación útil para erfc (x) está dada por

$$\text{erf}\ (x) \simeq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2} \qquad \text{para } x > 2 \tag{9.30}$$

El error en esta aproximación es de alrededor de 10% para $x = 2$ y es menor de 1% para $x > 3$.

Empleando la definición 9.27, podemos expresar la ecuación 9.26 como

$$P(\varepsilon) = \text{erf}\ \left(\frac{a}{\sqrt{\mathcal{N}E/2}}\right) \tag{9.31}$$

* En la actualidad existen en la bibliografía varias definiciones de erf(x) y de erfc(x) que son equivalentes esencialmente con diferencias pequeñas.

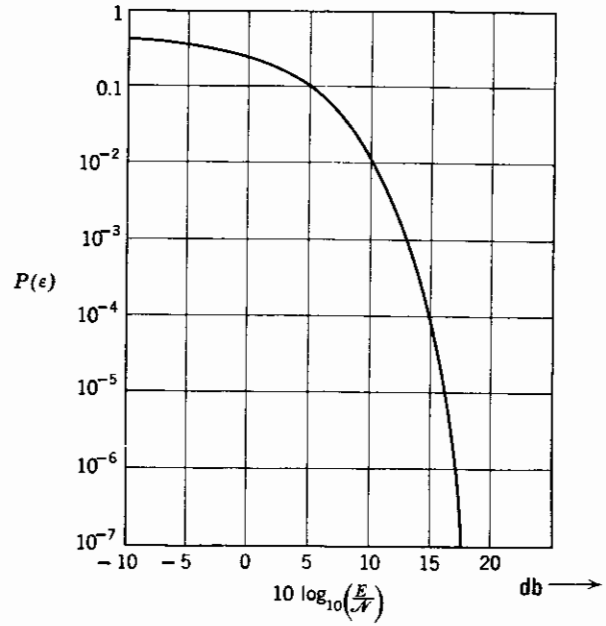


Figura 9.9

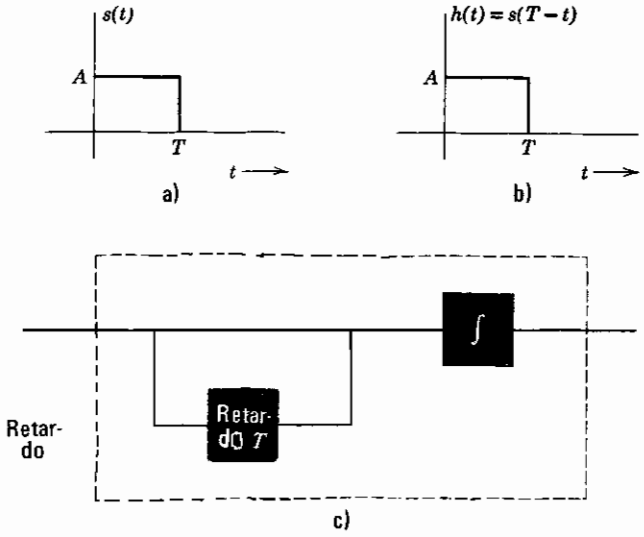


Figura 9.10

Pero como $a = E/2$

$$P(\varepsilon) = \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{2\mathcal{N}}}\right) \tag{9.32}$$

La figura 9.9 muestra la probabilidad de error $P(\epsilon)$ como función de $E/\mathcal{N}$. ¿Cómo interpretamos la probabilidad de error? La probabilidad de un evento implica la frecuencia relativa del evento. Así, si hemos realizado N decisiones ($N \to \infty$), entonces N_ϵ, número total de decisiones incorrectas, está dado por

$$P(\varepsilon) = \frac{N_\varepsilon}{N}$$

y

$$N_\varepsilon = P(\varepsilon)N$$

Así, si $P(\epsilon) = 1/100$, en promedio, una de cada 100 decisiones será incorrecta.

Ejemplo 9.1 (MPC binario)

Para MPC binario (estudiado en el capítulo 7), $s(t)$ es un pulso rectangular de altura A y tiempo T. La respuesta al impulso del filtro óptimo está dada por

$$h(t) = s(T - t)$$

Nótese que $s(T - t)$ es $s(t)$, a la cual se ha aplicado una rotación alrededor del eje vertical y un desplazamiento a la derecha de T segundos. Esto es idéntico a $s(t)$. En consecuencia,

$$h(t) = s(t)$$

Este filtro se puede realizar mediante una disposición como la de la figura 9.10c.

La energía E de $s(t)$ está dada por

$$E = A^2T$$

También sabemos que

$$A = K\sigma_n$$

donde σ_n es el valor raíz cuadrático medio de la señal de ruido.

$$\sigma_n{}^2 = N_i = \overline{n^2(t)}$$

Como la duración del pulso es T, hay $1/T$ pulsos por segundo. Para transmitir $1/T$ pulsos por segundo, el ancho de banda B necesario es $1/2T$.

$$B = \frac{1}{2T}$$

Si $\mathcal{N}/2$ es el espectro de densidad de potencia del ruido, entonces

$$N_i = \mathcal{N}B = \frac{\mathcal{N}}{2T}$$

ó

$$\sigma_n{}^2 = \frac{\mathcal{N}}{2T}$$

y

$$\mathcal{N} = 2T\sigma_n{}^2 \tag{9.33}$$

Es evidente que

$$\frac{E}{\mathcal{N}} = \frac{A^2T}{2T\sigma_n{}^2} = \frac{A^2}{2\sigma_n{}^2} = \frac{K^2\sigma_n{}^2}{2\sigma_n{}^2} = \frac{K^2}{2}$$

Para un valor de $K = 10$,

$$\frac{E}{\mathcal{N}} = 50$$

y la probabilidad de error $P(\epsilon)$ está dada por

$$P(\varepsilon) = \text{erfc}\ \sqrt{25}$$

$$= \text{erfc}\ (5) \tag{9.34}$$

Mediante la ecuación 9.30 obtenemos

$$P(\varepsilon) \simeq 0.284 \times 10^{-6} \tag{9.35}$$

Este resultado también se puede leer directamente en la figura 9.9. Para $E/\mathcal{N} = 50$, $10 \log_{10} E/\mathcal{N} = 16.9$ db. Esto da $P(\epsilon) \simeq 0.284 \times 10^{-6}$.

Así, si la amplitud del pulso es 10 veces el valor raíz cuadrático medio del ruido ($K = 10$), la probabilidad de error es del orden de 10^{-6}, valor aceptable en la mayoría de los casos prácticos.

En este estudio, se ha supuesto un pulso rectangular ideal para $s(t)$. Sin embargo, debido al ancho de banda finito del canal, este pulso se vuelve trapezoidal (véase la sección 2.6) en el proceso del filtro óptimo también debe ser trapezoidal para acoplarse a la forma de onda de la señal recibida. Se debe tener presente este punto en nuestro estudio posterior, en donde se emplean pulsos rectangulares ideales para $s(t)$.

9.3 MODULACION BINARIA EN AMPLITUD (MBA)

El MPC binario del ejemplo 9.1 se puede transmitir fácilmente por cable. Pero cuando la transmisión se hace por el espacio mediante radiación, debemos emplear el MPC binario del ejemplo 9.1, modulado en amplitud. La modulación en amplitud traslada el espectro de baja frecuencia del MPC binario a una frecuencia superior (a la frecuencia portadora). Este arreglo se conoce como modulación binaria en amplitud (MBA).* Uno de los símbolos binarios se transmite mediante un pulso sinusoidal $s(t)$ dado por

$$s(t) = \begin{cases} A \text{ sen } \omega_c t & 0 < t < T \\ 0 & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

El otro símbolo se transmite mediante un espacio (ausencia de señal). Una forma de onda MBA típica se muestra en la figura 9.11.

Vamos a encontrar el receptor óptimo y la probabilidad de error del sistema MBA. Se supone que la probabilidad de que el pulso $s(t)$ esté presente es la misma que la de que esté ausente (0.5).

* N. del T. MBA son las siglas del término en inglés ASK (*amplitude shift keying*).

El pulso $s(t)$ se muestra en la figura 9.12a. La respuesta al impulso del filtro óptimo es

$$h(t) = s(T - t)$$

Obsérvese que $s(T - t)$ es justamente $-s(t)$. Por lo tanto

$$h(t) = -s(t)$$

Figura 9.11

La salida del filtro óptimo, cuando $s(t)$ está presente en la entrada está dado por la convolución de $s(t)$ con $h(t)$. Esto se ilustra en la figura 9.12c. La salida es máxima en $t = T$ como se esperaba y tiene como magnitud la energía E de la señal $s(t)$. En este caso

$$E = \frac{A^2}{2} T \tag{9.36}$$

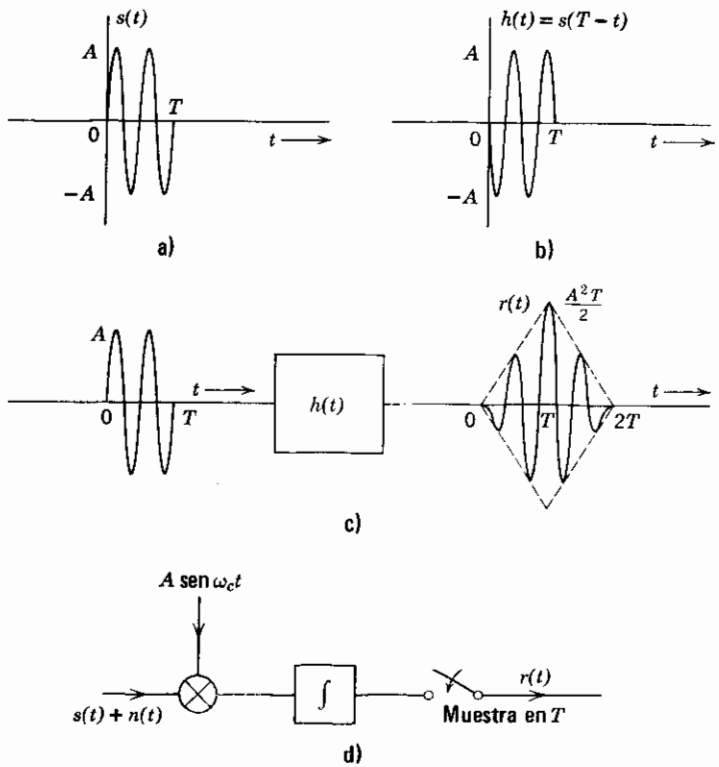


Figura 9.12

El umbral de detección es $E/2$. En este caso el umbral es

$$a = \frac{A^2 T}{4}$$

La probabilidad de error está dada por (ecuación 9.32)

$$P(\varepsilon) = \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{2\mathcal{N}}}\right) \tag{9.37}$$

$$= \text{erfc}\left(\frac{A}{2}\sqrt{\frac{T}{\mathcal{N}}}\right) \tag{9.38}$$

La probabilidad de error también se puede leer directamente en la figura 9.9

Podemos expresar la probabilidad de error en términos de la potencia promedio de señal. La señal $s(t)$ tiene energía E dada por

$$E = \frac{A^2 T}{2}$$

En promedio, la señal $s(t)$ está presente la mitad del tiempo y en la otra mitad no hay señal. Por lo que la potencia promedio de señal P_s está dada por

$$P_s = \frac{1}{T}\frac{E}{2} = \frac{A^2}{4}$$

y

$$P(\varepsilon) = \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{P_s T}{\mathcal{N}}}\right) \tag{9.39}$$

El filtro óptimo tiene una respuesta al impulso de (figura 9.12b)

$$h(t) = -s(t) = \begin{cases} -A \text{ sen } \omega_c t & 0 < t < T \\ 0 & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

Con otro procedimiento, podemos emplear el arreglo de correlación para el filtro óptimo (véase la figura 9.5). Para este caso particular, el arreglo apropiado se ilustra en la figura 9.12d. Nótese que la detección por filtro óptimo es esencialmente detección síncrona.

9.4 MODULACION BINARIA EN FASE (MBF)

En el capítulo 7 se observó que para MPC binario eficiente, se debe emplear pulsos bipolares (dos pulsos de altura $A/2$ y $-A/2$) en lugar de dos pulsos de altura 0 y A. Así, en MPC bipolar, los dos símbolos se representan por $s(t)$ y $-s(t)$. Cuando se emplean los pulsos rectangulares modulados en amplitud (figura 9.13), el arreglo se conoce como modulación binaria en fase

(MBF).* La modulación binaria en fase también se puede considerar como un MPC binario modulado en fase. Una forma de onda MBF típica se ilustra en la figura 9.13c. Encontraremos el detector óptimo y la probabilidad de error para este caso.

Los dos símbolos se transmiten por formas de onda $s_1(t)$ y $s_2(t)$ en donde

$$s_2(t) = -s_1(t)$$

sea

$$s_1(t) = -s_2(t) = s(t)$$

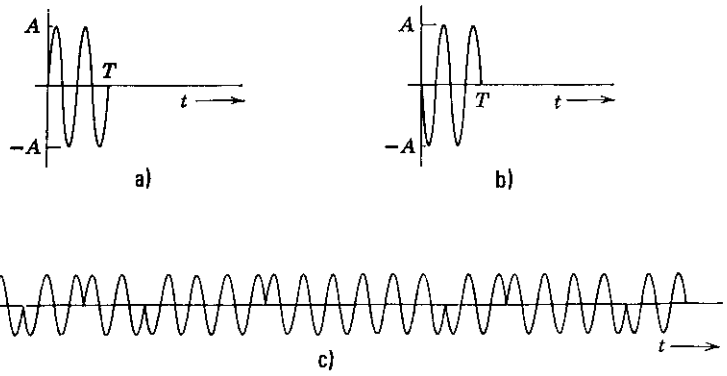


Figura 9.13

Se supondrá una forma de onda $s(t)$ arbitraria a fin de generalizar. La única restricción de $s(t)$ consiste en tener una duración de T segundos. Sea E la energía de $s(t)$.

El filtro óptimo para $s(t)$ tendrá una respuesta al impulso

$$h(t) = s(T - t)$$

Si $s_1(t)$ se aplica a la entrada de este filtro, la salida en $t = T$ estará dada por $r(T)$ de la ecuación 9.16

$$r(T) = E + n_o(T) \tag{9.40}$$

La componente $n_o(T)$ es aleatoria con distribución gaussiana y valor cuadrático medio de $\mathcal{N}E/2$. Por lo tanto,

$$p(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi \mathcal{N} E}} e^{-(r-E)^2/\mathcal{N}E} \tag{9.41}$$

Esta distribución se ilustra en la figura 9.14a. De igual manera, cuando la señal $s_2(t)$ se aplica a la entrada del filtro acoplado, la salida $r(T)$ está dada por

$$r(T) = -E + n_o(T) \tag{9.42}$$

* N. del T. MBF son las siglas del término en inglés PSK (*phase shift keying*).

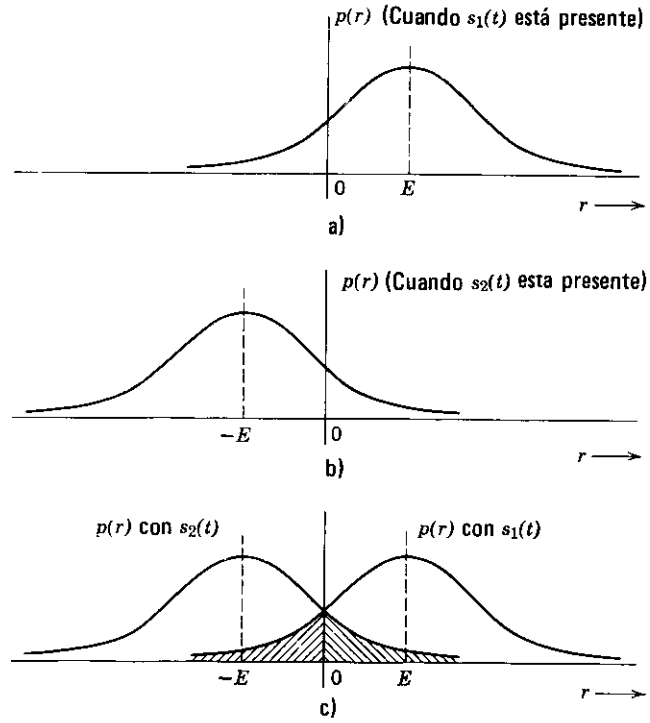


Figura 9.14

Esto se deduce del hecho de que $s_2(t) = -s_1(t)$. Por lo que la salida debida a $s_2(t)$ será el negativo de la salida debida a $s_1(t)$. La distribución de amplitud $r(T)$ cuando $s_2(t)$ está presente se ilustra en la figura 9.14b. Es evidente en este caso que

$$r(T) = \frac{1}{\sqrt{\pi \mathcal{N} E}} e^{-(r+E)^2/\mathcal{N}E} \tag{9.43}$$

En la figura 9.14c se muestran juntas las dos distribuciones. Debemos determinar un umbral de decisión que lleve al mínimo a la probabilidad de error.

Con una argumentación paralela a las empleadas antes (véase la ecuación 9.25), es evidente que el umbral a de detección óptima está dado por

$$a = 0 \tag{9.44}$$

Así, si $r(T) > 0$, la decisión es "$s_1(t)$ presente", y si $r(T) < 0$, la decisión es "$s_2(t)$ presente". La probabilidad de error está dada por el área de $p(r)$ (en la figura 9.14b) desde 0 hasta ∞

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi \mathcal{N} E}} \int_0^\infty e^{-(r+E)^2/\mathcal{N}E} \tag{9.45}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi \mathcal{N} E}} \int_E^\infty e^{-x^2/\mathcal{N}E}\, dx \tag{9.46}$$

Esta integral tiene exactamente la forma de la ecuación 9.26, pero con a reemplazada por E. Así,

$$P(\varepsilon) = \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{2E}{\mathcal{N}}}\right) \tag{9.47}$$

Para el arreglo MBF (figura 9.13)

$$E = \frac{A^2T}{2}$$

y

$$P(\varepsilon) = \text{erfc}\left(A\sqrt{\frac{T}{\mathcal{N}}}\right) \tag{9.48}$$

La potencia promedio de la señal MBF es $A^2/2$,

$$P_s = \frac{A^2}{2} \tag{9.49}$$

Por lo tanto

$$P(\varepsilon) = \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{2P_sT}{\mathcal{N}}}\right) \tag{9.50}$$

Compárese ésta con la ecuación 9.39 para MBA. De estas ecuaciones, es claro que para alcanzar una probabilidad de error dada, la potencia promedio necesaria para MBA es el doble de la que se requiere para MBF. Por lo tanto, MBF es superior a MBA por 3 db en lo que respecta a los requisitos de potencia promedio de señal.

9.5 MODULACION BINARIA EN FRECUENCIA (MBFr)

La modulación binaria en frecuencia puede considerarse como un MPC binario modulado en frecuencia. Los dos símbolos se representan por dos formas de onda, $s_1(t)$ y $s_2(t)$.

$$s_1(t) = \begin{cases} A \text{ sen } m\omega_0 t & 0 < t < T \\ 0 & \text{para cualquier otro punto} \end{cases} \tag{9.51a}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} A \text{ sen } n\omega_0 t & 0 < t < T \\ 0 & \text{para cualquier otro punto} \end{cases} \tag{9.51b}$$

en donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Las dos formas de onda se ilustran en la figura 9.15a. En este caso, las dos formas de onda son diferentes y, en consecuencia, necesitamos dos filtros

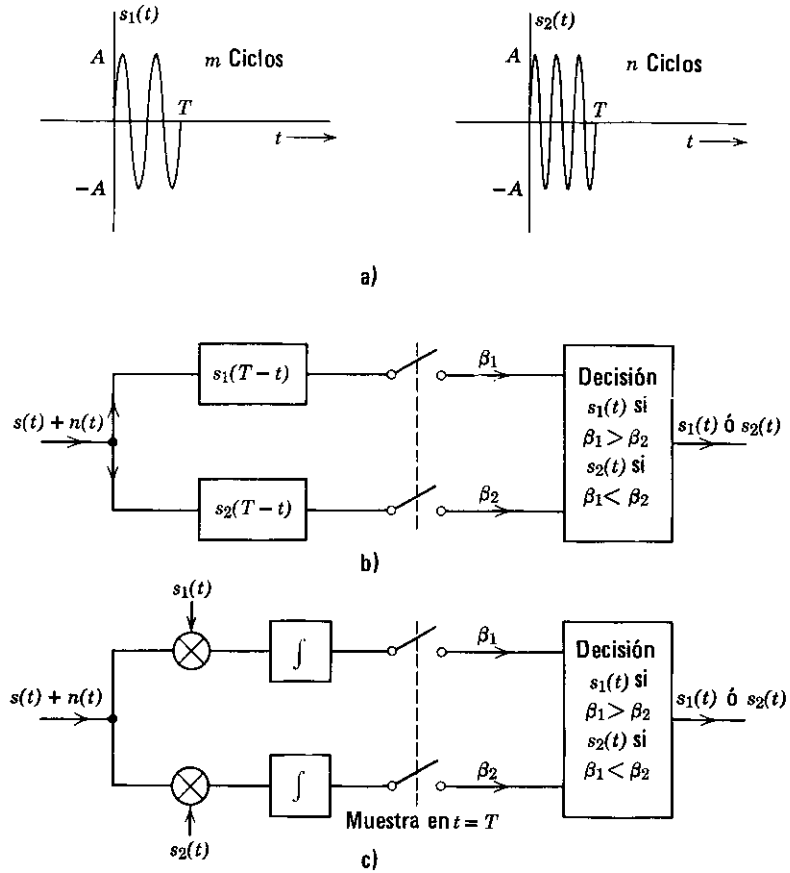


Figura 9.15

óptimos. Vamos a demostrar que el receptor óptimo para MBFr* es el que se ilustra en la figura 9.15b o c. El arreglo de la figura 9.15b es el del filtro óptimo, en tanto que el de la figura 9.15c es el del correlador (figura 9.5).

La señal de entrada es $s(t)+n(t)$ en donde $s(t)$ es $s_1(t)$ o $s_2(t)$. Representemos por $f(t)$ la señal de entrada

$$f(t) = s(t) + n(t)$$

A la señal de entrada le sumamos $-s_2(t)$ como se muestra en la figura 9.16a. La adición de una señal conocida a la señal de entrada no debe afectar el procedimiento óptimo de decisión.** La nueva señal $f'(t)$ está dada por

$$f'(t) = s(t) + n(t) - s_2(t)$$

* N. del T. MBFr son las siglas del término en inglés FSK *(frequency shift keying)*.

** Este resultado es un caso especial del teorema de reversibilidad. Si se realiza cualquier operación con una señal, la operación óptima se puede obtener mediante una operación intermedia que es reversible. Al restar $s_2(t)$ es una operación reversible porque la señal original se puede obtener sumando $s_2(t)$ a $f'(t)$ en la figura 9.16a.

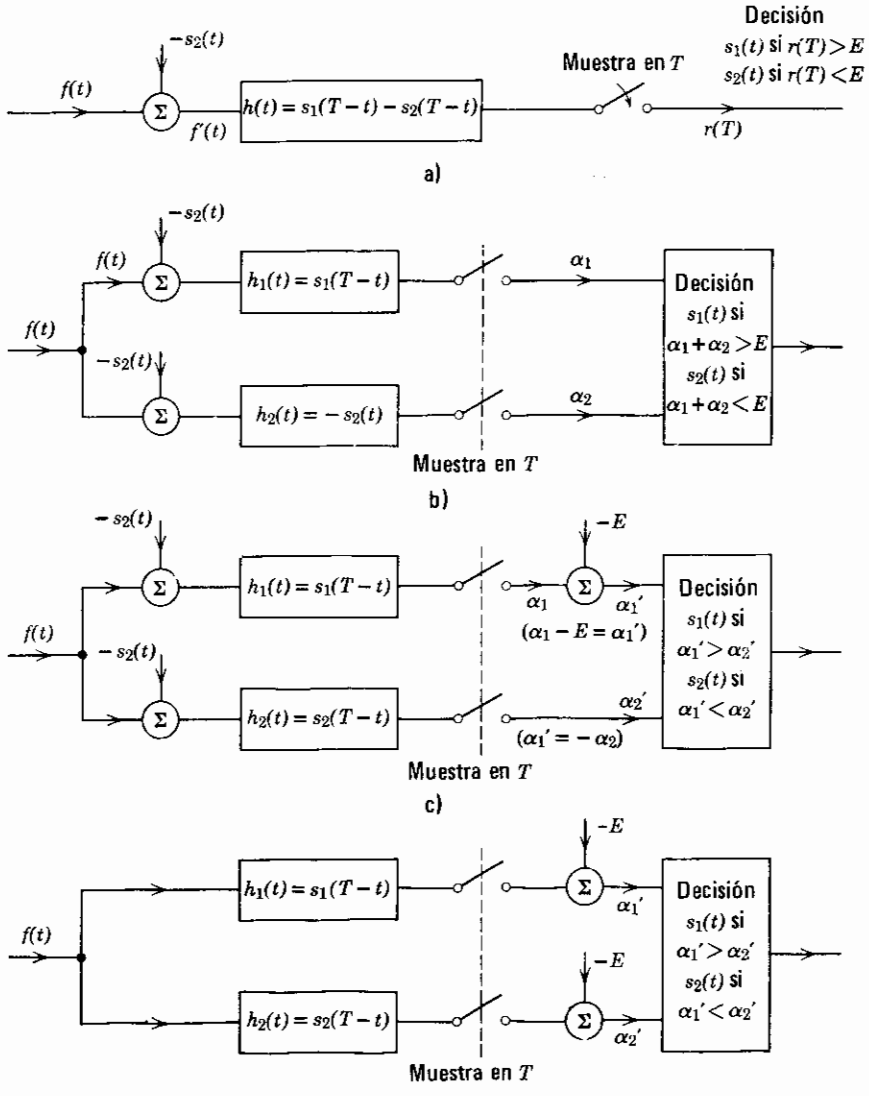


Figura 9.16

Pero $s(t)$ es $s_1(t)$ o $s_2(t)$. Si $s(t)$ es $s_1(t)$, entonces la señal útil en $f'(t)$ es cero. Así, $f'(t)$ queda reducida al caso en que dos símbolos se representan por "el pulso presente" y "el pulso ausente" (marca y espacio). Esto es exactamente el caso de señales binarias que se estudió en la sección 9.2. La nueva señal $s'(t)$ es ahora $s_1(t) - s_2(t)$. El filtro óptimo para esta señal tiene respuesta al impulso de

$$h(t) = s_1(T-t) - s_2(T-t) \tag{9.52}$$

La figura 9.6a contiene el filtro óptimo. La energía E' de $s'(t)$ está dada por

$$E' = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2\, dt$$

$$= \int_0^T s_1^2(t)\, dt + \int_0^T s_2^2(t)\, dt - 2\int_0^T s_1(t)s_2(t)\, dt \tag{9.53}$$

en donde $s_1(t)$ y $s_2(t)$ están dadas por las ecuaciones 9.51a y 9.51b. Nótese que la última integral del miembro derecho de la ecuación 9.53 es cero:

$$\int_0^T \text{sen } m\omega_0 t \text{ sen } n\omega_0 t\, dt = 0 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

y

$$\int_0^T s_1^2(t)\, dt = \int_0^T s_2^2(t)\, dt = E = \frac{A^2T}{2} \tag{9.54}$$

Por lo tanto,

$$E' = 2E = A^2T \tag{9.55}$$

Así, la energía E' de la señal $s'(t)$ es $2E(=A^2T)$ en donde E es la energía de $s_1(t)$ o $s_2(t)$.

El umbral de decisión del filtro óptimo es $E'/2 = E$. Por lo tanto, la decisión es "$s_1(t)$ presente" si $r(T) > E$ y "$s_2(t)$ presente" si $r(T) < E$. Este filtro óptimo se muestra en la figura 9.16a. La probabilidad de error de este filtro es la misma que en la ecuación 9.32, con la salvedad de ser la energía E, en este caso, $E'(=2E)$. Por lo tanto,

$$P(\varepsilon) = \text{erfc}\sqrt{\frac{E}{\mathcal{N}}} \tag{9.56}$$

El filtro óptimo con respuesta al impulso de $s_1(T-t) - s_2(T-t)$ se puede dividir en dos filtros óptimos en paralelo con respuesta al impulso de $s_1(T-t)$ y $-s_2(T-t)$, como se ve en la figura 9.16b. Es evidente que los dos arreglos son equivalentes. Hacemos más transformaciones como se muestra en la figura 9.16c. En la figura 9.16b, el criterio es $\alpha_1 + \alpha_2 > E$ ó $< E$. Si restamos E de la salida del filtro superior como se muestra en la figura 9.1c, el criterio de decisión se reduce a $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ ó < 0. Además, cambiamos el signo de la respuesta al impulso del filtro inferior. Por consiguiente, en la figura 9.16c $\alpha_1 = \alpha_1 - E$ y $\alpha_2' = -\alpha_2$. Esto nos da el criterio de decisión $\alpha_1' - \alpha_2' > 0$ ó $\alpha_1' - \alpha_2' < 0$. Así, la nueva regla de decisión es "$s_1(t)$ presente" si $\alpha_1' > \alpha_2'$ y "$s_2(t)$ presente" si $\alpha_1' < \alpha_2'$. Aquí, notamos que la salida del filtro superior a la señal $s_2(t)$ en $t = T$ es cero. La respuesta del filtro superior a $s_2(t)$ en $t = T$ está dada por

$$s_2(t) * h_1(t) = \int_0^T A^2 \text{ sen } n\omega_0\tau \text{ sen } m\omega_0(t-\tau)\, d\tau = 0 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

En consecuencia, la señal $-s_2(t)$ en la entrada del filtro superior se puede eliminar sin afectar el arreglo. Además, notamos que la señal $-s_2(t)$ a la

entrada del filtro inferior [acoplado a $s_2(t)$] produce la salida $-E$ en $t = T$ (véase la ecuación 9.13). Como nuestra decisión sólo depende de la salida en $t = T$, podemos eliminar $-s_2(t)$ a la entrada del filtro inferior y restar E de su salida, como se muestra en la figura 9.16d. Así, el arreglo de la figura 9.16d equivale al de la figura 9.16c. A continuación, notamos que la decisión se basa en la comparación de dos salidas en la figura 9.16d. En consecuencia, la suma de $-E$ a ambas salidas se puede eliminar. Esto produce el arreglo final de la figura 9.15b. En la figura 9.15c se ilustra el arreglo de correlador correspondiente.

Probabilidad de error en MBFr

Ya que todos los arreglos de la figura 9.16 y 9.15b son equivalentes, todos tienen la misma probabilidad de error. La probabilidad de error para el arreglo 9.16a ya ha sido obtenida (ecuación 9.56):

$$P(\varepsilon) = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{\mathcal{N}}}\right) \tag{9.57}$$

Evidentemente, la potencia promedio P_s para MBFr está dada por

$$P_s = \frac{A^2}{2} = \frac{E}{T}$$

Por lo tanto,

$$P(\varepsilon) = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{P_s T}{\mathcal{N}}}\right) \tag{9.58}$$

Como puede verse en la ecuación 9.39, esto es idéntico a la probabilidad de error de la modulación binaria en amplitud (MBA). Por lo tanto, es evidente que MBFr (modulación binaria en frecuencia) es superior tanto a MBA (modulación binaria en amplitud) como a MBF (modulación binaria en fase).

9.6 ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE DETECCION POR FILTRO OPTIMO

Se ha visto que un filtro óptimo equivale a un arrreglo de correlador de tiempo (figura 9.5). En este arreglo, la señal de entrada $[s(t) + n(t)]$ se multiplica por $s(t)$. Evidentemente, esto es detección síncrona (también conocida como detección coherente).

Se mencionó antes que la detección con este filtro es óptima en sistemas lineales. En general, se puede encontrar un sistema mejor si no nos restringimos a sistemas lineales. Sin embargo, se puede demostrar que, cuando el ruido es gaussiano (como en el caso de casi todas las señales de ruido), entonces el receptor de filtro óptimo (o el detector correlador) es el óptimo absoluto.

En nuestro estudio, se ha supuesto en forma implícita que el transmisor y el receptor están sincronizados. Para cualquier pulso dado, la decisión se hace en el instante en que el pulso queda alimentado completamente al filtro óptimo. Así, las decisiones en el receptor se hacen cada T segundos y estos instantes deben estar sincronizados adecuadamente. Además, se supone que en el instante de adoptar la decisión, la salida procede completamente del pulso en consideración y el ruido. No se toma en cuenta la posibilidad de interferencia entre símbolos, que puede producirse por la respuesta residual del filtro óptimo debida al pulso anterior. En el caso ideal, la respuesta residual debida al pulso $(n-1)$ es cero en $t = nT$. Esto se puede ver en la figura 9.4. La respuesta a un pulso de longitud T ocupa un intervalo $2T$. Así, la respuesta al primer pulso ocupará un intervalo $(0, 2T)$, en tanto que la respuesta al segundo pulso ocupará un intervalo $(T, 2T)$. El instante de muestreo para el segundo pulso es $t = 2T$, instante en que la respuesta debida al primer pulso ya ha desaparecido.

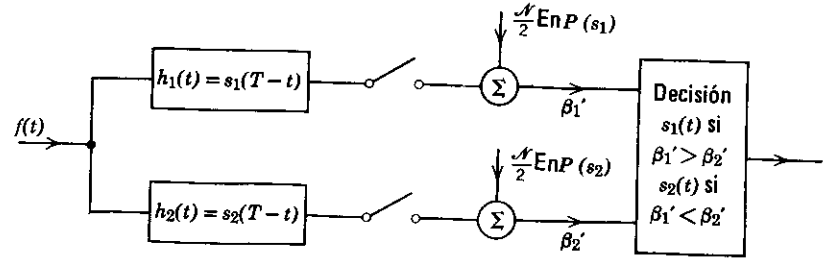


Figura 9.17

Se debe notar que, en estos comentarios, hemos supuesto continuamente que los dos símbolos binarios tienen la misma probabilidad de ocurrir. En el caso de que las dos señales no sean equiprobables, el receptor óptimo de la figura 9.15b se modifica, como se muestra en la figura 9.17.*

En este capítulo, hemos estudiado el método de detección coherente o síncrona. Esta detección se lleva a cabo con un filtro óptimo o con un correlador. En MBA, MBF y MBFr, se supusieron conocidas las fases de las señales de entrada. Sin embargo, en muchos casos no se conoce la fase de la portadora de la señal que se recibe. Esto puede ser producto de las inestabilidades de los osciladores del transmisor y/o del receptor, o producto de una longitud desconocida de la trayectoria de propagación. Así, existe cierta ignorancia acerca de la fase de la portadora de la señal recibida. Bajo estas condiciones, no se puede emplear la detección coherente (la detección por filtro óptimo ni el detector de correlación) pues en estas técnicas es indispensable conocer con exactitud la llegada de la forma de onda de entrada. En tales casos se emplea detección incoherente.

* Véase, por ejemplo, B. P. Lathi, *An Introduction to Random Signals and Communication Theory*, International Textbook Co., Scranton, Pa. 1968. Véase también J. M. Wozencraft and I. M. Jacobs, *Principles of Communicating Engineering*, John Wiley and Sons, New York, 1965.

La detección incoherente se lleva a cabo alimentando la señal de entrada a un detector de envolvente. La salida del detector de envolvente se examina cada T segundos para efectuar la decisión apropiada. Se puede demostrar que este método tiene un comportamiento inferior comparado con el de la detección coherente, particularmente en razón baja de señal a ruido.

APENDICE. LA DESIGUALDAD DE SCHWARTZ

Si $F_1(\omega)$ y $F_2(\omega)$ son funciones complejas de ω, entonces la desigualdad de Schwarz dice que

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(\omega)\,d\omega\right|^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}|F_1(\omega)|^2\,d\omega\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F_2(\omega)|^2\,d\omega\right)$$

Demostración: Sea

$$\Phi(\omega) = \frac{F_2^*(\omega)}{\left[\int_{-\infty}^{\infty}|F_2(\omega)|^2\,d\omega\right]^{1/2}} \tag{A9.1a}$$

y

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)\Phi^*(\omega)\,d\omega \tag{A9.1b}$$

Entonces, puesto que

$$[F_1(\omega) - \alpha\Phi(\omega)][F_1^*(\omega) - \alpha^*\Phi^*(\omega)] = |F_1(\omega) - \alpha\Phi(\omega)|^2 \geqslant 0 \tag{A9.2}$$

Obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_1|^2\,d\omega + |\alpha|^2\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi|^2\,d\omega - \alpha\int_{-\infty}^{\infty}\Phi F_1^*\,d\omega - \alpha^*\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^* F_1\,d\omega \geqslant 0 \tag{A9.3}$$

Pero, de A9.1a

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi|^2\,d\omega = 1$$

y de A9.1b, deducimos:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi F_1^*\,d\omega = \alpha^*$$

En consecuencia, la ecuación A9.3 se transforma en

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_1|^2\,d\omega + |\alpha|^2 - \alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha \geqslant 0$$

ó

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_1(\omega)|^2\,d\omega - |\alpha|^2 \geqslant 0 \tag{A9.4}$$

Substituyendo la ecuación A9.1*a* y A9.1b en la ecuación A9.4, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_1(\omega)|^2\,d\omega \geqslant \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\omega)F_2(\omega)\,d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|F_2(\omega)|^2\,d\omega}$$

Nótese que la desigualdad de A9.4 se vuelve igualdad si y sólo si

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_1(\omega)|^2\,d\omega = |\alpha|^2$$

De la ecuación A9.1 se desprende que esto es posible sólo si

$$F_1(\omega) = kF_2^*(\omega)$$

en donde k es una constante arbitraria.

PROBLEMAS

1. En una transmisión binaria, uno de los mensajes se representa por un pulso rectangular $s(t)$ como el de la figura P-9.1a. El otro mensaje se transmite por la ausencia del pulso. La respuesta al impulso del filtro óptimo es $h(t) = s(T-t) = s(t)$. Calcular la razón de potencia de señal a ruido $s_o^2(t)/n_o^2(t)$ en $t = T$. Supóngase que el ruido es blanco con densidad de potencia de $\mathcal{N}/2$.

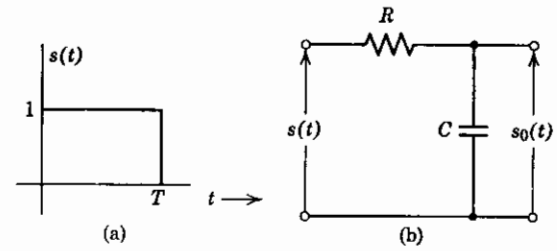


Figura P-9.1

Se desea emplear un filtro simple R-C (figura P-9.1b) en lugar de un filtro óptimo en el receptor. Calcular la máxima razón de potencia de señal a ruido $[s_o^2(t)/n_o^2(t)]$ que se puede alcanzar con este tipo de filtro y compárese con la obtenida con el filtro óptimo correspondiente. (*Sugerencia:* obsérvese que $s_o(t)$ es máxima en $t = T$. La razón señal a ruido es función de la constante de tiempo RC. Encontrar el valor de RC que produzca la máxima razón señal a ruido.)

2. Calcular la función de transferencia del filtro óptimo para una señal pulso gaussiano dada por

$$s(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2\sigma^2}$$

El ruido del canal es blanco con espectro de densidad de potencia de $\mathcal{N}/2$. Calcular la razón S/N máxima obtenida por este filtro.

3. Demuestre que $s_o(t)$, salida del filtro óptimo a la señal de entrada $s(t)$, es simétrica con respecto a $t = T$.

4. Dos mensajes se transmiten por marca y espacio empleando un solo pulso binario, que se ilustra en la figura P-9.4.

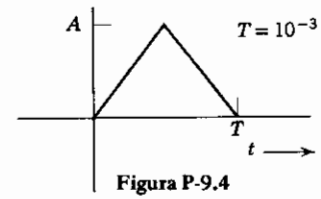


Figura P-9.4

a) Diseñar el receptor óptimo si el ruido del canal es blanco con densidad de potencia de $\mathcal{N}/2$ ($\mathcal{N} = 10^{-4}$).

b) Encontrar la probabilidad de error del receptor óptimo suponiendo que la probabilidad de que $s(t)$ esté presente es 0.5.

5. Si los mensajes del problema 4 se transmiten por dos pulsos binarios que se muestran en la figura P-9.5, diseñar el receptor óptimo y encontrar su probabilidad de error. Comparar este arreglo con el del problema 4.

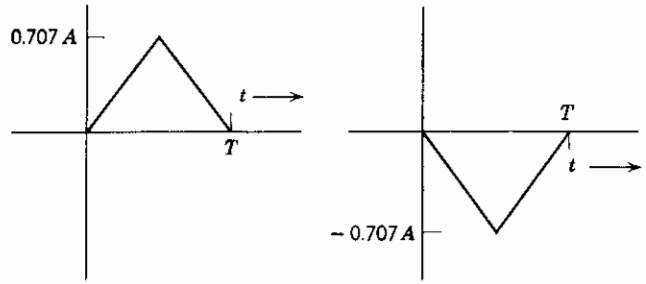


Figura P-9.5

6. Una seña gaussiana tiene valor medio de cero y el valor cuadrático medio es $\sigma_n{}^2$. Encontrar la probabilidad de observar la amplitud de la señal arriba de $10\sigma_n$.

7. Si dos mensajes se transmiten mediante las formas de onda $s_1(t)$ y $s_2(t)$ que se muestran en la figura P-9.7, diseñar el receptor óptimo para ruido blanco de canal.

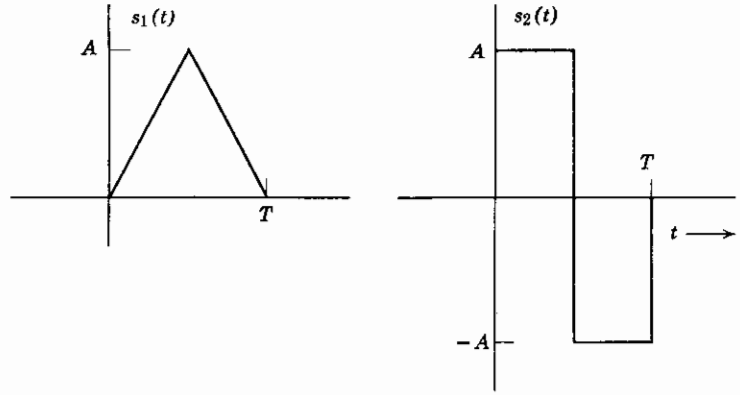


Figura P-9.7

Calcular la probabilidad de error de dicho receptor. Comparar dicho arreglo con el que sólo emplea un pulso triangular (como en el problema 4) o dos pulsos triangulares (como en el problema 5). ¿Cuál es el resultado de la comparación de este arreglo con MBFr?

8. En el texto, el filtro óptimo se obtuvo para el caso de ruido blanco. Procediendo con los mismos argumentos, obténgase el filtro óptimo para ruido de color (densidad de potencia no uniforme) con una densidad de potencia $\mathcal{S}_n(\omega)$ dada. [*Sugerencia:* sean, en la desigualdad de Schwartz, ecuación 9.7a,

$$F_1(\omega) = \mathcal{S}(\omega)H(\omega) \qquad \text{y} \qquad F_2(\omega) = \frac{S(\omega)}{\mathcal{S}(\omega)}\, e^{j\omega t_m}$$

en donde $\mathcal{S}(\omega)$ se obtiene factorizando $\mathcal{S}_n(\omega) = \mathcal{S}(\omega)\mathcal{S}(-\omega)$, y $\mathcal{S}(\omega)$ tiene todos los polos y ceros en la mitad izquierda del plano complejo de frecuencias.]

Bibliografía

Capítulos 1, 2

Bracewell, R. M., *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1965.

Craig, E. J., *Laplace and Fourier Transforms for Electrical Engineers*, Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1964.

Javid, M., y E. Brenner, *Analysis, Transmission and Filtering of Signals*, McGraw-Hill, New York, 1963.

Lathi B. P., *Signals, Systems, and Communication*, John Wiley and Sons, New York, 1965.

Marshall, J. L., *Signal Theory*, International Textbook Co., Scranton, Pa.

Papoulis, A., *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1962.

Capítulos 3, 4, 5, 6, 7

Black, H. S., *Modulation Theory*, D. Van Nostrand Co., Princeton, N. J., 1953.

Bennett, W. R., y J. R. Davey, *Data Transmission*, McGraw-Hill, New York, 1965.

Downing, J. J., *Modulation Systems and Noise*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

Freeman, J. J., *Principles of Noise*, John Wiley and Sons, New York, 1958.

Hancock, J., *Principles of Communication Theory*, McGraw-Hill, New York, 1961.

Panter, P. F., *Modulation, Noise and Spectral Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1965.

Rowe, H. E., *Signals and Noise in Communication Systems*, D. Van Nostrand Co., Princeton, N. J., 1965.

Schwartz, M., *Information Transmission, Modulation and Noise*, McGraw-Hill, New York, 1959.

Capítulos 8, 9

Abramson, N., *Information Theory and Coding*, McGraw-Hill, New York, 1963.

Harman, W. W., *Principles of the Statistical Theory of Communication*, McGraw-Hill, New York, 1963.

Lathi B. P., *An Introduction to Random Signals and Communication Theory*, International Textbook Co., 1968.

Reza, F. M., *An Introduction to Information Theory*, McGraw-Hill, New York, 1961.
Schwartz M., W. R. Bennett y S. Stein, *Communication Systems and Techniques*, McGraw-Hill, New York, 1966.
Wozencraft J. M., e I. M. Jacobs *Principles of Communication Engineering*, John Wiley and Sons, New York, 1965.

Indice alfabético

"A"

Abramson, N., 403
Amplificador con interrupción, 166
Amplificador en cascada, 299
Analogía entre señales y vectores, 14
Ancho de banda de un sistema, 122
  relación con el tiempo de elevación, 127
Ancho de banda equivalente, de ruido, 278
Armstrong, E. H., 228
Atwater, H. A., 232

"B"

Banda de protección, 250
Bandas laterales residuales, 187, 196
Bennett, W. R., 403
Bessel, funciones de, 32, 217, 227
Black, H. S., 96, 403
Boltzmann, constante de, 263, 267
Bracewell, R. M., 403
Brenner, E., 403

"C"

Cálculos de ruido, para amplificadores en cascada, 295
  para circuitos lineales bilaterales, 269
  para fuentes múltiples, 273
  para una fuente única, 271
Capacidad de canal, 14, 362
Carson, H., 228
Circuito de tubo de reactancia, 231
Comparación de sistemas de AM, 195
Comparación entre sistemas multicanal por división de frecuencia y sistemas multicanal por división de tiempo, 252
Comunicación analógica (continua), 375
Comunicación continua (analógica), 375
Comunicación digital, 375
Condición de casualidad, 125
Contenido de información de mensajes no equiprobables, 289
Contenido de potencia de las bandas laterales y de la portadora, en AM, 178
  en FM, 227
Convergencia en la media, 27
Conversión de frecuencia, 162
Convertidores de frecuencia, 162
Correspondencia entre el dominio del tiempo de la frecuencia, 71, 89
Craig, E. J., 403
Cuantificación, 340

"D"

Davenporte, W. B., 261
Davey, J. R., 403
Demodulación, señales de AM, 174
  señales con portadora suprimida, 165
  señales de BLU, 185, 186
  señales de FM, 232
Densidad de potencia máxima, 289, 290
  de circuito R-L-C, 291
Desigualdad de Schwarz, 378, 400
Desvanecimiento, 195
  selectivo, 195
Desvanecimiento, selectivo, 195
Desviación de la frecuencia de la portadora, 215
Detección de señales binarias, 308
Detección coherente, 157, 398
Detección no coherente, 399
Detección sincrónica, 157, 399
Detector de envolvente, 177
Determinación del error cuadrático medio, 26
Determinación gráfica de la componente de una señal, 20
Determinación gráfica de la convolución, 91

De una señal periódica, 141
Dirac, P. A. M., 58
Discriminador de frecuencia, 232
Distorsión de eco, 148
Distribución de Gauss, 382
Downing J., 403

"E"

Efecto de umbral, en AM, 322
en FM, 329
Efectos de errores de frecuencia y fase en, 187
Eficiencia en MPC, 370
Elías, P., 364
Emde, F., 128, 217
Error de señal ausente, 385
Error de señal presente, 386
Espacio de *n* dimenciones, 22
Espectro de densidad de energía, 130
interpretación del, 133
Espectro de densidad de potencia, 135
Espectro de Fourier. *Ver* Espectro de frecuencia
Espectro de frecuencia, complejo, 41
continuo, 50
de fase, 41
de líneas, 41
de magnitud, 41
discreto, 41
Expresión generalizada para el ruido térmico, 269, 300

"F"

Factor de ruido, 278, 280
determinación experimental del, 288
espectral, 280
para amplificadores en cascada, 295
para amplificadores de transistores de base común, 285
para amplificadores de transistores de emisor común, 288
promedio o integrado, 281
Fenómeno de Gibbs, 29
Filtro óptimo, 376
Filtros, ideales, 120
realizables, 125
Fórmula de Rodríguez, 32
Frecuencia instantánea, 211
Frecuencia intermedia (FL), 200
Freeman, J. J., 267, 403
Función complementaria de error, 388
Función de autocorrelación en el tiempo, 150
Función de densidad de probabilidad, 383
Función de densidad espectral, 50
Función de error, 386
Función de muestreo, 43, 44
Función exponencial perpetua, transformada de Fourier de, 66
Función impulso, definición de la, 58
como una secuencia de funciones de muestreo, 58
como una secuencia de funciones de muestreo cuadráticas, 60
como una secuencia de pulsos de Gauss, 58
como una secuencia de pulsos exponenciales, 58
como una secuencia de pulsos, triangulares, 58
propiedad de muestreo, de la, 60
transformada de Fourier, de la, 61
Función pulso rectangular, periódica, 31, 43
transformada de, 68
Función tren de impulsos, transformada de Fourier, de la, 69
Funciones generalizadas, 58
Funciones singulares, 55

"G"

Ganancia de potencia máxima, 292, 294
Generación de señales de FM, 228
directo, 229
indirecto, 228
método de reactancia por diodo, 230
método de reactor saturable, 230
método por tubo de reactancia, 230

"H"

Hancock, J. C., 403
Hanson, G. H., 287
Harman, W. W., 403
Harris, W. A., 263

"I"

Indice de modulación, 179, 217
Integral de convolución, 88
interpretación gráfica de, 90
Integral seno, 128
Intercambio entre el ancho de banda y la razón señal a ruido, 228, 366
ley ideal para el, 369
Interpretación del, 144
Intervalo de Nyquist, 97

"J"

Jacobi, polinomios de, 32
Jacobs, I. M., 399, 403
Jahnke, E., 128, 217
David, M., 403
Johnson, J. B., 268

"K"

Kaplan, W., 32

"L"

Lathi, B. P., 118, 260, 267, 399, 403, 404
Legendre, serie de Fourier de, 32
Ley de Shannon-Hartley, 14, 364
Lighthill, M. J., 58
Linealidad de la modulación en frecuencia, 225

"M"

Marshall, J. L., 403
Mason, S. J., 31
McWhorter, M., 301
Medida de la información, 357
desde el punto de vista de ingeniería, 358
desde el punto de vista intuitivo, 357
Método de cambio de fase para generar señales de BLU, 181
Mezcla de frecuencias, 162
Mezcladores de frecuencia, 162
Modulación binaria en amplitud, 389
Modulación binaria en fase, 391
Modulación binaria en frecuencia, 394
Modulación en amplitud, con portadora de alta potencia, 170
con portadora suprimida, 155
Modulación en amplitud de pulsos (MAP), 237
ruido en, 336
Modulación en ángulo, 209
características de reducción de ruido de, 228, 323
Modulación en duración o anchura de pulsos (MDP), 246
Modulación en fase (MF), 211
algunas observaciones sobre la, 226
Modulación en frecuencia, 211
multiplicidad de frecuencia, 220
onda cuadrada, 223
Modulación en frecuencia con una onda cuadrada, 223
Modulación en frecuencia de banda ancha, 214
ancho de banda de la, 215
Modulación en frecuencia de banda angosta, 212
Modulación en frecuencia para multiplicidad de frecuencia, 220
Modulación lineal, 225
Modulación no lineal, 225
Modulación por pulsos codificados (MPC), 246
ruido en, 340
eficiencia de la, 370
ruido en la, 340, 345
Modulación en posición de pulsos, (MPP) 246
Modulador balanceado, 165
Modulador de anillo, 162
Modulador rectificador, 173
MPC bipolar, 347
MPC unipolar, 347
Muestreo instantáneo, 241
recuperación de la señal del, 243
Muestreo natural, 238
Multicanalización por cuadratura, 196, 202
Multicanalización por división de frecuencia, 153, 200, 252
Multicanalización por división de tiempo, 153, 248, 252

"N"

Nielsen, E. G., 287, 288
North, D. O., 263
Nyquist, H., 268

"O"

Operación de un diodo en la región de carga espacial limitada, 261
Operación de un diodo en la región de temperatura limitada 261
Ortogonalidad en funciones complejas, 31

"P"

Paley, R. E. A. C., 126
Paley-Wiener, criterio de, 125
Panter, P. F., 231, 403
Papoulis, A., 60, 403
Parseval, teorema de, 28, 133
Pettit, J., 301

Plancherel, teorema de, 133
Probabilidad de error en detección con filtros óptimos, 388
Propiedad de desplazamiento en el tiempo, 81
Propiedad de desplazamiento en la frecuencia, 80
Propiedad de diferenciación en el tiempo, 83
Propiedad de diferenciación en la frecuencia, 87
Propiedad de integración en el tiempo, 83
Propiedad de linealidad de la transformada de Fourier, 78
Propiedad de muestreo, 60
Propiedad de simetría de la transformada de Fourier, 76
Propiedad escalar, 78
  significado de, 79

"R"

Rack, A. J., 263
Rapidez de muestreo de Nyquist, 249
Receptor superheterodino, 201
Reducción del efecto de umbral por medio de pre-énfasis, 331
Relación entre el tiempo de elevación y el ancho de banda 127
Relaciones de convolución, 89
Representación en el dominio de la frecuencia, 41, 51
Representación en el dominio del tiempo, 27, 41, 51
Reza, F. M., 403
Root, W. L., 261
Rowe, H. E., 403
Ruido de cuantificación, 344
Ruido de disparo, 258
  en diodos, 258
  en transistores, 285
  en tubos multielectrodos, 264
  espectro de densidad de potencia del, 260
Ruido, de centelleo (1/f), 266
  blanco, 268
  de disparo, 258
  de partición, 266
  de Johnson, 268
  térmico, 266
Ruido en sistemas de comunicación, de amplitud modulada (AM) 315, 319
  de banda lateral doble con portadora suprimida (BLD-PS), 315
  de banda lateral única con portadora suprimida (BLU-PS), 317
  de frecuencia modulada (FM), 323
  de modulación en amplitud de pulsos (MAP), 336
  de modulación en ángulo, 323
  de modulación de fase (MF), 334
  de modulación en posición de pulsos (MPP), 336
  de modulación en pulsos codificados (MPC binario), 340
  de modulación en pulsos codificados (n' ario), 345

"S"

Schwartz, L., 58
Schwartz, M., 33, 248, 403
Señal causal, 125
Señales aleatorias independientes, 273
Señales aleatorias no correlacionadas, 275
Señales con modulación en amplitud de pulsos, necesidad de ancho de banda de, 250
  rapidez de muestreo en, 249
  transmisión de, 245
Señales de banda lateral única (BLU), 179
  demodulación de, 185
  generación de, 180
Señales de energía, 131
Señales de FM, domodulación de, 232
Señales ortogonales, 18
  grupo cerrado o completo de, 27
Señales de potencia, 131, 135
Señales de pulsos, 131
Serie de Fourier, exponencial, 37
  generalizada, 28
Serie de Fourier, Legendre, 32
  trigonométrica, 34
Serie de Fourier trigonométrica, 34
Sistemas codificados (de comunicación), 340
Sistemas codificados y no codificados, comparación de, 348
Sistemas de comunicación, modulación en amplitud, 153
  modulación en ángulo, 209
  modulación en pulsos, 237
Sistemas lineales, características de filtro de, 119
  función de transferencia de, 118
  transmisión de señales a través de, 117
Sistemas (de comunicación) no codificados, 340
Spangenberg, K. R., 264
Stein, S., 403

"T"

Técnicas de reinserción de la portadora para detección de señales con portadora suprimida, 192
Técnicas para traslación de frecuencia, 159
Temperatura efectiva de ruido, 292
Temple, G., 58
Teorema de convolución, 87
  en el tiempo, 88
  en la frecuencia, 88
Teorema de la modulación, 80
  para señales de potencia, 139
Teorema de la traslación de frecuencia, 80
Teorema de muestreo, 94
  en el dominio de la frecuencia, 100
  en el dominio del tiempo, 94
  uniforme, 94
Teorema generalizado de Nyquist, 269, 300
Teorema generalizado de Nyquist en cálculos de ruido, 269, 300
Thompson, B. J. 263
Tiempo de protección, 250
Tiempo de subida, 127, 130
Tiempo de tránsito, 260
Transformada de Fourier, 46
  existencia de la, 52
  propiedades de la, 71
Transformada de Fourier de funciones periódicas, 67
Transformada de Hilbert, 116, 185
Transmisión sin distorsión, 120
Tuller, W. G., 340

"U"

Umbral de decisión en filtros óptimos, 382
Umbral de detección, 382

"V"

Van der Ziel, A., 92, 285, 287
Viterbi, A., 340

"W"

Watson, G. N., 227
Wiener, N., 211
Wozencraft, J. M., 399, 403

"Z"

Zinnerman, H., 31

—ooo—